

乱流の統計理論の基礎

吉田 恭

筑波大学大学院数理物質科学研究科

0. 乱流研究の歴史

1. 非平衡統計力学としての乱流

2. Kolmogorov 1941 — 一様等方性乱流の理論

3. 他の系への乱流統計理論の応用

0 乱流研究の歴史

0.1 Leonardo da Vinci “Turbolenza”

Leonardo da Vinci (1513)



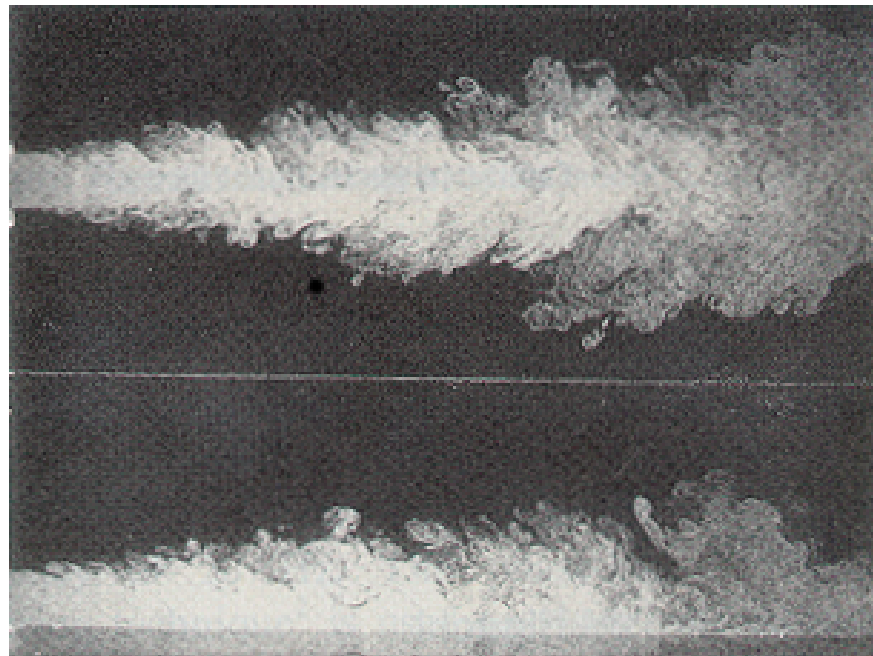
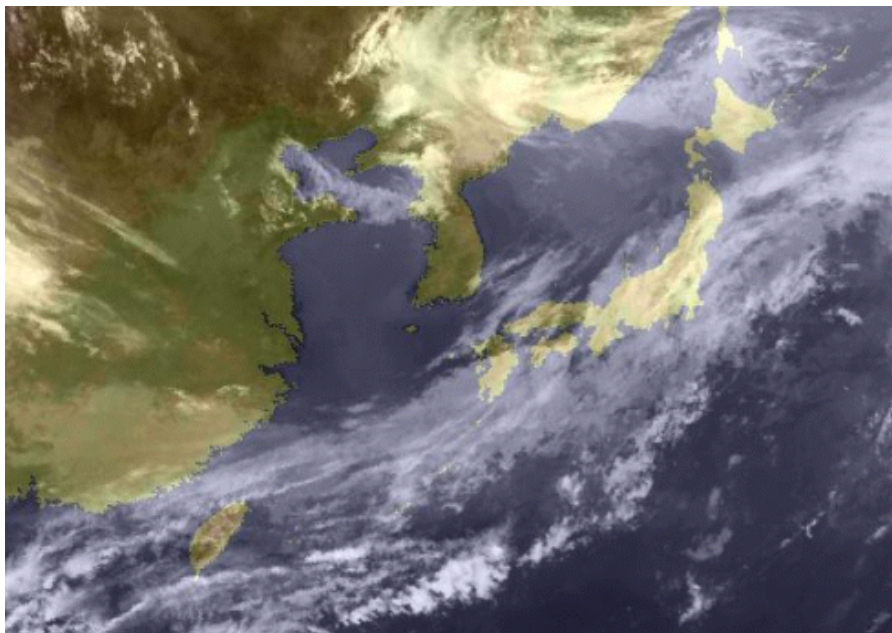
- 主流と揺らぎの存在

“Observe the motion of the surface of the water, which resembles that of hair, which has two motions, of which one is caused by the weight of the hair, the other by the direction of the curls; thus the water has eddying motions, one part of which is due to the principal current, the other to random and reverse motion. ”

- 多スケールの渦の存在

“... the smallest eddies are almost numberless, and large things are rotated only by large eddies and not by small ones, and small things are turned by small eddies and large.”

0.2 様々な乱流



0.3 Navier-Stokes 方程式

- 理想流体の Euler 方程式
- Navier-Stokes 方程式 (Navier, 1821,22)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u},$$

非圧縮条件

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$: 速度場 , $p(\mathbf{x}, t)$: 圧力場 , $\rho(\mathbf{x}, t)$: 密度場 , ν : 動粘性
係数

- 流体力学の発展 (工学・航空分野など)
- 非線形偏微分方程式の理論・弱解の概念 (Leray, 1934)
 - 大域的な滑らかな解の存在または解の爆発の証明は未解決問題
 - * 7 つミレニアム懸賞問題の一つ (Clay Math. Inst., 2000)

0.4 乱流理論の幕開け

- 乱流のカスケード描像 (Richardson, 1922)
 - Big whorls have little whorls
That feed on their velocity,
And little whorls have lesser whorls
And so on to viscosity.
- 一様等方性乱流の統計理論 (Kolmogorov, 1941, 1962)
 - 高 Reynolds 数乱流の小スケールの統計の普遍則
- 完結近似 (Kraichnan, 1958, 1965)
 - Navier-Stokes 方程式に基づく場の理論的解析
- 間欠性 (intermittency) (Kolmogorov, 1962)
 - 高次モーメントの統計, 現象論

0.5 乱流理論の周辺

- 観測による理論の検証

潮流の観測 (Grant *et al.*, 1962)

- カオス (Lorentz, 1963)

- フラクタル (Mandelbrot, 1974)

“The central problem that people need to solve is not the problem of elementary particles or unified field; this is the problem of turbulence ... the last great unsolved problem of classical physics. ”

— Feynman (1969)

大自由度, 非線形, 非平衡系の統計力学

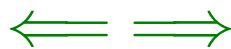
- 計算科学的手法

- 直接数値シミュレーション (格子点数 4096^3), (Kaneda *et al.*, 2003)

1 非平衡統計力学としての乱流

1.1 非平衡統計力学

ミクロ
(要素還元的)



マクロ
(集団的性質)

量子力学
素粒子論

古典力学

統計力学 —— 熱力学

平衡系 $\longleftrightarrow$ 非平衡系

固体 $\longleftrightarrow$ 流体

- 非平衡統計力学の一般論は確立されていない。

1.2 力学系としての乱流

- 大自由度（多スケール）
- 非線形（各自由度が強く相互作用）
- 非平衡（外力と散逸がある）

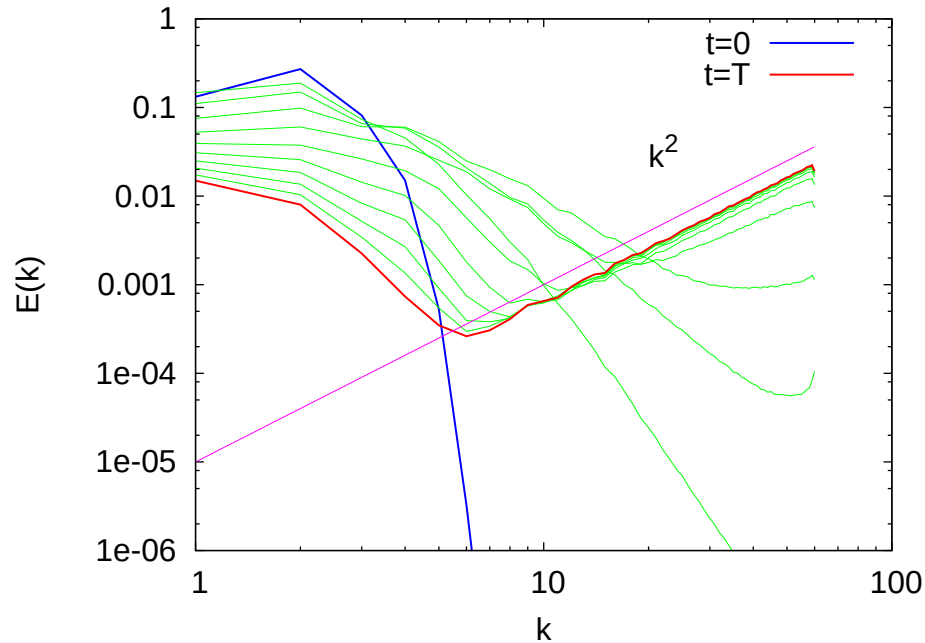
$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_k = M_{kpq} \mathbf{u}_p \mathbf{u}_q + \mathbf{F}_k + \mathbf{D}_k$$

平衡系の統計力学は適用できない。

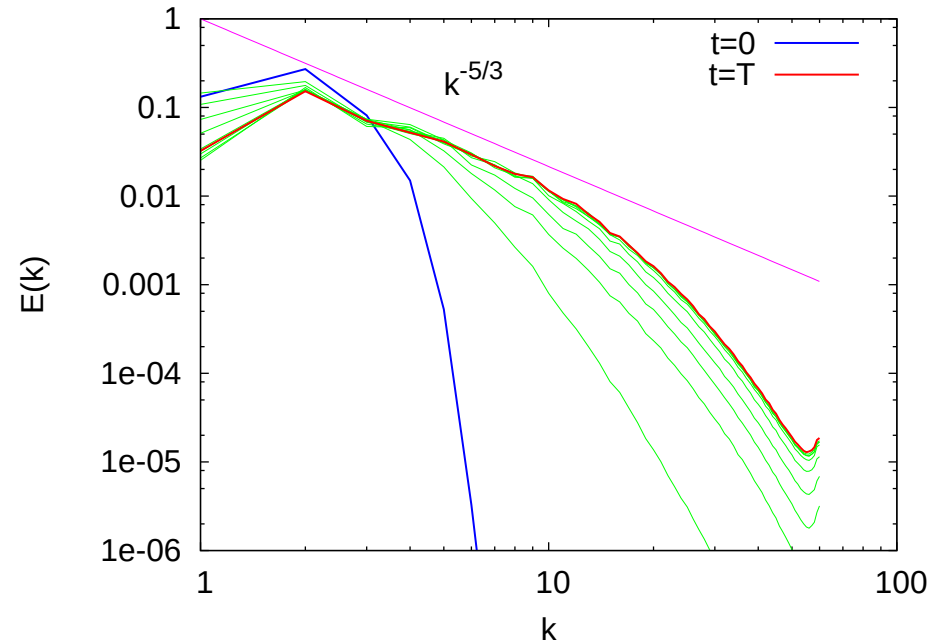
- エネルギー等分配則が成り立たない。
- 種々の物理量が間欠的な振舞いをする。（非 Gauss 統計）

1.3 等分配則の破れ

外力散逸無し (自由度数 $\sim 128^3$)



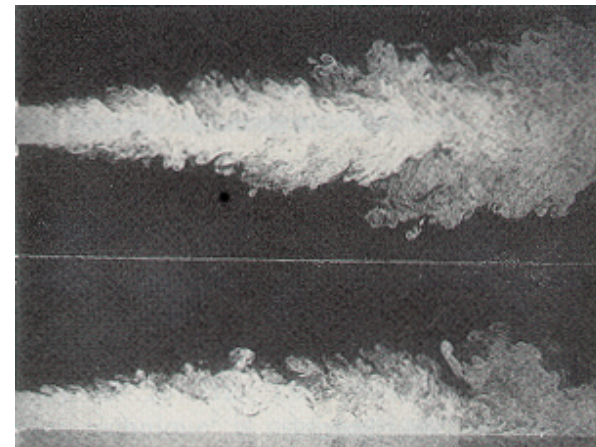
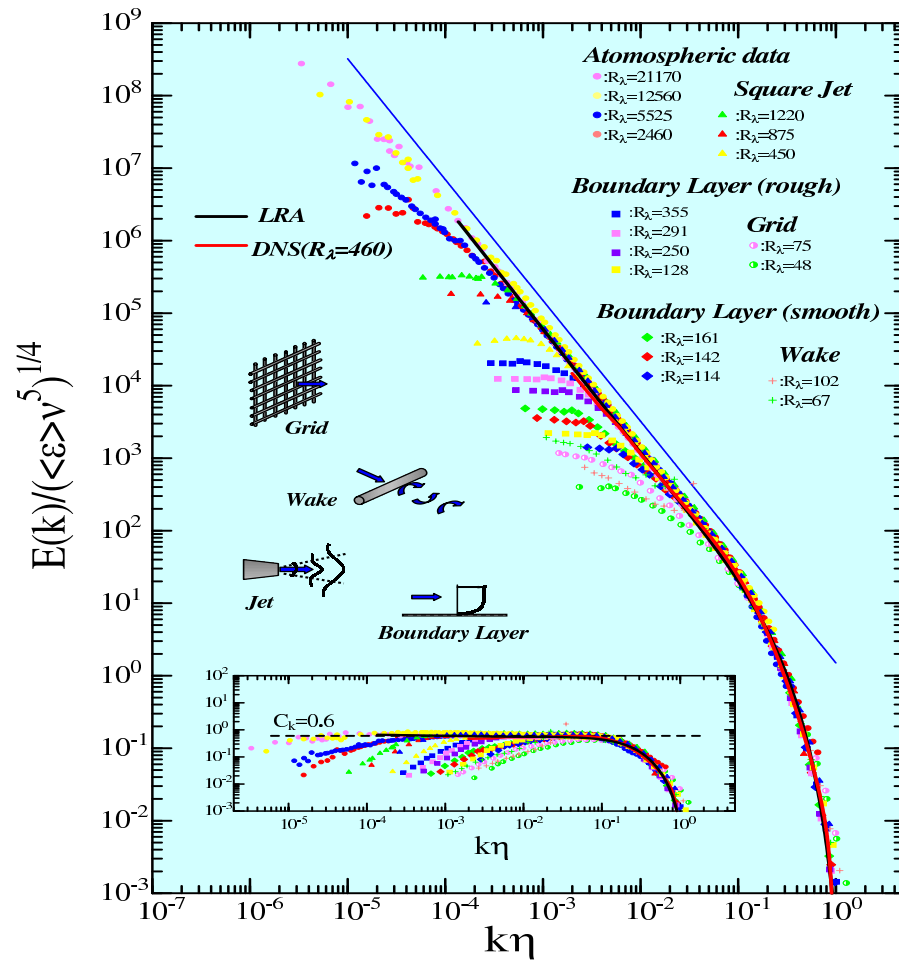
外力散逸有り (自由度数 $\sim 128^3$)



エネルギースペクトル $E(k)$

- 外力散逸無し. エネルギー等分配則、Reyleigh-Jeans スペクトル $E(k) \propto k^2$.
- 外力散逸有り. 大きいスケールから小さいスケールにエネルギーの流れ.
Kolmogorov スペクトル $E(k) = C_k \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$.

1.4 乱流統計の普遍性

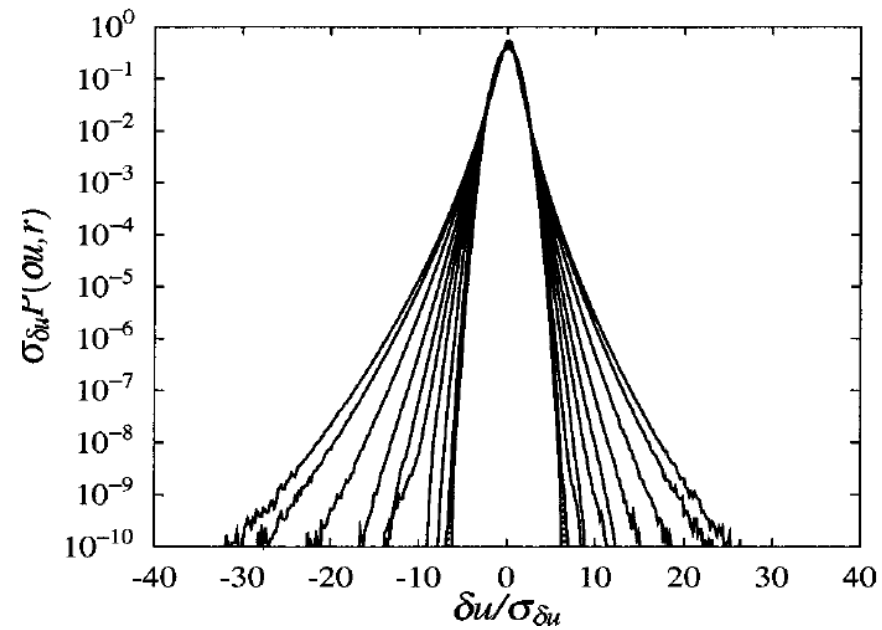


Tsuji, 2002

1.5 非 Gauss 統計

縦速度差

$$\delta u(r) = u^i(\mathbf{x} + r\mathbf{e}^i) - u^i(\mathbf{x})$$



Gotoh, Fukayama, and Nakano (2002)

1.6 乱流理論は何処へいく？

- お手本としての「熱力学」と「統計力学」（平衡系）

熱力学

系の平衡状態の性質は

$$F(T, V, N)$$

によって完全に記述される。

統計力学

系のミクロな性質（Hamiltonian）とマクロな平衡状態の性質を結びつける。

$$F(T, V, N) = -kT \log Z(T, V, N)$$

$$Z(T, V, N) = \sum_l \exp \left(-\frac{E_l(V, N)}{kT} \right)$$

- 乱流理論

状態を決める量は何か？

- Kolmogorov の理論？
- 間欠性？

Navier-Stokes 方程式と統計を結びつける

- 完結近似？

2 Kolmogorov1941 — 一様等方性乱流の理論

2.1 参照点静止系の導入

- 速度場 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ を確率変数とする.
- 参照点静止系での速度場

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{y}, t^{(0)} + s) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(0)}, t^{(0)})$$

を導入. ただし, $(\mathbf{x}^{(0)}, t^{(0)})$ は参照点.

2.2 局所一様等方性の仮説

- 局所一様等方性乱流の定義
 - 乱流が時空間領域 G で 局所一様
 - * $\mathbf{w}(\mathbf{y}^{(k)}, s^{(k)})(k = 1, 2, \dots, n)$ の統計が $(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}^{(k)}, t_0 + s^{(k)}) \in G$ のとき $\mathbf{x}^{(0)}, t^{(0)}, \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(0)}, t^{(0)})$ と独立.
 - 乱流が時空間領域 G で 局所等方
 - * 局所一様かつ上の統計が座標 $\mathbf{x}$ の回転、反転で不変.

$$\text{Reynolds 数: } Re = \frac{LU}{\nu}$$

系の特徴長さスケール: L , 系の特徴時間スケール: $T = \frac{U}{L}$

- 局所一様等方性の仮説
十分高 Reynolds 数乱流の, 境界などから十分離れた十分小さい領域 G において, 統計は一様等方である.

2.3 自己相似仮説

平均エネルギー散逸率

$$\epsilon = 2\nu \left\langle \frac{\partial w_i}{\partial y_j} \frac{\partial w_i}{\partial y_j} \right\rangle$$

- 第1仮説

一様等方性乱流において、その統計は ν と ϵ によって決定される。

Kolmogorov 長さスケール: $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}$

Kolmogorov 時間スケール: $\sigma = \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2}$

- 第2仮説 $|\mathbf{y}^{(k)}|, |\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{y}^{(k')}| \ll \eta$ ($k \neq k'$) なら、統計は ν に依らず ϵ のみで決定される。

2.4 2次相関

縦相関: $S_2(r) = \langle [w_1(r, 0, 0)]^2 \rangle$ 横相関: $S_2^t(r) = \langle [w_2(r, 0, 0)]^2 \rangle$

$$S_2^t = S_2 + \frac{1}{2}r \frac{dS_2}{dr}$$

第1仮説より

$$S_2(r; \epsilon, \nu) = (\nu\epsilon)^{1/2} S_2(r/\eta; 1, 1) \equiv (\nu\epsilon)^{1/2} s_2(r')$$

ただし, $r' = r/\eta$.

第2仮説より

$$\begin{aligned} (\nu\epsilon)^{1/2} s_2(r') &= (a\nu\epsilon)^{1/2} s_2(a^{3/4}r') \\ s_2 &= Cr'^{2/3} \quad (r' \gg 1) \end{aligned}$$

$$S_2(r) = C\epsilon^{2/3}r^{2/3} \quad (\eta \ll r \ll L)$$

2.5 高次相関

同様にして, 高次相関について, 例えば

$$S_p(r) \equiv \langle [w_1(r, 0, 0)]^p \rangle \sim C_p \epsilon^{p/3} r^{p/3} \quad (\eta \ll r \ll L)$$

が第 1,2 仮説から示せる.

2.6 Kolmogorov の 4/5 則

NS 方程式, 局所一様等方性の仮定から, $r \ll L$ のとき,

$$-\frac{2}{3}\epsilon - \frac{1}{2} \frac{\partial S_2}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) \left(\frac{1}{6} S_3 - \nu \frac{\partial S_2}{\partial r} \right).$$

統計的定常性, $\partial S_2 / \partial r(0) = S_3(0) = 0$ より,

$$S_3 - 6\nu \frac{\partial S_2}{\partial r} = -\frac{4}{5}\epsilon r.$$

$r \gg \eta$ のとき左辺第 2 項が第 1 項と比べて無視できるとして,

$$S_3 = -\frac{4}{5}\epsilon r.$$

2.7 波数空間での表現

速度場

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

Navier-Stokes 方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) \hat{u}_i(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} d^3\mathbf{p} M_{iab}(\mathbf{k}) \hat{u}_a(\mathbf{p}) \hat{u}_b(\mathbf{q}),$$

$$M_{iab}(\mathbf{k}) \equiv -\frac{i}{2} [k_a P_{ib}(\mathbf{k}) + k_b P_{ia}(\mathbf{k})], \quad P_{ab}(\mathbf{k}) \equiv \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

統計的一様なとき

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}, t, t') \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{x} Q_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} = \frac{1}{\delta^{(3)}(\mathbf{0})} \langle \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_j(-\mathbf{k}, t') \rangle,$$

ただし,

$$Q_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t) \equiv \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}', t) \rangle, \quad S_2(r) = 2[Q_{11}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) - Q_{11}(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_1, t; \mathbf{x}, t)]$$

2.8 エネルギースペクトル, エネルギー流束関数

エネルギースペクトル

$$E(k, t) \equiv \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}'_{|\mathbf{k}'|=k} Q_{ii}(\mathbf{k}', t, t).$$

Kolmogorov の $-5/3$ 乗エネルギースペクトル

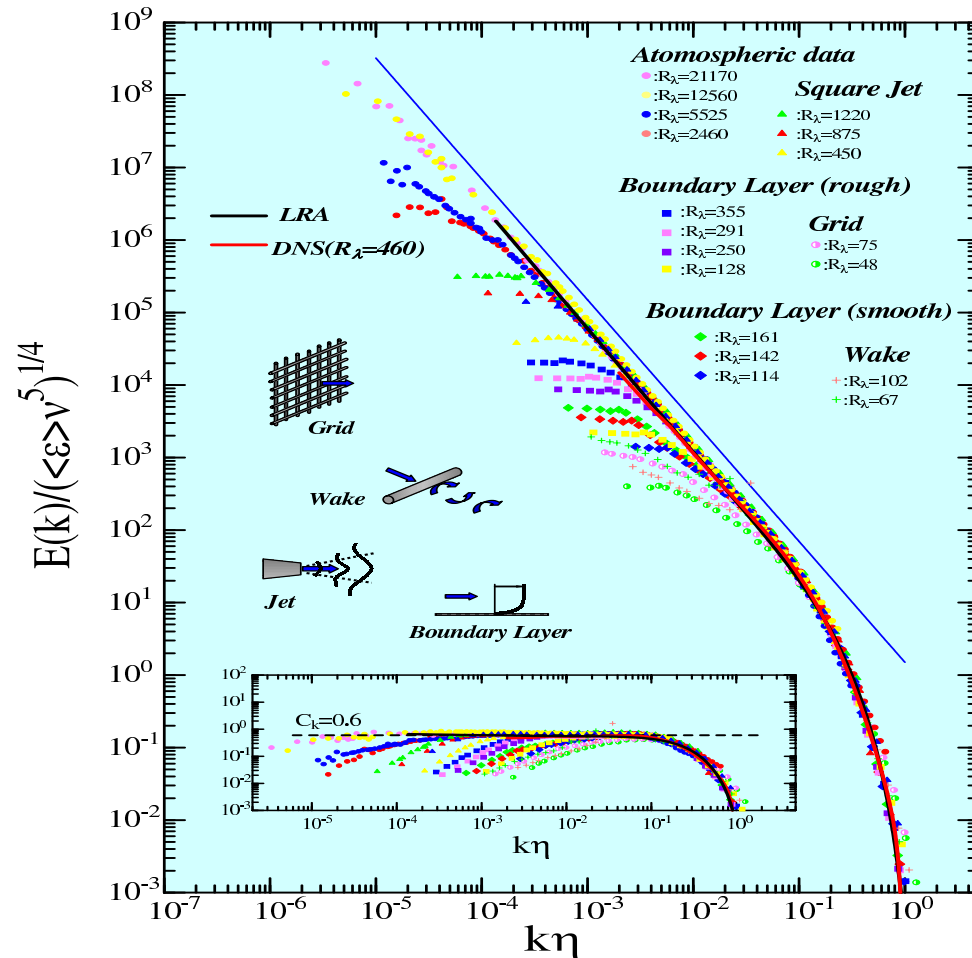
$$S_2(r) = C\epsilon^{2/3}r^{2/3} \ (\eta \ll r \ll L) \quad \Leftrightarrow \quad E(k) = K_o\epsilon^{2/3}k^{-5/3} \ (1/L \ll k \ll 1/\eta).$$

エネルギー流束関数

$$\begin{aligned} \Pi(k) &\equiv - \int_{k' < k} dk' \left. \frac{\partial E(k)}{\partial t} \right|_{NL} \\ &= - \frac{1}{\delta^{(3)}(\mathbf{0})} \int_{k' < k} d^3\mathbf{k}' \int_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}'=\mathbf{k}'} d^3\mathbf{p}' M_{iab}(\mathbf{k}') \langle u_a(\mathbf{p}') u_b(\mathbf{q}') u_i(-\mathbf{k}') \rangle \end{aligned}$$

$$S_3(r) = -\frac{4}{5}\epsilon r \ (\eta \ll r \ll L) \quad \Leftrightarrow \quad \Pi(k) = \epsilon \ (1/L \ll k \ll 1/\eta),$$

2.9 実験による Kolmogorov エネルギースペクトルの検証



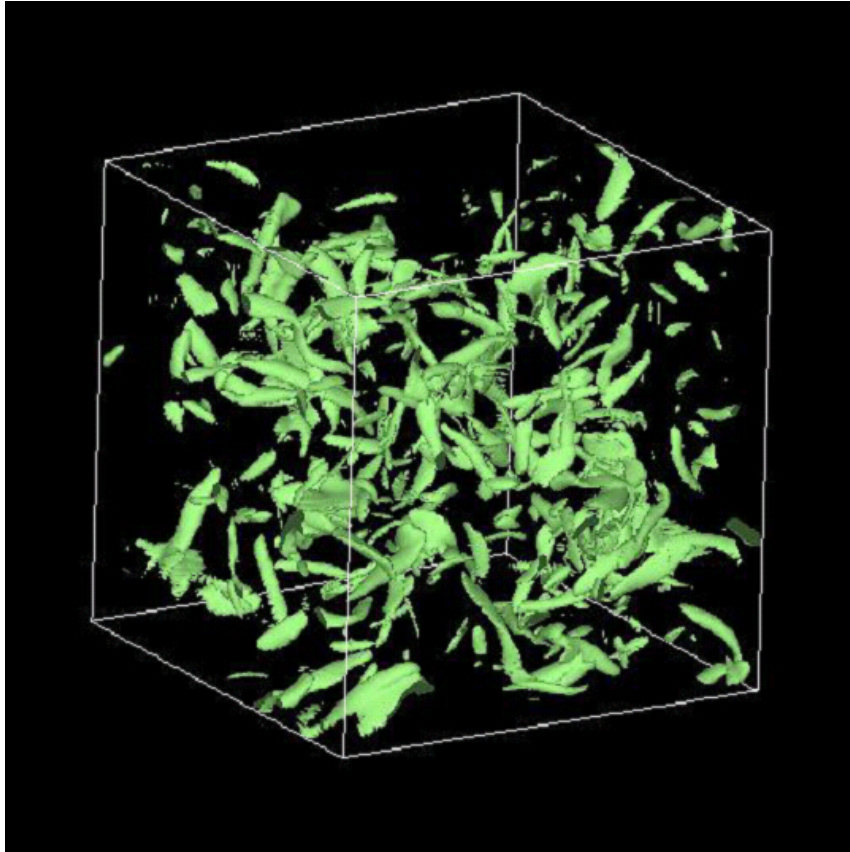
Tsuji, 2002

$$\begin{aligned}
 E_{11}(k_1) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dr \frac{1}{2} Q_{11}(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_1, t; \mathbf{x}, t) e^{-ik_1 r} \\
 &= (\epsilon \nu^5)^{-1/4} f(k_1 \eta) \quad (k_1 \gg 1/L) \\
 &= C_K \epsilon^{2/3} k_1^{-5/3} \quad (1/L \ll k_1 \ll 1/\eta)
 \end{aligned}$$

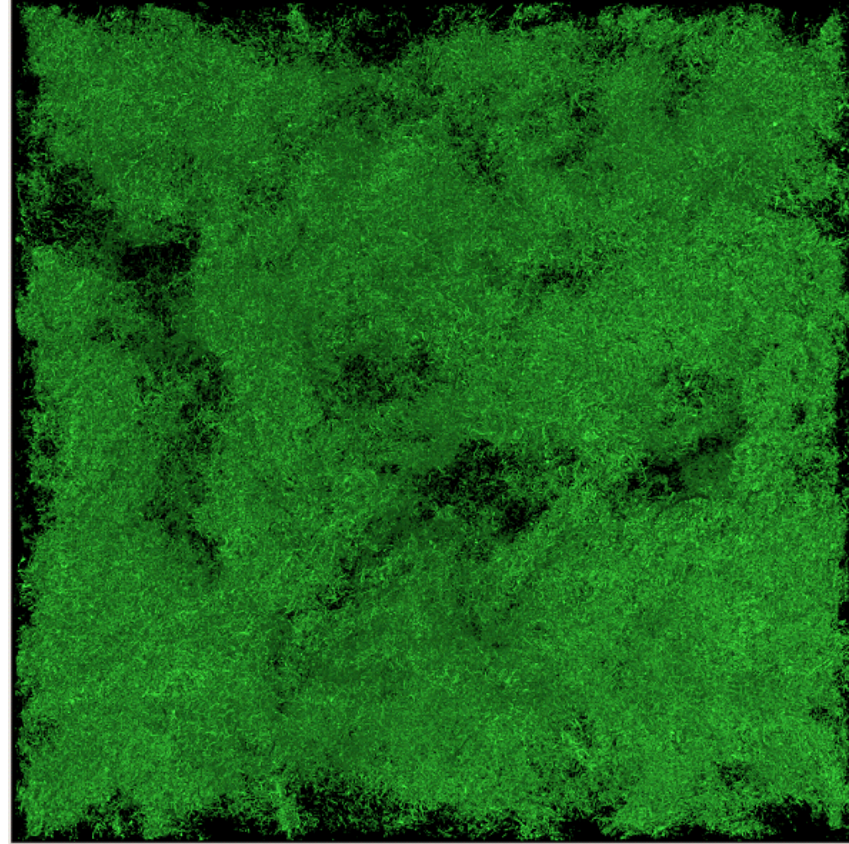
$$C_K \sim 0.6$$

2.10 直接数値シミュレーション

渦度場の可視化



$$N = 128^3, R_\lambda \sim 67$$



$$N = 4096^3, R_\lambda \sim 1201$$

Kaneda *et al.*, 2003

Reynolds number: $R_\lambda = \frac{u_{\text{rms}} \lambda}{\nu}$, Taylor microscale λ : $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{u_{\text{rms}}^2} \left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle$

2.11 規格化されたエネルギー散逸率

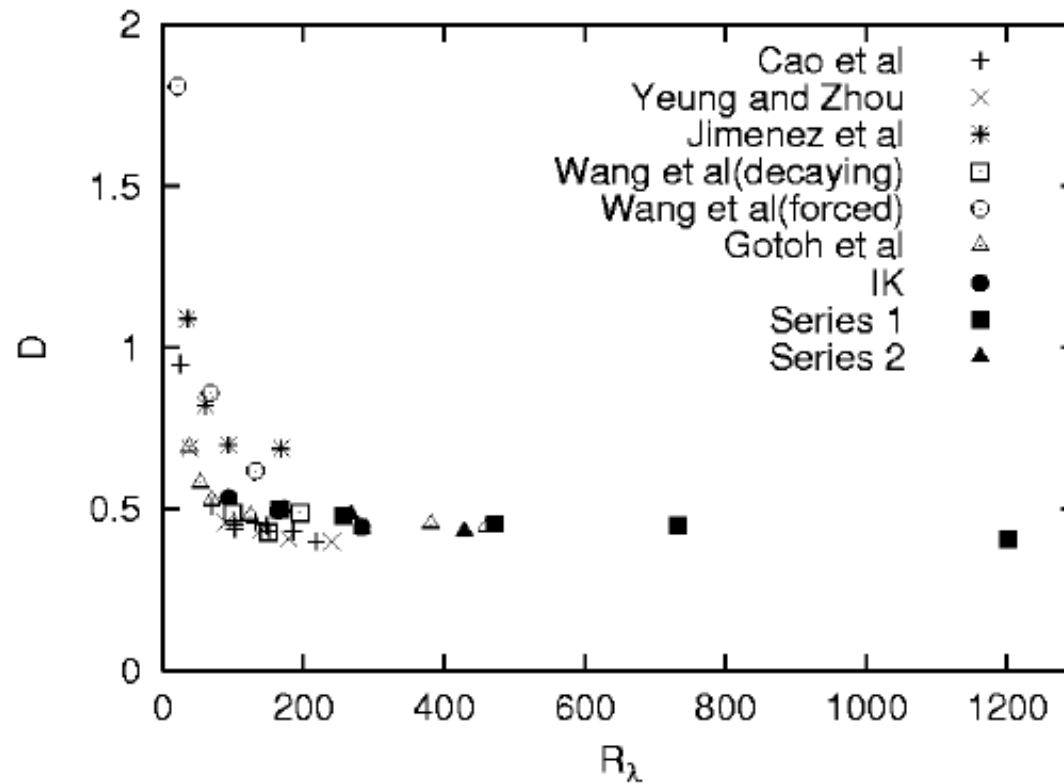


FIG. 3. Normalized energy dissipation rate D versus R_λ from Ref. 5 (data up to $R_\lambda=250$), Ref. 3 ($\triangle, \bullet$), and the present DNS databases ($\blacksquare, \blacktriangle$).

Kaneda *et al.*, 2003

$$\epsilon = D \frac{u_{\text{rms}}^3}{L}$$

$D \rightarrow \text{Const.}$

for

$\nu \rightarrow 0 (R_\lambda \rightarrow \infty)?$

2.12 エネルギー流束関数

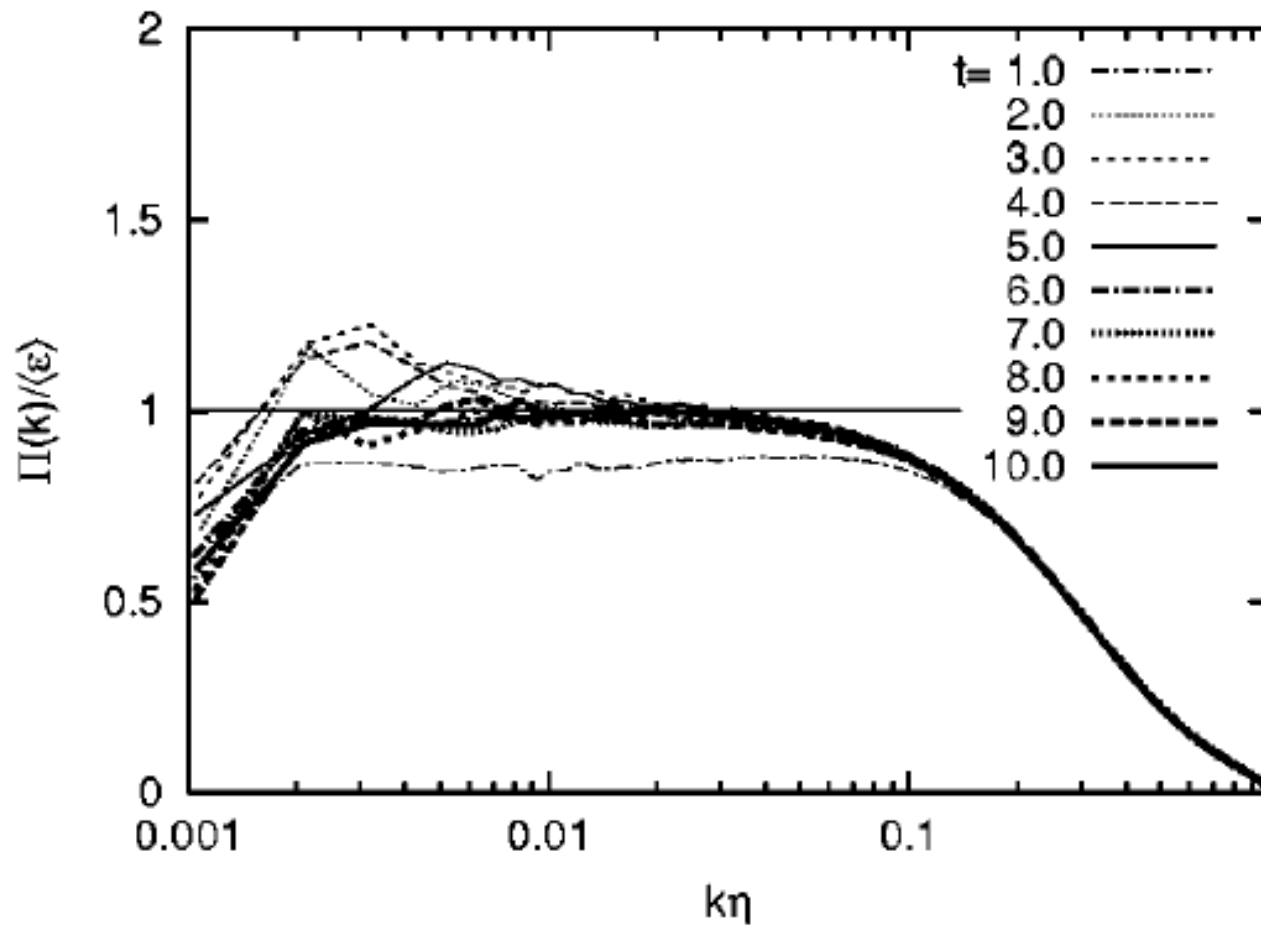


FIG. 4. $\Pi(k)/\langle\epsilon\rangle$ obtained from Run 2048-1.

$$\Pi(k) = \epsilon$$
$$(1/L \ll k \ll 1/\eta)$$

2.13 Kolmogorov の 4/5 則の検証

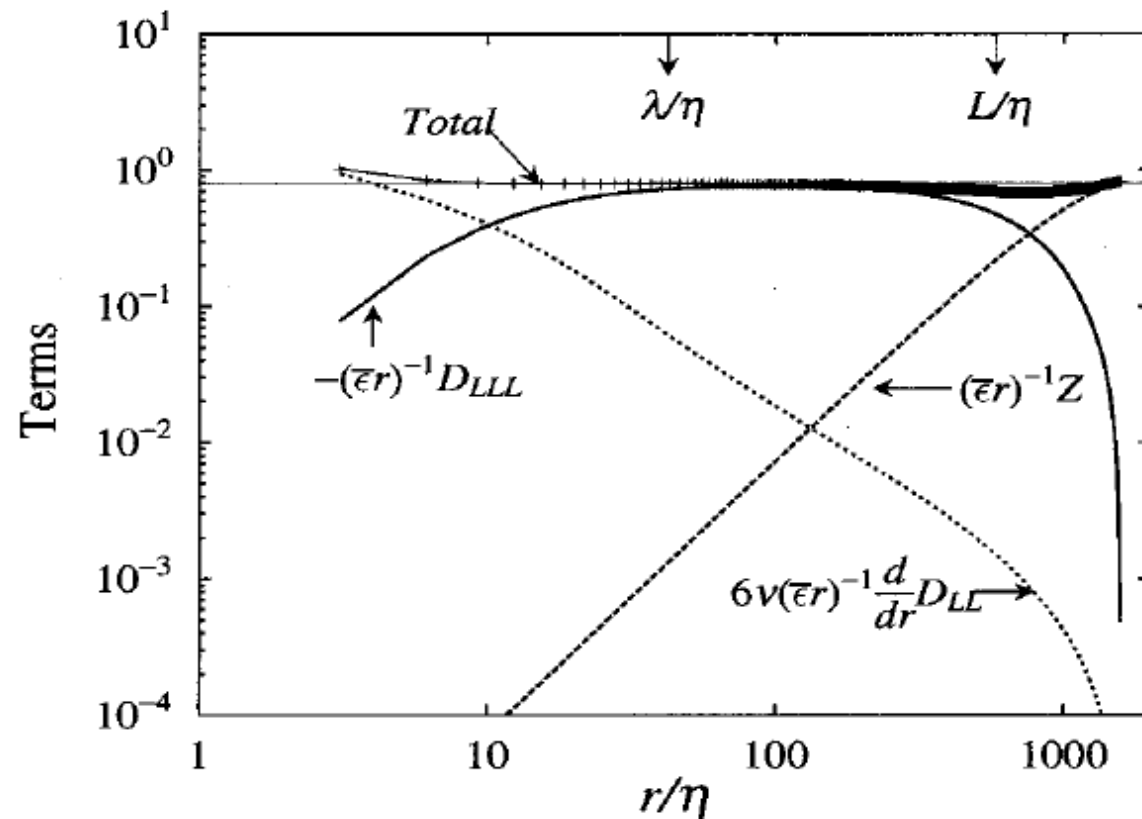


FIG. 11. Terms in the Kármán–Howarth–Kolmogorov equation when $R_\lambda = 460$. Thin solid line: 4/5.

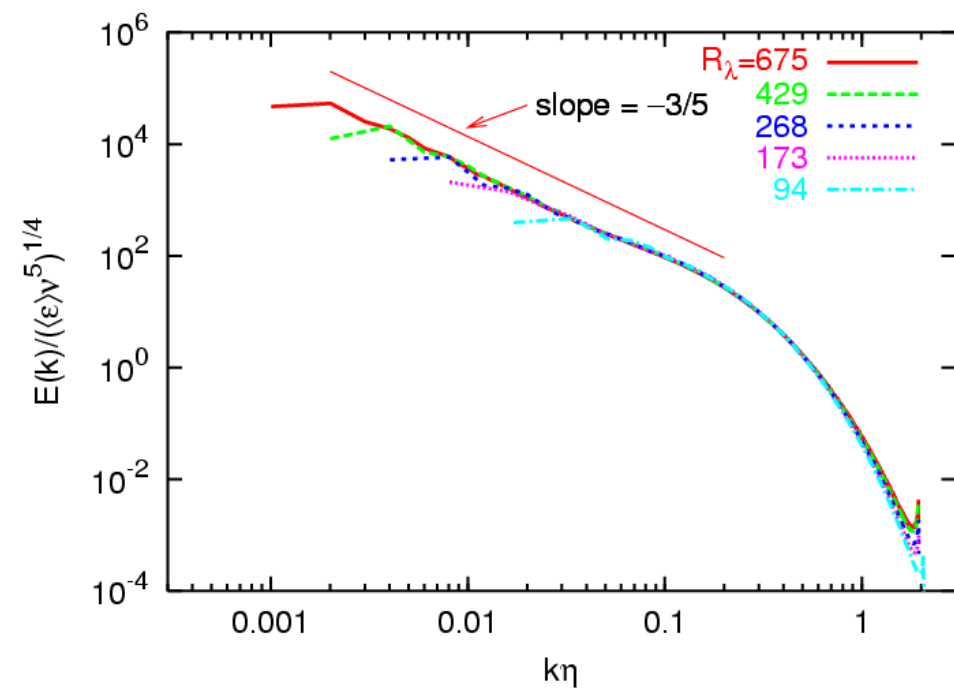
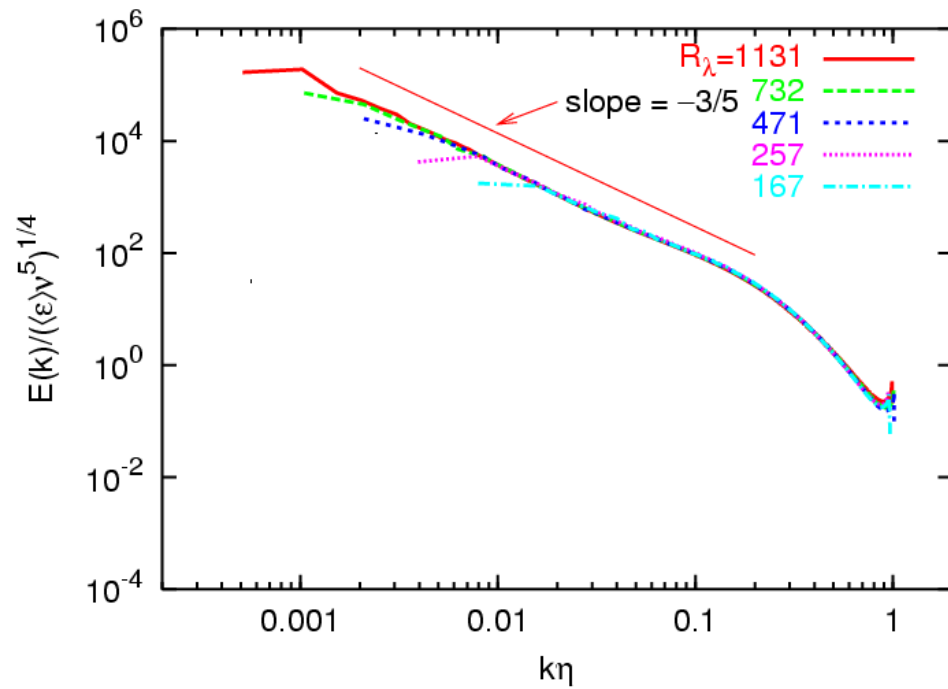
$$-S_3 + 6\nu \frac{\partial S_2}{\partial r} + Z = \frac{4}{5} \epsilon r.$$

Z : 外力関する項

$$-S_3 = \frac{4}{5} \epsilon r.$$

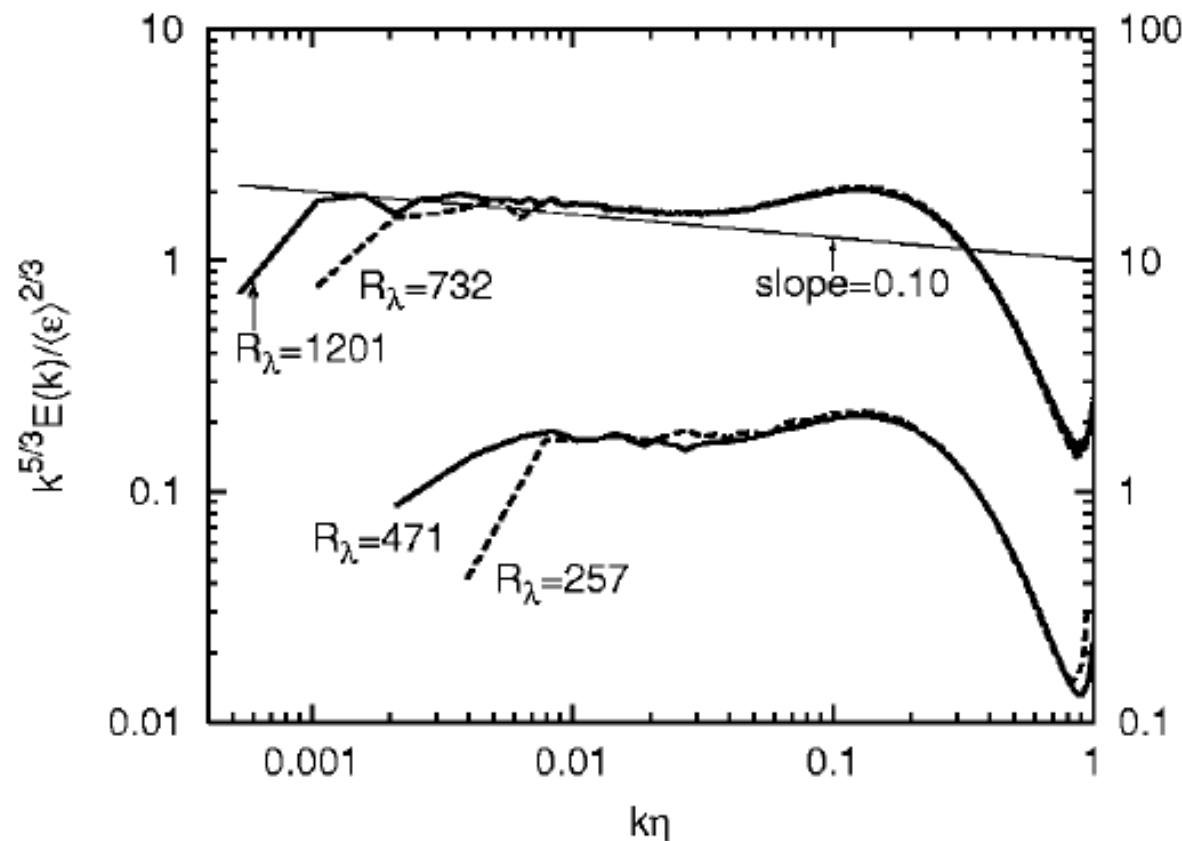
$$(\eta \ll r \ll L)$$

2.14 エネルギースペクトル



$$E(k) = K_o \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (1/L \ll k \ll 1/\eta)$$

2.15 エネルギースペクトル 2



$$E(k) = K_o \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

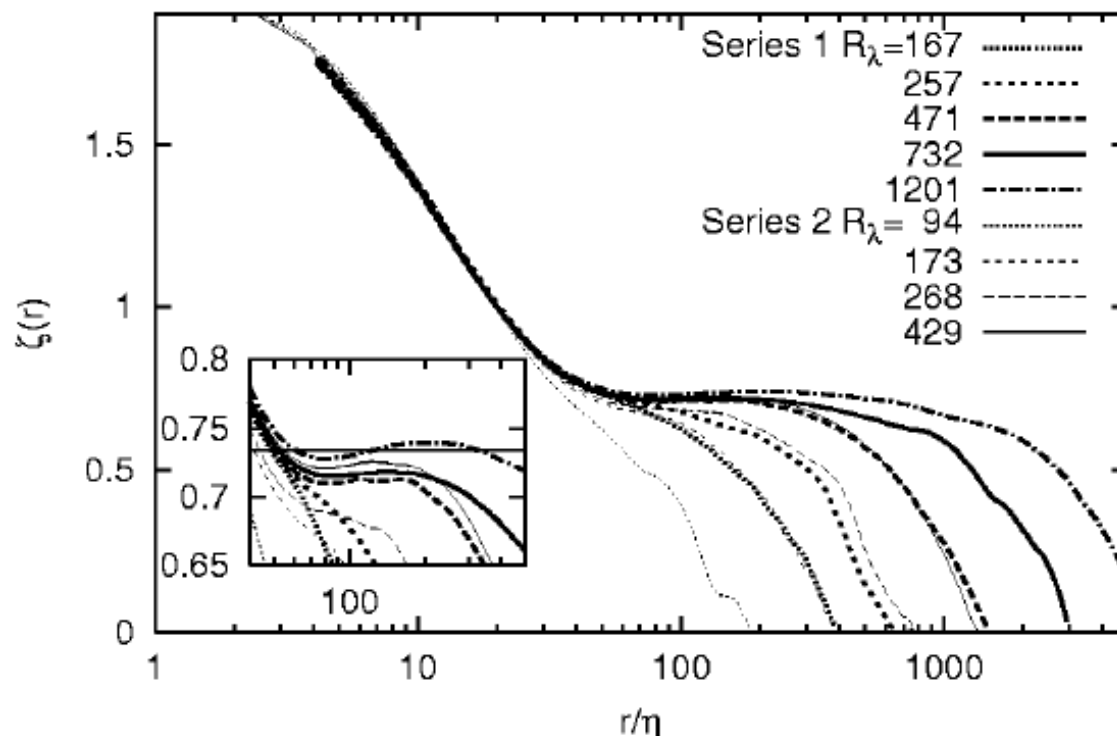
$$(1/L \ll k \ll 1/\eta)$$

補正（異常ス
ケーリング）？

$$E(k) \propto k^{-5/3-\mu_k}$$

FIG. 5. Compensated energy spectra from DNSs with (A) 512^3 , 1024^3 , and (B) 2048^3 , 4096^3 grid points. Scales on the right and left are for (A) and (B), respectively.

2.16 縦速度差 2 次相関



$$S_2(r) = C_2 \epsilon^{2/3} r^{2/3}$$

$$\frac{d(\log S_2(r))}{dr} = \frac{2}{3}$$

$$(\eta \ll r \ll L)$$

補正（異常スケールリング）？

FIG. 6. Local slope $\zeta(r)$ of $f_0(r)$ versus r/η . The inset is an enlargement of the range $40 < r/\eta < 500$. The straight line shows $\zeta(r) = 0.734$.

$$S_2(r) \propto r^{2/3+\mu}$$

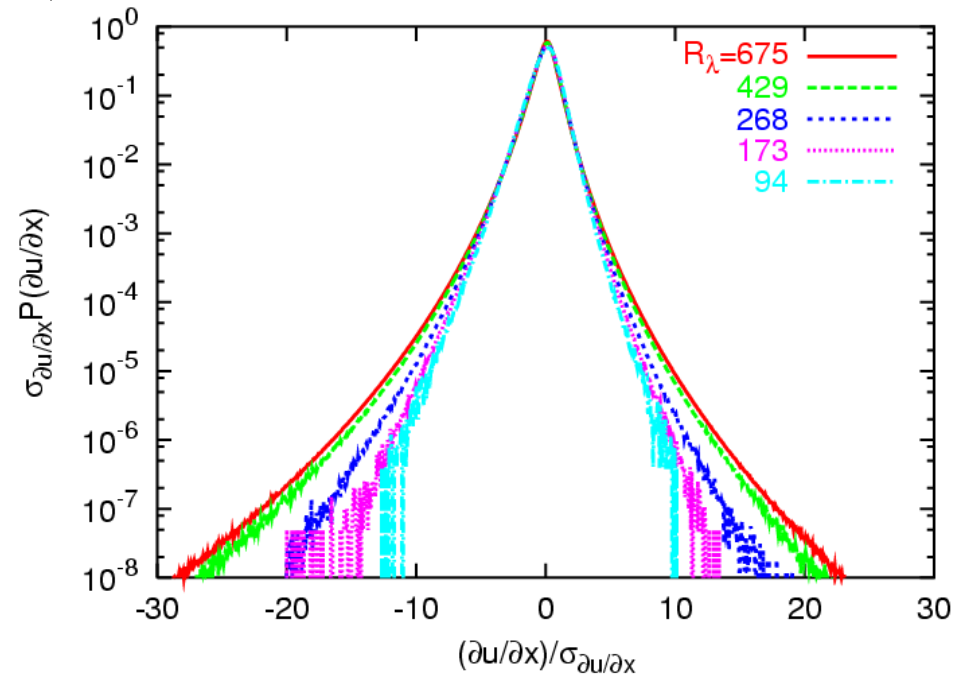
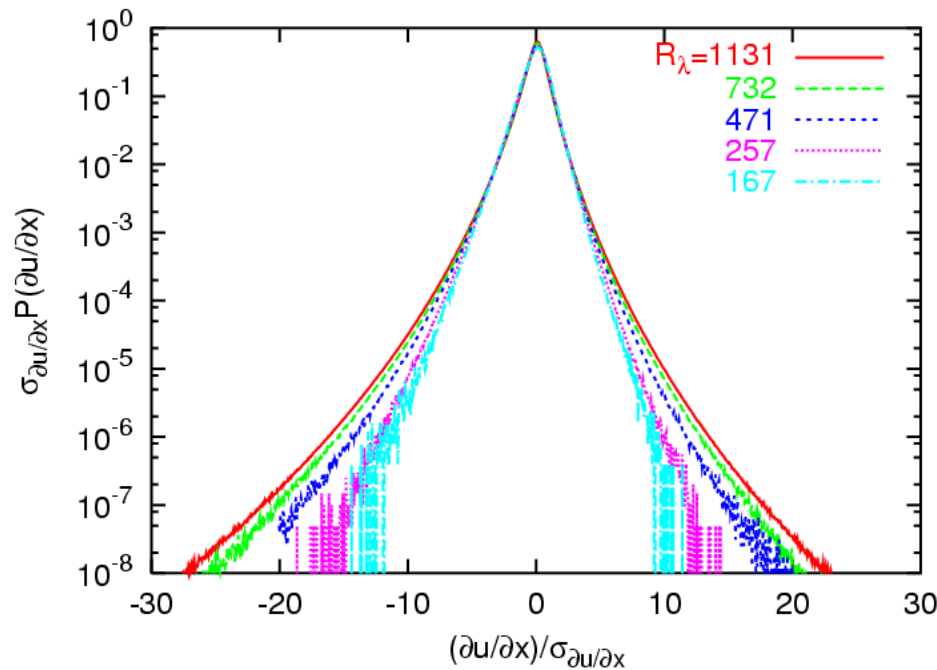
2.17 縦速度微分の確率密度関数

自己相似第 1 仮説より

$$P(\delta u_l; r) = \frac{1}{(\epsilon \nu)^{1/4}} f\left(\frac{\delta u_l}{(\epsilon \nu)^{1/4}}; \frac{r}{\eta}\right) \quad \text{for} \quad r \ll L$$

$$P\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{\epsilon^{1/2} \nu^{-1/2}} g\left(\frac{1}{\epsilon^{1/2} \nu^{-1/2}} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)$$

f, g は普遍関数



2.18 縦速度差の高次モーメント

Kolmogorov 自己相似仮説より: $S_p(r) = C_p \epsilon^{p/3} r^{p/3}$

異常スケーリング (間欠性)? $S_p(r) \propto r^{\zeta_p}, \quad \zeta_p \neq \frac{p}{3}$

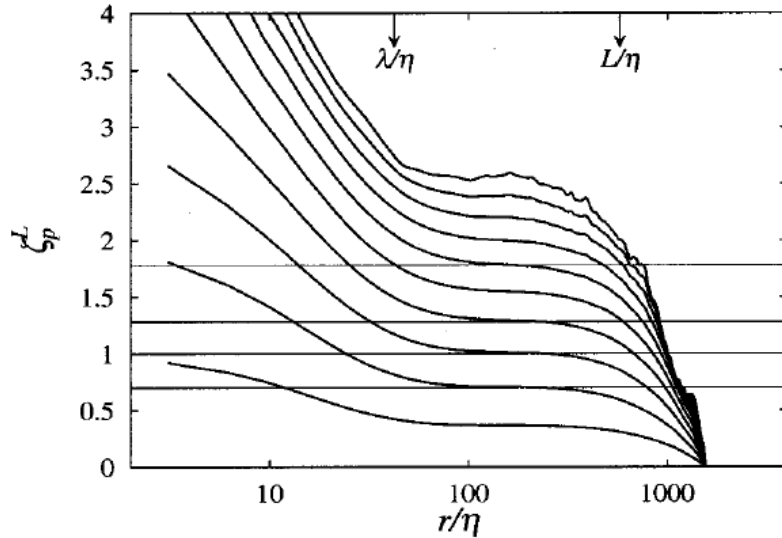


FIG. 28. Variation of the local scaling exponents $\zeta_p^L(r)$ with r/η for various orders. $R_\lambda = 460$. The curves represent $p = 1, 2, \dots, 10$ (from the lowermost) in the scaling range. Horizontal lines show the values obtained by She and Lévéque, 0.696, 1.0, 1.28, and 1.78.

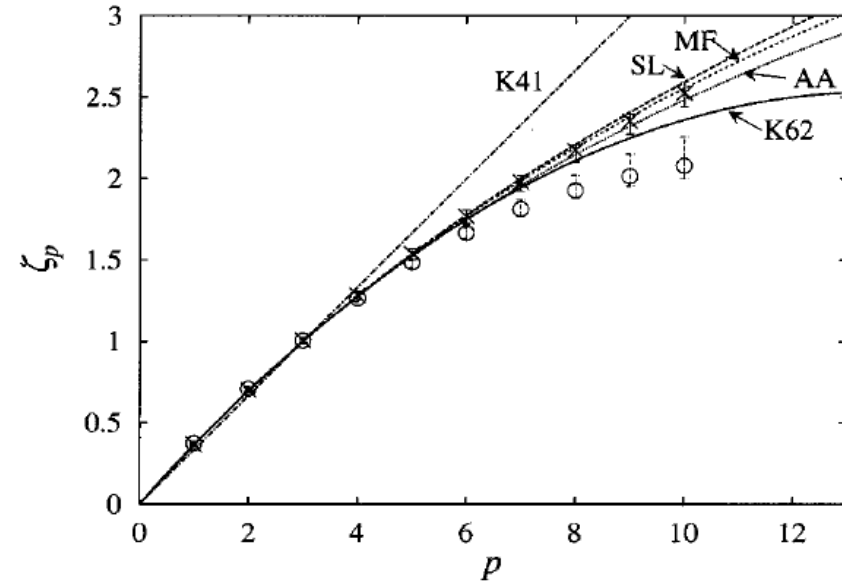


FIG. 32. Variation of the scaling exponents ζ_p^L and ζ_p^T when $R_\lambda = 460$. Symbols are the results of the present DNS, star: ζ_p^L , circle: ζ_p^T . SL, MF, AA, and K62 are the curves by She and Lévéque model (Ref. 70), Yakhot's mean field theory (Ref. 72), Arimitsu and Arimitsu's generalized entropy theory with $\mu=0.25$, and K62 with $\mu=0.25$, respectively.

2.19 Kolmogorov1941 のまとめ

- 局所一様等方性仮説の導入 → 乱流統計に普遍性の存在を示唆
- エネルギー散逸率 ϵ の重要性を示唆 → 現象論の大きな一歩
- 自己相似仮説は正しくなさそう
 - しかし、その 2 次モーメントに関する結論は、ほぼ正しそう

その後の発展

- 高次モーメントの異常スケーリングに関する現象論
 - 対数正規モデル (Kolmogorov, 1962)
- Navier-Stokes 方程式を基礎とする統計力学
 - 2 点完結近似 (Kraichnan, 1958, 1965)

3 他系への乱流統計理論の応用

3.1 非平衡系の1クラス

- 大自由度（多スケール）
- 外力と散逸のスケールが分離していて、スケール空間（波数空間）でのエネルギー流束がある。
- プラズマ乱流
 - 電磁流体（MHD）乱流：太陽風、太陽表面、地球内部ダイナモ、核融合炉の大スケール。
- 量子流体乱流
 - 液体ヘリウムの超流動相、Bose-Einstein 凝縮体
- 自己重力多体系
 - 宇宙の大規模構造（泡構造）

3.2 電磁流体乱流

- 流体と電磁場の相互作用.

$$\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i = B_j \partial_j B_i - \partial_i P + \nu_u \partial_j \partial_j u_i,$$

$$\partial_i u_i = 0,$$

$$\partial_t B_i + u_j \partial_j B_i = B_j \partial_j u_i + \nu_B \partial_j \partial_j B_i,$$

$$\partial_i B_i = 0,$$

$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$:磁場、 ν_B :磁気拡散係数

- (磁力線の張力による) Alfvén 波の効果
- $E(k) \sim k^{-5/3}$ か $E(k) \sim k^{-3/2}$ か?

3.3 量子流体乱流

- 低温の液体ヘリウム超流動, Bose-Einstein 凝縮体 (BEC) の乱流.
- 循環の量子化された渦糸

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \mu \right) \psi + g|\psi|^2 \psi, \quad (1)$$

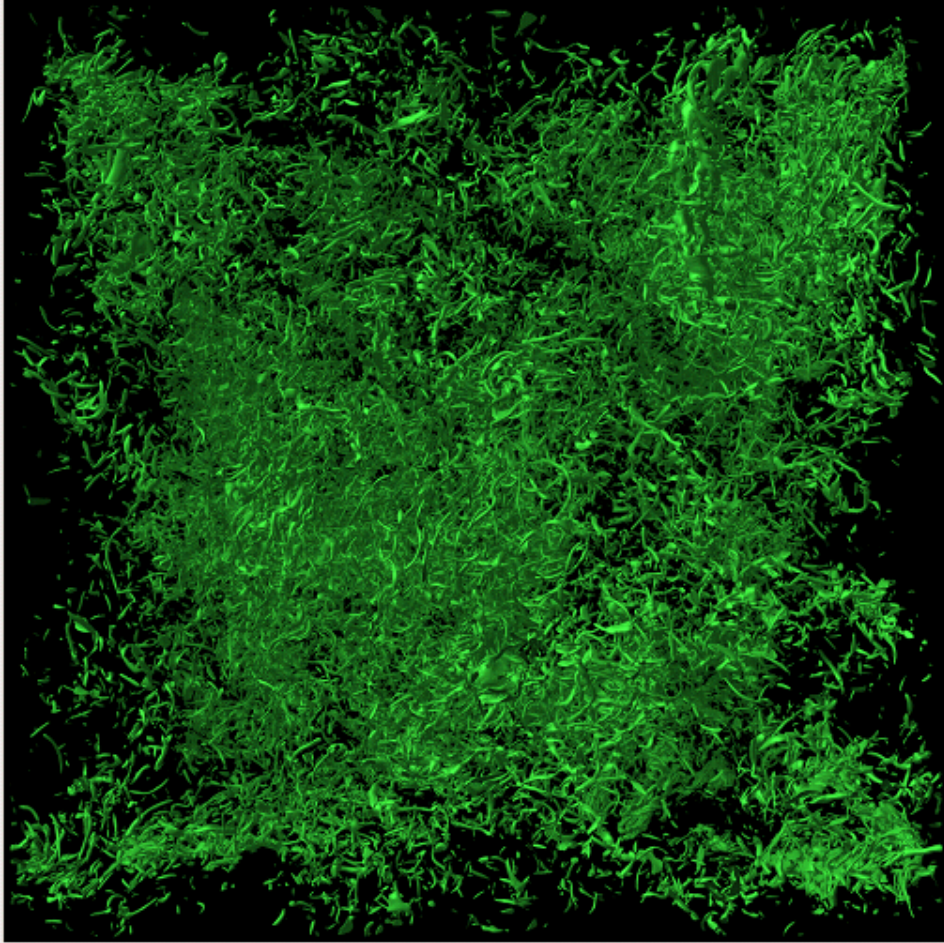
$$\psi = \sqrt{\rho/m} e^{i\varphi}, \quad \mathbf{v} := (\hbar/m) \nabla \varphi.$$

$\rho(\mathbf{x}, t)$: 凝縮体密度場, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$: 凝縮体速度場

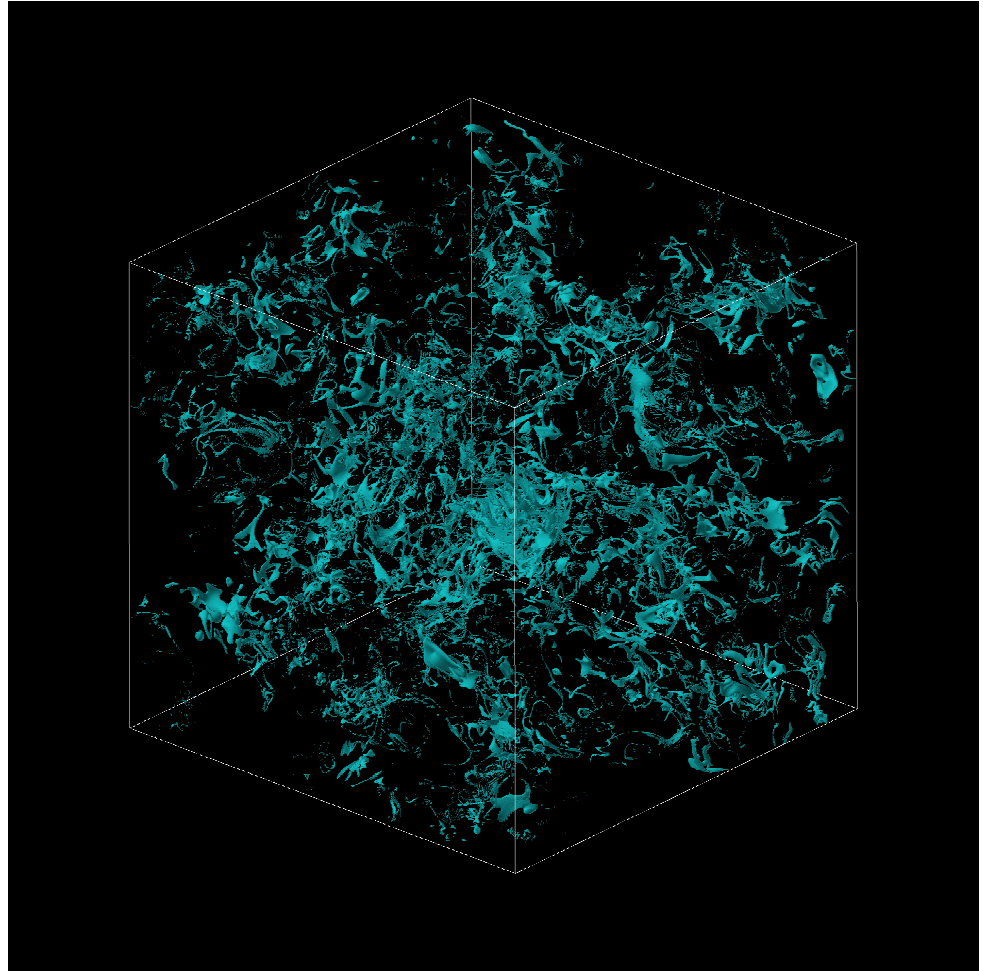
- 超流動ヘリウムの実験では $E(k) \propto k^{-5/3}$ が観測されたとの報告がある。

3.4 量子流体乱流の数値シミュレーション

古典流体乱流



量子流体乱流



Ishihara *et al.*

3.5 自己重力多体系

- 宇宙の大規模構造（泡構造）
- 圧力場は無し。重力ポテンシャルの勾配を区動力にする流体系で近似。

自己重力多体系シミュレーションの動画

<http://www.mpa-garching.mpg.de/Virgo/>