乱流における小スケール統計の普遍性

吉田 恭

筑波大学大学院数理物質科学研究科

0. 乱流統計の普遍性

1. 非等方撹乱に対する乱流統計の普遍性

2. 大スケールデータ同化による小スケールの再生

0　乱流統計の普遍性

Leonardo da Vinci (1513)

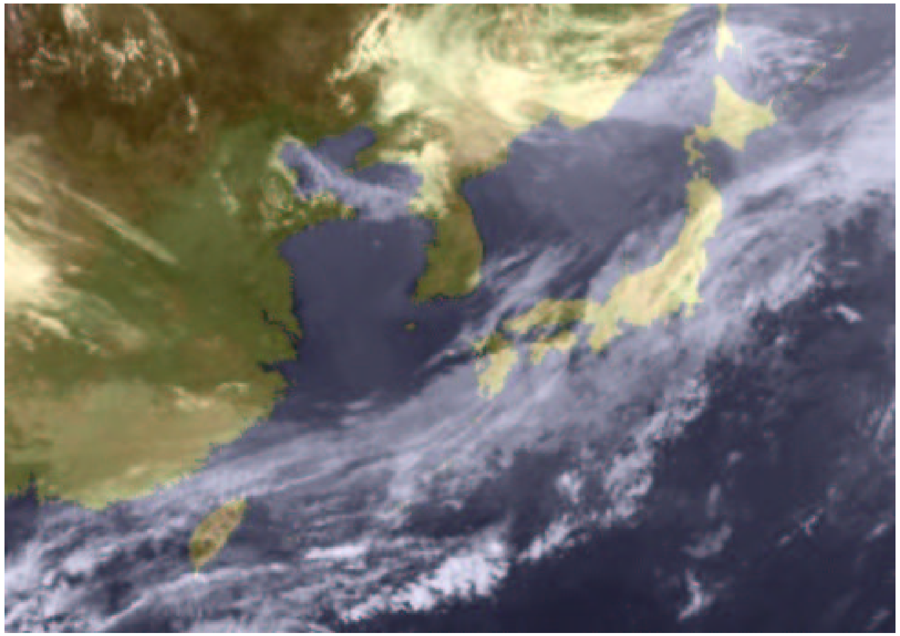
- 主流と揺らぎの存在

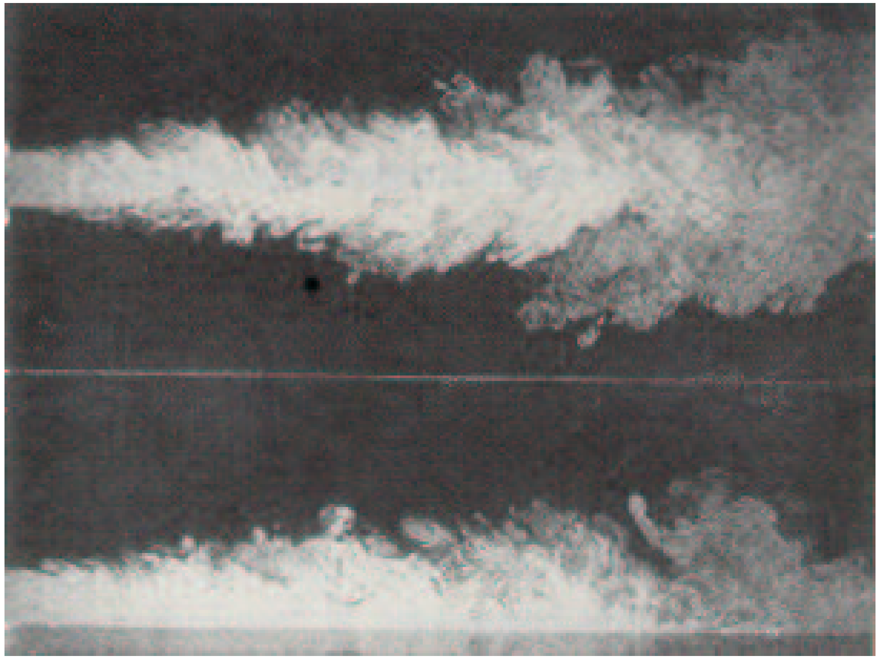
  "Observe the motion of the surface of the water, which resembles that of hair, which has two motions, of which one is caused by the weight of the hair, the other by the direction of the curls; thus the water has eddying motions, one part of which is due to the principal current, the other to random and reverse motion. "

- 多スケールの渦の存在

  "... the smallest eddies are almost numberless, and large things are rotated only by large eddies and not by small ones, and small things are turned by small eddies and large."

0.2　様々な乱流





0.3　Navier-Stokes 方程式

- 理想流体の Euler 方程式
- Navier-Stokes 方程式（Navier, 1821,22）

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u},$$

非圧縮条件

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0.$$

$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$: 速度場 , $p(\mathbf{x},t)$: 圧力場 , $\rho(\mathbf{x},t)$: 密度場 , ν: 動粘性係数

- 流体力学の発展（工学・航空分野など）
- 非線形偏微分方程式の理論・弱解の概念（Leray, 1934）
  - 大域的な滑らかな解の存在または解の爆発の証明は未解決問題
    - 7 つミレニアム懸賞問題の一つ（Clay Math. Inst., 2000）

0.4　乱流理論の幕開け

- 乱流のカスケード描像（Richardson, 1922）

  Big whorls have little whorls
  That feed on their velocity,
  And little whorls have lesser whorls
  And so on to viscosity.

- 一様等方性乱流の統計理論（Kolmogorov, 1941, 1962）
  - 高 Reynolds 数乱流の小スケールの統計の普遍則
- 完結近似（Kraichnan, 1958, 1965）
  - Navier-Stokes 方程式に基づく場の理論的解析
- 間欠性（intermittency）（Kolmogorov, 1962）
  - 高次モーメントの統計，現象論

0.5 乱流理論の周辺

- 観測による理論の検証

  潮流の観測（Grant *et al.*, 1962）

- カオス（Lorentz, 1963）
- フラクタル（Mandelbrot, 1974）

> “The central problem that people need to solve is not the problem of elmentary particles or unified field; this is the problem of turbulence ... the last great unsolved problem of classical physics. ”
>
> — Feynman（1969）

大自由度，非線形，非平衡系の統計力学

- 計算科学的手法
  - 直接数値シミュレーション（格子点数 4096^3），（Kaneda *et al.*, 2003）

0.6 Kolmogorov の一様等方性乱流の理論（K41）

- 局所一様等方性の仮説
十分高 Reynolds 数乱流の，境界などから十分離れた十分小さい領域において，速度差
$$\mathbf{w}(\mathbf{y}, s) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}, t_0 + s) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0)$$
の統計は一様等方である．

- 第 1 仮説
一様等方性乱流において，その統計は ν と ϵ によって決定される．

Kolmogorov 長さスケール: $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}$, 時間スケール: $\sigma = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2}$

- 第 2 仮説 $|\mathbf{y}|, |\mathbf{y} - \mathbf{y}'| \gg \eta$ なら, 統計は ν に依らず ϵ のみで決定される．

0.7 K41 のスケーリング則

縦速度相関関数のスケーリング則

$$\boxed{S_n(r) \equiv \langle [w_1(r,0,0)]^n \rangle = C_n \epsilon^{n/3} r^{n/3} \qquad (\eta \ll r \ll L)}$$

cf. Kolmogorov の 4/5 則: $S_3(r) = -\frac{4}{5}\epsilon r. \qquad (\eta \ll r \ll L)$

エネルギースペクトル

$$E(k,t) \equiv \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}'_{|\mathbf{k}'|=k} Q_{ii}(\mathbf{k}', t, t).$$

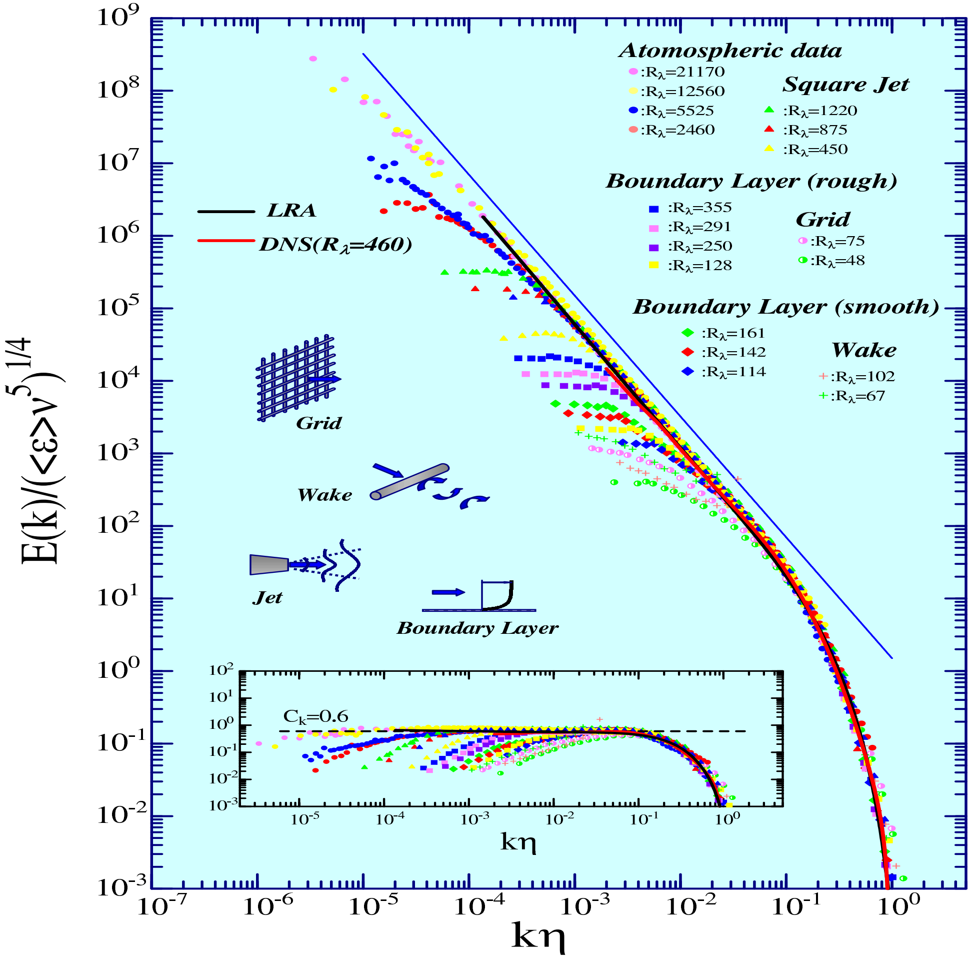
ただし、

$$Q_{ij}(\mathbf{k}, t, t') \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{x} \langle \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{u}_j(-\mathbf{k}, t') \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}$$

Kolmogorov の $-5/3$ 乗エネルギースペクトル

$$\boxed{E(k) = K_o \epsilon^{2/3} k^{-5/3} (1/L \ll k \ll 1/\eta).}$$

0.8 実験による Kolmogorov エネルギースペクトルの検証



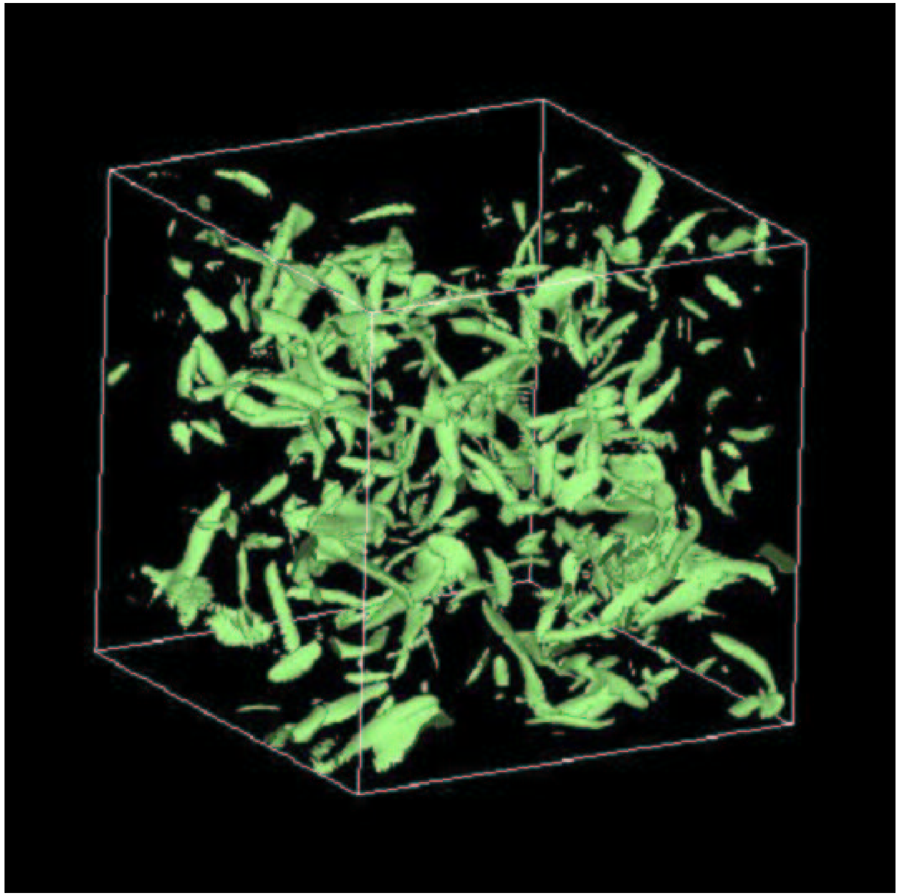
$$
\begin{aligned}
& E_{11}(k_1) \\
= \quad & \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dr \frac{1}{2} Q_{11}(\mathbf{x}+r\mathbf{e}_1, t; \mathbf{x}, t) e^{-ik_1 r} \\
= \quad & (\epsilon\nu^5)^{-1/4} f(k_1\eta) \quad (k_1 \gg 1/L) \\
= \quad & C_K \epsilon^{2/3} k_1^{-5/3} \quad (1/L \ll k_1 \ll 1/\eta)
\end{aligned}
$$

$$C_K \sim 0.6$$

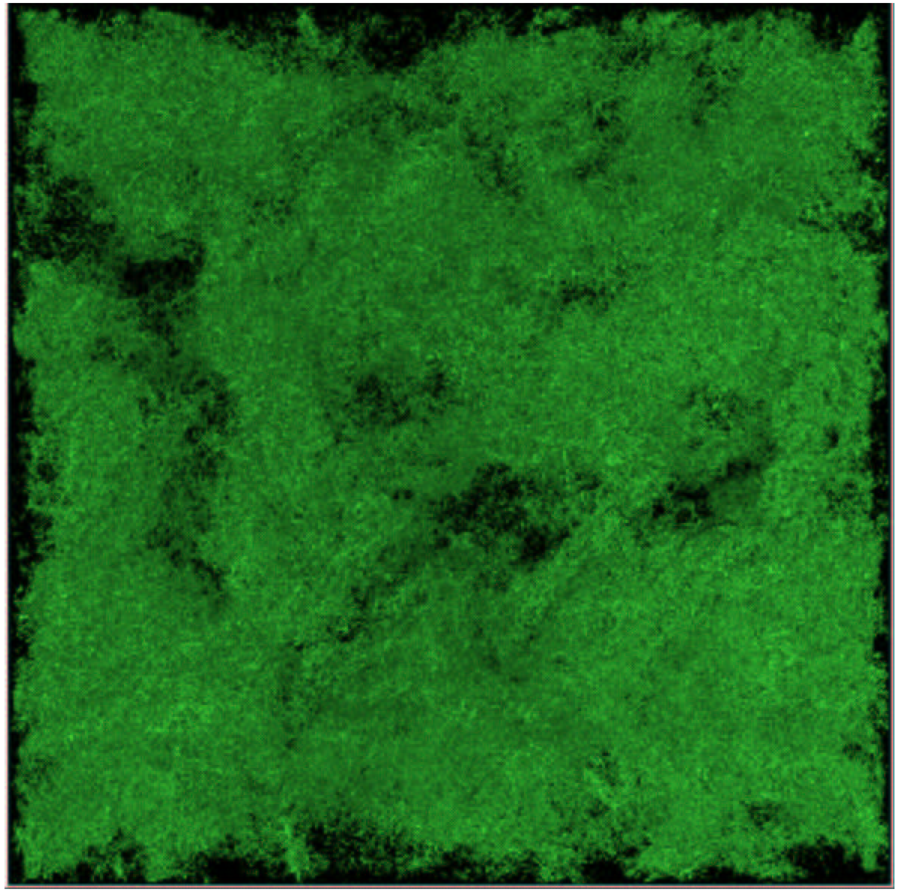
Tsuji, 2002

0.9 直接数値シミュレーション

渦度場の可視化



$N = 128^3, R_\lambda \sim 67$

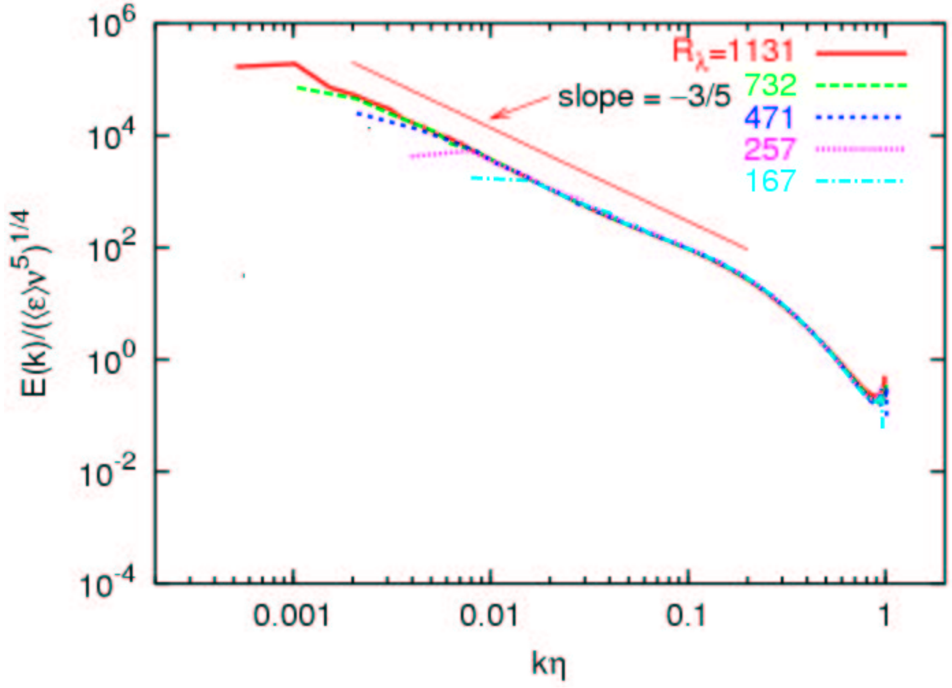


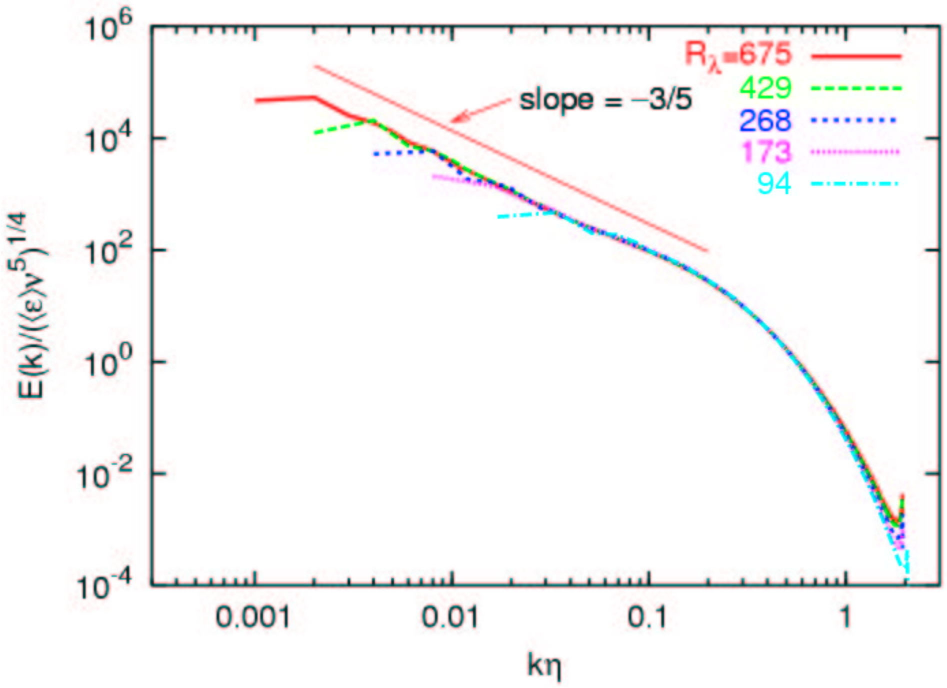
$N = 4096^3, R_\lambda \sim 1201$

Kaneda *et al.*, 2003

Reynolds number: $R_\lambda = \frac{u_{\mathrm{rms}}\lambda}{\nu}$, Taylor microscale λ: $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{u_{\mathrm{rms}}^2}\left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 \right\rangle$

0.10 エネルギースペクトル





$$E(k) = K_o \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (1/L \ll k \ll 1/\eta)$$

0.11 エネルギースペクトル 2

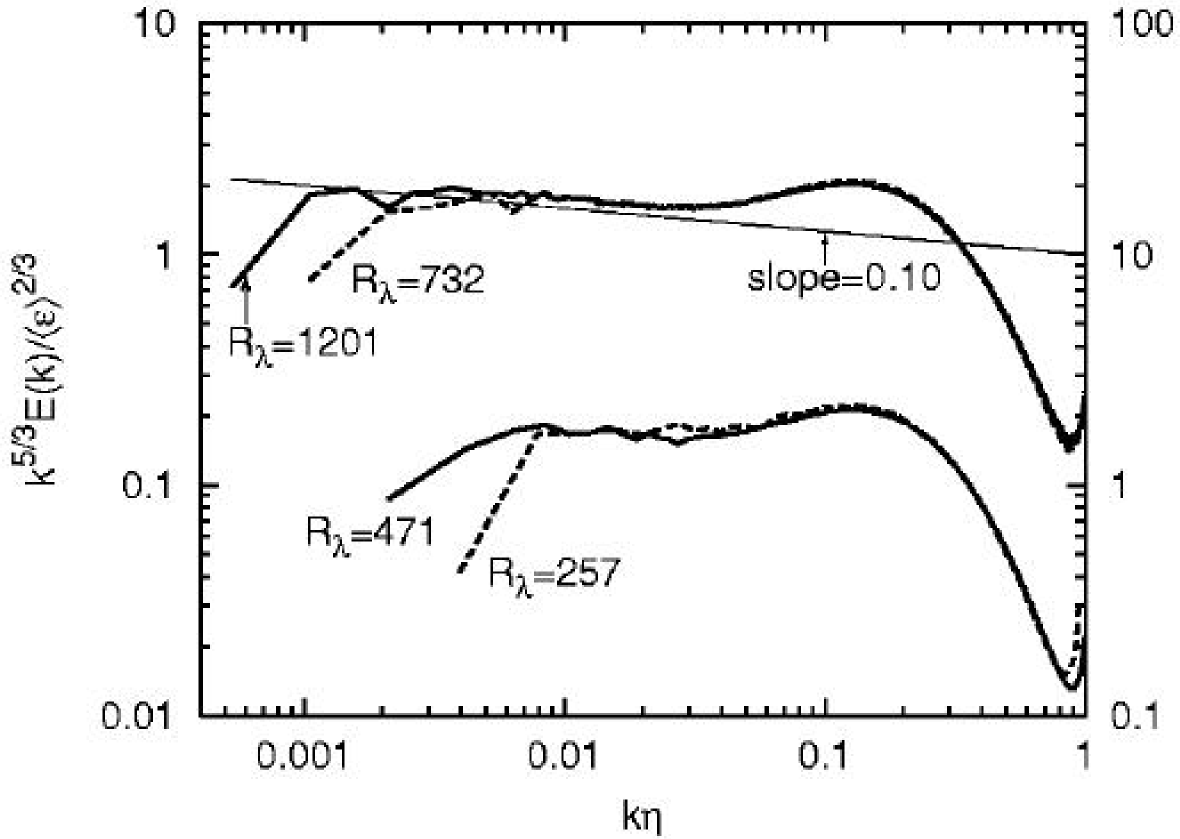


FIG. 5. Compensated energy spectra from DNSs with (A) 512^3, 1024^3, and (B) 2048^3, 4096^3 grid points. Scales on the right and left are for (A) and (B), respectively.

$$E(k) = K_o \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

$$(1/L \ll k \ll 1/\eta)$$

補正（異常スケーリング）？

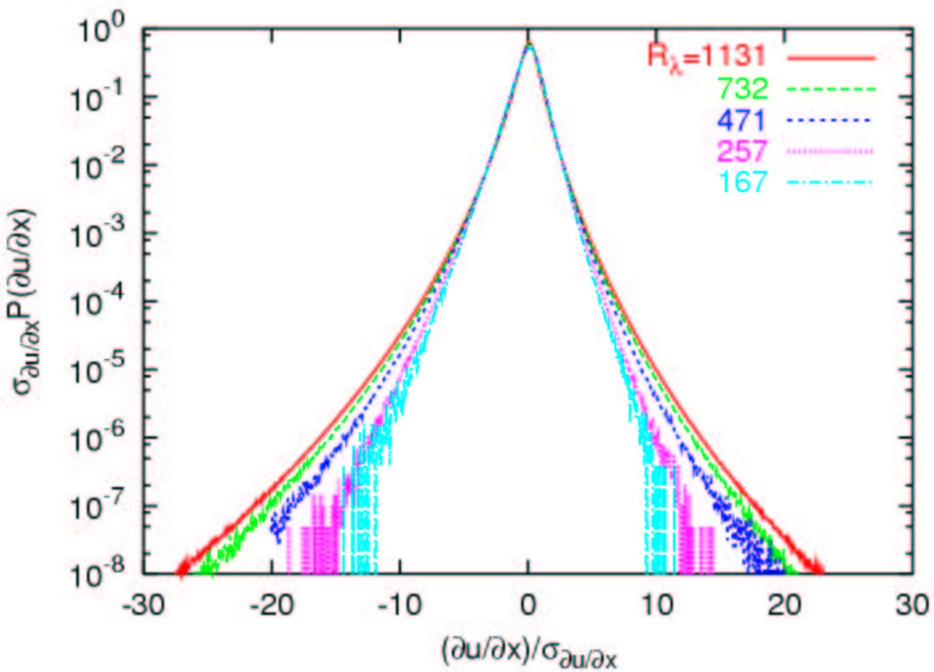
$$E(k) \propto k^{-5/3-\mu_k}$$

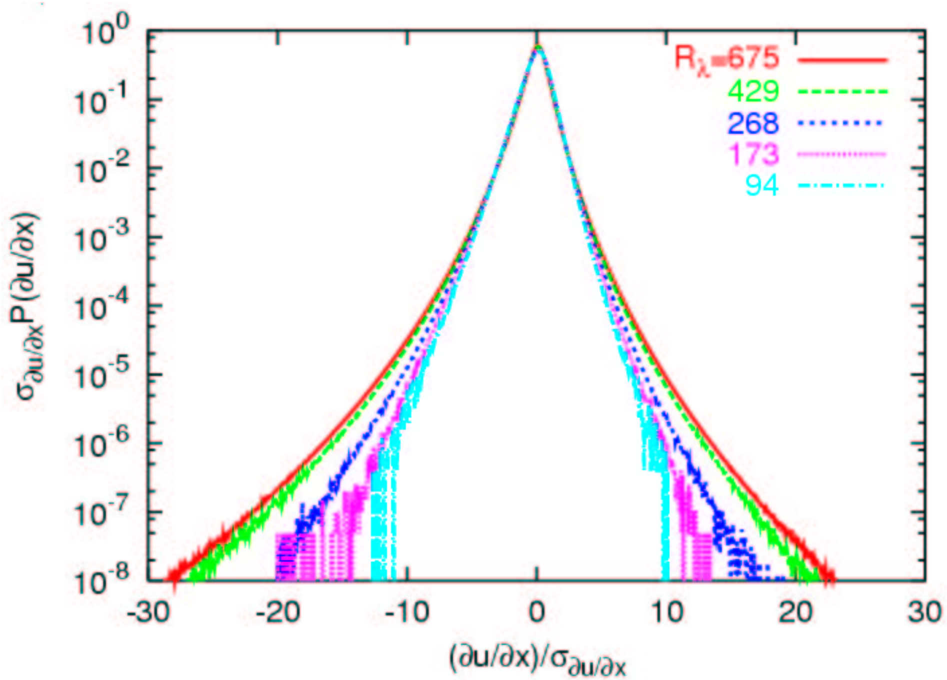
自己相似第 1 仮説より

$$P(\delta u_l; r) = \frac{1}{(\epsilon\nu)^{1/4}} f\left(\frac{\delta u_l}{(\epsilon\nu)^{1/4}}; \frac{r}{\eta}\right) \qquad \text{for} \qquad r \ll L$$

$$P\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{\epsilon^{1/2}\nu^{-1/2}} g\left(\frac{1}{\epsilon^{1/2}\nu^{-1/2}}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)$$

f, g は普遍関数





0.13 Kolmogorov1941のまとめ

- 局所一様等方性仮説の導入 $\longrightarrow$ 乱流統計に普遍性の存在を示唆
- エネルギー散逸率 ϵ の重要性を示唆 $\longrightarrow$ 現象論の大きな一歩
- 自己相似仮説は正しくなさそう
  - しかし、その2次モーメントに関する結論は、ほぼ正しそう

その後の発展

- 高次モーメントの異常スケーリングに関する現象論
  - 対数正規モデル（**Kolmogorov, 1962**）
- Navier-Stokes 方程式を基礎とする統計力学
  - 2点完結近似（**Kraichnan, 1958, 1965**）

0.14 乱流理論は何処へいく？

- お手本としての「熱力学」と「統計力学」（平衡系）

熱力学

系の平衡状態の性質は

$$F(T,V,N)$$

によって完全に記述される.

統計力学

系のミクロな性質（**Hamiltonian**）とマクロな平衡状態の性質を結びつける.

$$\begin{aligned} F(T,V,N) &= -kT\log Z(T,V,N) \\ Z(T,V,N) &= \sum_l \exp\left(-\frac{E_l(V,N)}{kT}\right) \end{aligned}$$

- 乱流理論

状態を決める量は何か？

- **Kolmogorov** の理論？
- 間欠性？

Navier-Stokes 方程式と統計を結びつける

- 完結近似？

1　非等方撹乱に対する乱流統計の普遍性

Ishihara, Yoshida, and Kaneda, Phys. Rev. Lett. 88 (2002), 154501
Yoshida, Ishihara, and Kaneda, Phys. Fluids 15 (2003), 2385
Kaneda and Yoshida, New J. Phys. 6 (2004), 34

1.1　乱流の小スケールの普遍性と大スケールの非普遍性

- 境界から十分離れた領域, 外力注入スケールより十分小スケールでは, 統計的に普遍的な性質があると期待されている.
  - 一様等方性乱流
- 現実の乱流の Reynolds 数は 有限 .
  - 小スケールにおいても, 外力, 境界条件等の影響は 有限 .
  - 大スケールの非普遍性の例：剪断流、成層、回転

1.2　微小撹乱への応答

- 平衡状態の普遍則
- 撹乱への応答 $\rightarrow$ 平衡状態を反映する普遍則
  - Hooke の法則（1 次元）：　$x = \frac{1}{k}F$
  - Ohm の法則：　$I = \frac{1}{R}E$
  - Newton 流体：　$\boxed{\sigma_{ij} = c_{ijmn}S_{mn}}$,　$S_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

1.3　一様剪断乱流

速度場

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\rangle + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t), \qquad \langle u_i(\mathbf{x},t)\rangle = S_{ij}x_j, \qquad (S_{ii}=0)$$

基礎方程式

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} = -\tilde{u}_j\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \boxed{-S_{jm}x_m\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - S_{ij}\tilde{u}_j} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu\nabla^2\tilde{u}_i$$

(u_ℓ の非線形相互作用) : (u_ℓ と S の双線形相互作用)

$$= u_\ell^2/\ell : \boxed{Su_\ell} = 1 : \boxed{\delta_\ell}, \qquad \delta_\ell \equiv S\ell/u_\ell$$

速度相関スペクトルテンソル

$$Q_{ij}(\mathbf{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{r}\langle \tilde{u}_i(\mathbf{x}+\mathbf{r},t)\tilde{u}_j(\mathbf{x},t)\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$Q_{ij}(\mathbf{k}) = Q_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}) + \Delta Q_{ij}(\mathbf{k}),$$

$$\boxed{\Delta Q_{ij}(\mathbf{k}) = Q_{ijmn}^{(1)}(\mathbf{k})S_{mn} + \cdots}.$$

1.4　非等方スペクトル

$$Q^{(1)}_{ijmn}(\mathbf{k}) = a_1(k)[P_{im}(\mathbf{k})P_{jn}(\mathbf{k}) + P_{in}(\mathbf{k})P_{jm}(\mathbf{k})] + a_2(k)P_{ij}(\mathbf{k})\hat{k}_m\hat{k}_n,$$

$$P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j, \qquad \hat{k}_i = k_i/k$$

Kolmogorov のスケーリング

$$Q^{(0)}_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{K_o}{4\pi}\epsilon^{2/3}k^{-11/3}P_{ij}(\mathbf{k}),$$

K_o: Kolmogorov 定数

$$a_1(k) = A_1\epsilon^{1/3}k^{-13/3}, \qquad a_2(k) = A_2\epsilon^{1/3}k^{-13/3}.$$

1.5 シミュレーション概要

$$S_{ij} = S\delta_{i1}\delta_{j2} \qquad (1)$$

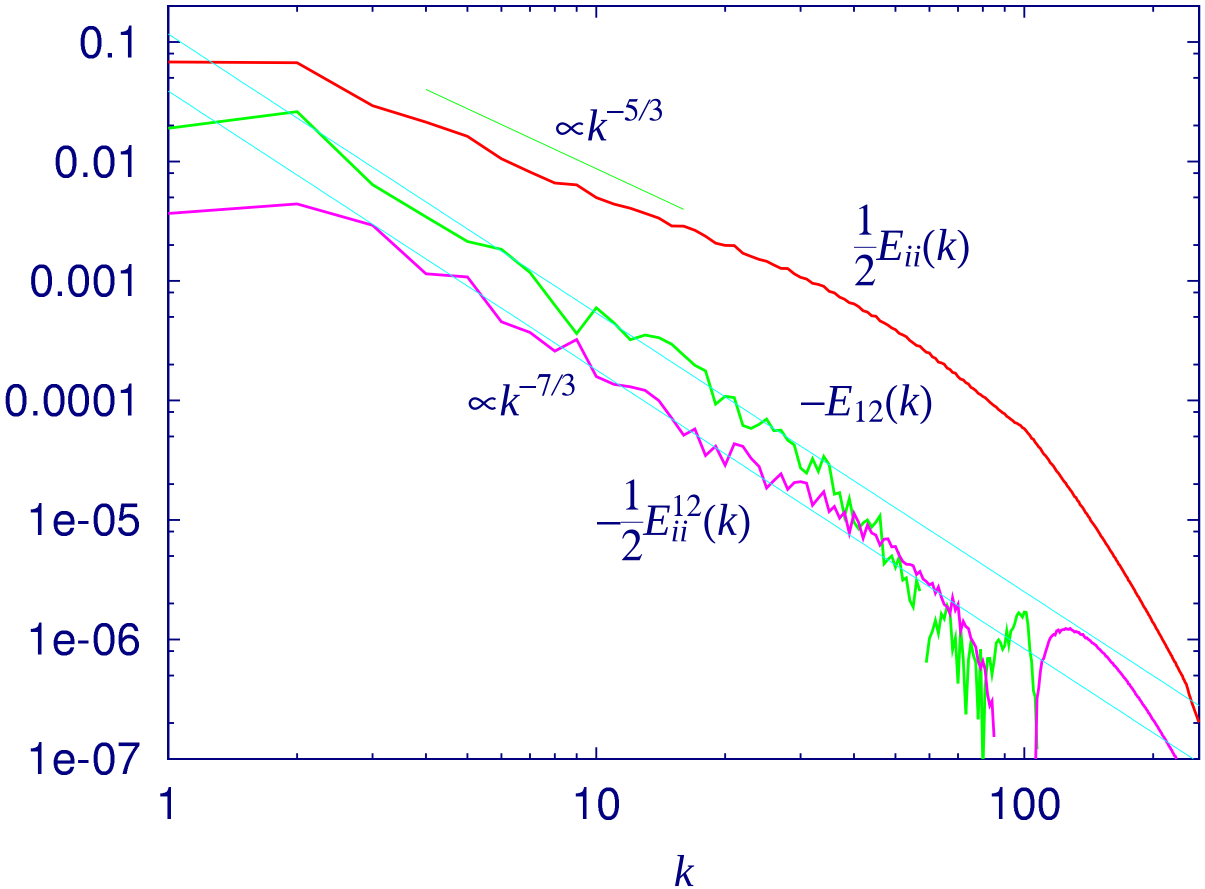
直接数値シミュレーション (DNS)

格子点数:	512^3
数値計算法:	**K** 空間のスペクトル法, $K_{\max} = 241$
	(**K** · **X** = **k** · **x**,, **X**:平均流にのった座標系)
	4 次 Runge-Kutta 法
S:	0.5, 1.0
積分時間:	$St = 2.0$
初期条件:	1024^3 のシミュレーション (平均流無し) で得られた統計的準定常状態の高波数成分をカット

R_λ: Taylor マイクロスケール Reynolds number, E: エネルギー, ϵ: エネルギー散逸率,
L_0: 積分長, λ: Taylor マイクロスケール, η: Kolmogorov 長,

R_λ	E	ϵ	L_0	λ	η
284	0.500	7.12×10^{-2}	1.21	0.143	4.30×10^{-3}

1.6 シミュレーション結果

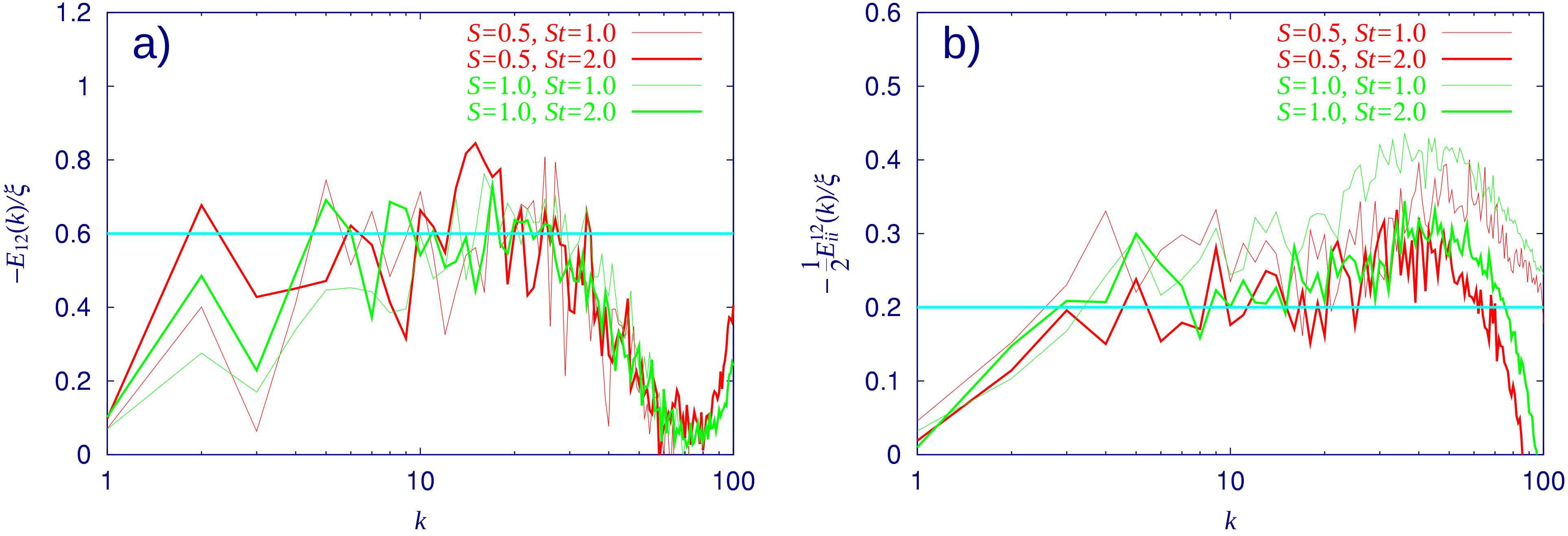


$$E_{ij}(k) \equiv \sum_{k'=k} Q_{ij}(\mathbf{k}'),$$
$$E_{ij}^{ab}(k) \equiv \sum_{k'=k} \hat{k}'_a \hat{k}'_b Q_{ij}(\mathbf{k}')$$

$$E_{12}(k) = \frac{4\pi}{15}(7A_1 - A_2)\xi, \quad \frac{1}{2}E_{ii}^{12}(k) = \frac{4\pi}{15}(-A_1 + A_2)\xi \tag{2}$$

$$\xi \equiv \epsilon^{1/3} k^{-7/3} S = \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \delta(k)$$

1.7　定数の測定

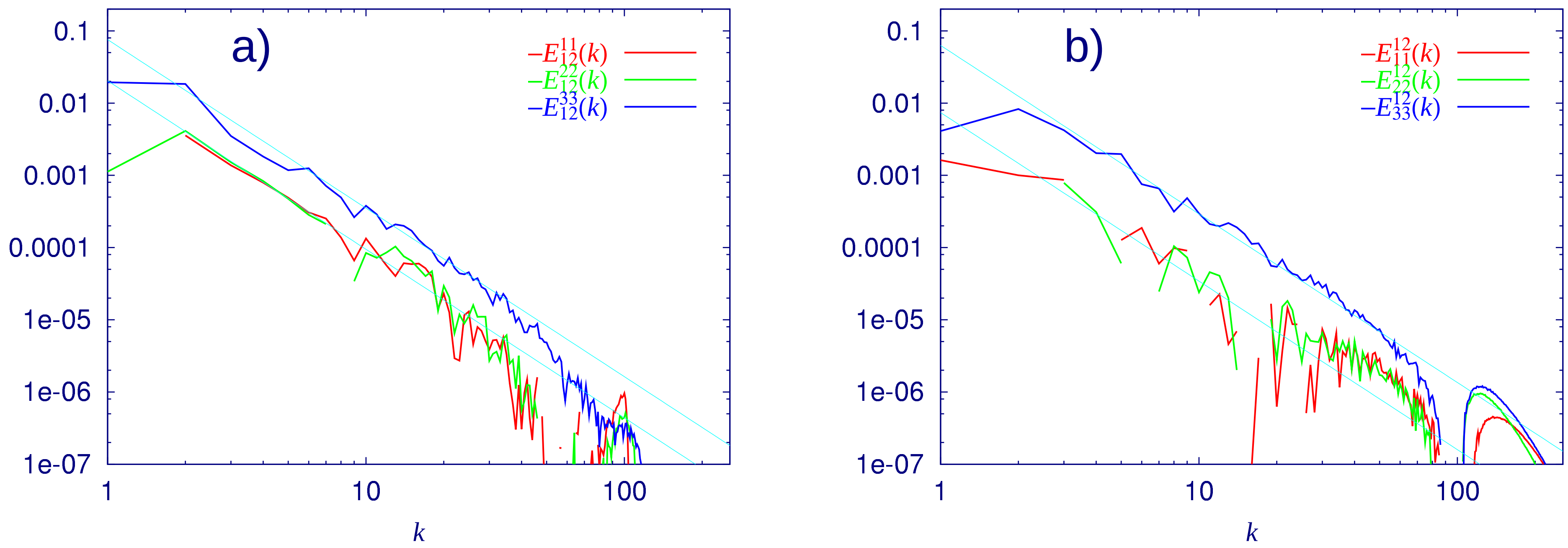


$$E_{12}(k) = (-0.60 \pm 0.16)\xi, \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}E_{ii}^{12}(k) = (-0.20 \pm 0.04)\xi, \quad (4)$$

$$\boxed{A_1 = -0.16 \pm 0.03, \qquad A_2 = -0.40 \pm 0.06. \quad (5)}$$

1.8 整合性



$$
\begin{aligned}
E_{12}^{11}(k) = E_{12}^{22}(k) &= (4\pi/105)(13A_1 - 3A_2)\xi, \\
E_{12}^{33}(k) &= (4\pi/105)(23A_1 - A_2)\xi, \\
E_{11}^{12}(k) = E_{22}^{12}(k) &= (16\pi/105)(-2A_1 + A_2)\xi, \qquad (6) \\
E_{33}^{12}(k) &= (8\pi/105)(A_1 + 3A_2)\xi.
\end{aligned}
$$

1.9 実験との比較

$$\int_0^\infty dk_1 \tilde{E}_{12}(k_1) = \langle u_1 u_2 \rangle \tag{7}$$

$$\tilde{E}_{12}(k_1) = -C_0 \epsilon^{1/3} k_1^{-7/3} S \tag{8}$$

$$C_0 = \frac{36\pi}{1729}(-33A_1 + 7A_2) \tag{9}$$

本シミュレーション

$$C_0 = 0.16 \pm 0.05 \tag{10}$$

実験

[Wyngaard and Cote (1972), Saddoughi and Veeravalli (1994)]

$$C_0 \sim 0.14 \tag{11}$$

1.10　定数と Navier-Stokes の関係

定数を Navier-Stokes 方程式から求めたい。

（アナロジー：マクロな物質定数をミクロな量と関係づけたい。）

2 点（スペクトル）完結近似

- 乱流の 2 次の統計量（スペクトル）について閉じた式を、Navier-Stokes 方程式に基づき導出する近似。
- 2 次の統計量について定量的な評価を与える。
- DIA (Kraichnan, 1958), ALHDIA (Kraichnan, 1965), EDQNM (Orszag, 1974), LRA (Kaneda, 1981)

1.11 完結問題

$$\frac{\partial}{\partial t} u = Muu \tag{12}$$

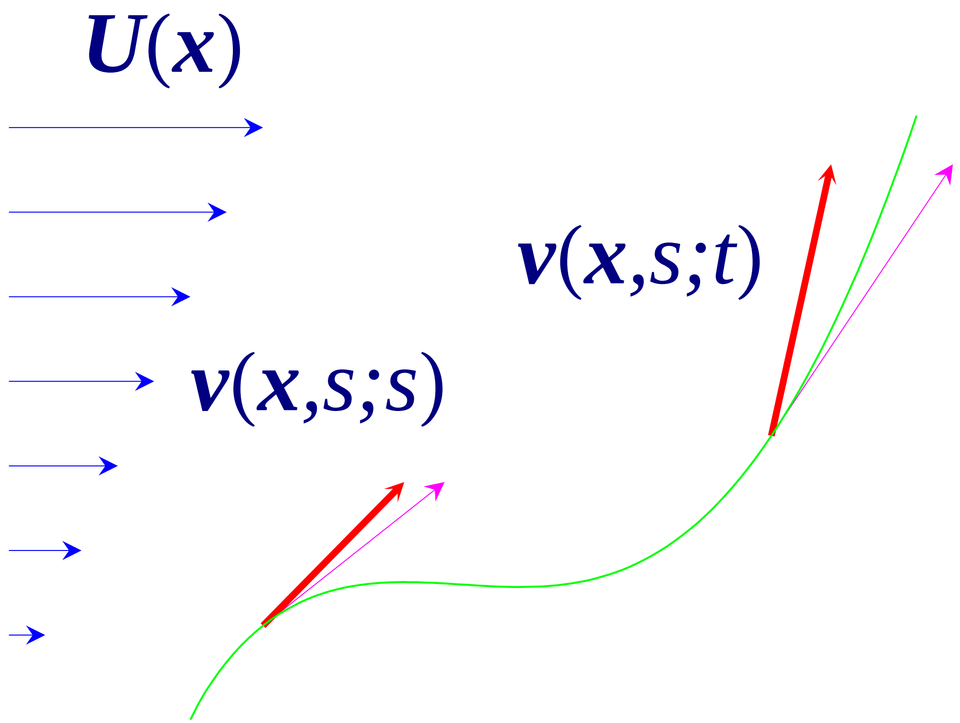
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\langle u\rangle &= M\langle uu\rangle \\
\frac{\partial}{\partial t}\langle uu\rangle &= M\langle uuu\rangle \\
&\cdots
\end{aligned}$$

統計量について閉じた方程式が得られない

1.12 Lagrange 繰り込み近似 (LRA) 1

Lagrange 速度揺らぎ: $\mathbf{v}(\mathbf{x}, s; t)$

時刻 s で $\mathbf{x}$ にいた流体粒子の時刻 t での速度揺らぎ



1.13 Lagrange 繰り込み近似 (LRA) 2

Q: Lagrange 2 点 2 時刻相関,　　G: Lagrange 応答関数

$$Q_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t') \equiv P_S^{(\mathbf{x})}\langle[v_i(\mathbf{x},t';t)]v_j(\mathbf{x}',t')\rangle, \tag{13}$$

$$\int d\mathbf{x}' G_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')\delta v_j(\mathbf{x}',t';t') \equiv P_S^{(\mathbf{x})}\langle[\delta v_i(\mathbf{x},t';t)]\rangle, \tag{14}$$

Fourier 空間表示 (統計的空間的一様性を仮定)

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{k},t,t') \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')Q_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{x}',t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}, \tag{15}$$

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{k},t) \equiv \hat{Q}_{ij}(\mathbf{k},t,t), \tag{16}$$

$$\hat{G}_{ij}(\mathbf{k},t,t') \equiv \int d^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')G_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}. \tag{17}$$

LRA 方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\nu k^2\right)Q_{ij}(\mathbf{k},t,t) = D_{ij}[Q,G](\mathbf{k},t)+K_{ijmn}[Q](\mathbf{k},t)S_{mn}, \tag{18}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2\right)G_{ij}(\mathbf{k},t,s) = J_{ij}[Q,G](\mathbf{k},t,s)+L_{ijmn}[G](\mathbf{k},t,s)S_{mn}, \tag{19}$$

1.14 $G(k)$ の展開

統計的定常性を仮定

$$Q_{ij}(\mathbf{k},t) = Q^{(0)}_{ij}(\mathbf{k}) + \lambda Q^{(1)}_{ij}(\mathbf{k}), \tag{20}$$

$$G_{ij}(\mathbf{k},t,s) = G^{(0)}_{ij}(\mathbf{k},t-s) + \lambda G^{(1)}_{ij}(\mathbf{k},t-s), \tag{21}$$

$G^{(1)}$ の一般形

$$G^{(1)}_{ij}(\mathbf{k},t) = Y_{ij\alpha\beta}(\mathbf{k},t)S_{\alpha\beta}, \tag{22}$$

$$Y_{ij\alpha\beta}(\mathbf{k},t) = c(k,t)P_{i\alpha}(\mathbf{k})P_{j\beta}(\mathbf{k}) + d(k,t)P_{i\beta}(\mathbf{k})P_{j\beta}(\mathbf{k}) + f(k,t)P_{ij}(\mathbf{k})\hat{k}_\alpha\hat{k}_\beta, \tag{23}$$

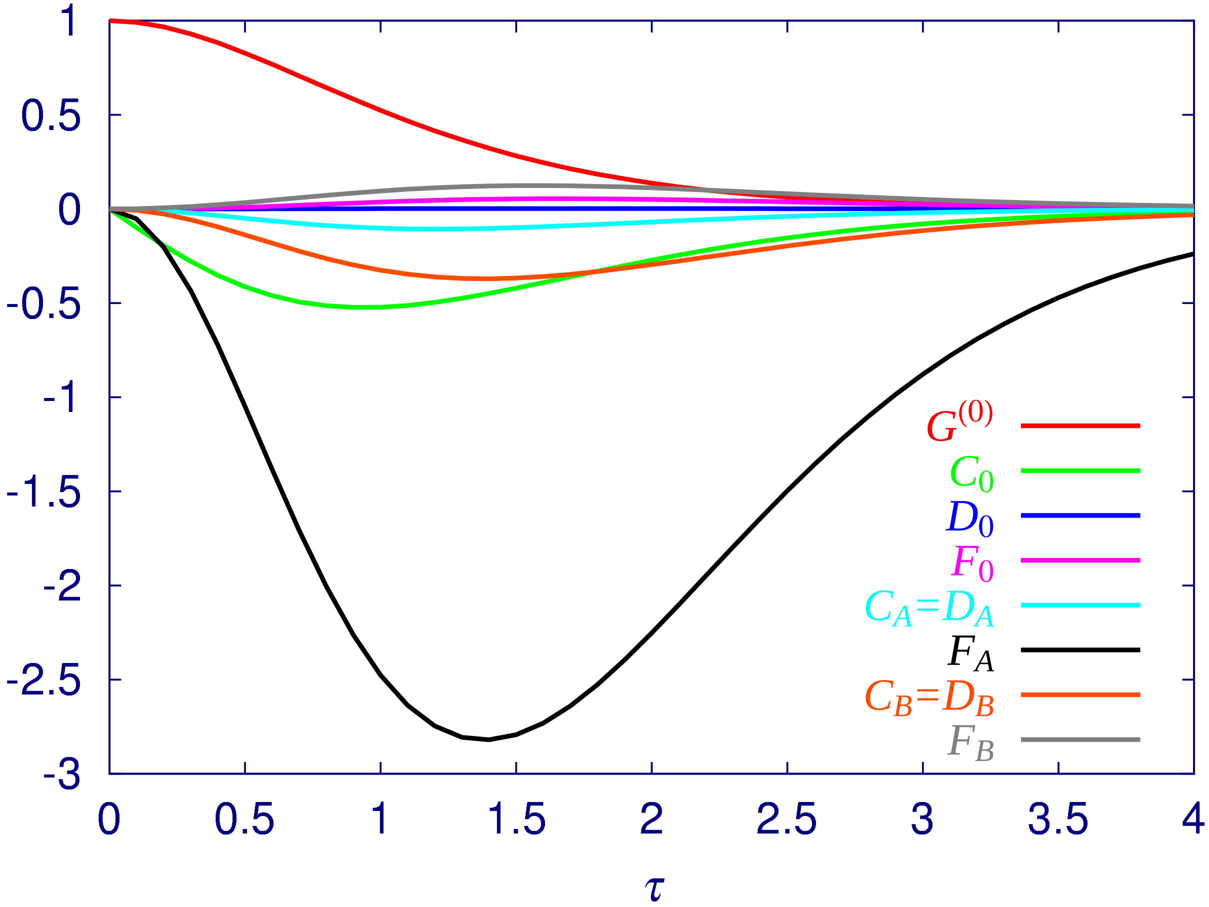
$$c(k,t) = \tau_N C(t/\tau_N), \quad d(k,t) = \tau_N D(t/\tau_N), \quad f(k,t) = \tau_N F(t/\tau_N), \qquad (\tau_N \equiv \epsilon^{-1/3}k^{-2/3}),$$

G の発展方程式の $O(\lambda^1)$ について

$$\frac{\partial}{\partial t}Y_{ij\alpha\beta}[C,D,F](\mathbf{k},t) = Z_{ij\alpha\beta}[Q^{(0)},G^{(0)},A_1,A_2,C,D,F](\mathbf{k},t) \tag{24}$$

1.15 $G^{(1)}$ に関する普遍関数

$$
\begin{aligned}
\tilde{C}(\tau) &= \tilde{C}_0(\tau) + A\tilde{C}_A(\tau) + B\tilde{C}_B(\tau) \\
\tilde{D}(\tau) &= \tilde{D}_0(\tau) + A\tilde{D}_A(\tau) + B\tilde{D}_B(\tau) \\
\tilde{F}(\tau) &= \tilde{F}_0(\tau) + A\tilde{F}_A(\tau) + B\tilde{F}_B(\tau)
\end{aligned} \tag{25}
$$



1.16 $Q^{(1)}$ の普遍定数の決定

統計的定常性を仮定, Q の発展方程式の $O(\lambda^1)$ について

$$\frac{\partial}{\partial t} Q^{(1)}_{ij}(\mathbf{k}, t) = R_{ij\alpha\beta}[Q^{(0)}, G^{(0)}, A_1, A_2, C, D, F](\mathbf{k}, t) S_{\alpha\beta} = 0. \tag{26}$$

$$-3.11A_1 - 0.738A_2 - 0.366 = 0 \tag{27}$$

$$-3.39A_1 - 0.225A_2 - 0.404 = 0, \tag{28}$$

$$\boxed{A_1 = -0.120 \pm 0.002, \quad A_2 = 0.009 \pm 0.014}$$

DNS では、

$$A_1 = -0.15 \pm 0.01, \qquad A_2 = -0.48 \pm 0.02.$$

この違いはどこから？

1.17 スケール領域の有限性の影響 1

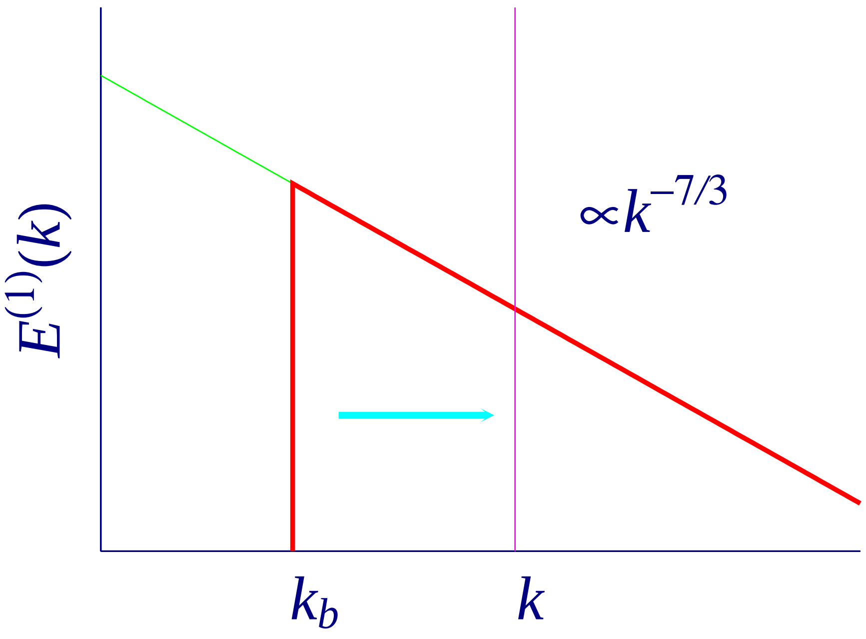
$Q^{(1)}$ と $G^{(1)}$ のカットオフ・モデル

$Q^{(1)}$ と $G^{(1)}$ について

$k \geq k_0$ で相似形

$k < k_0$ で 0

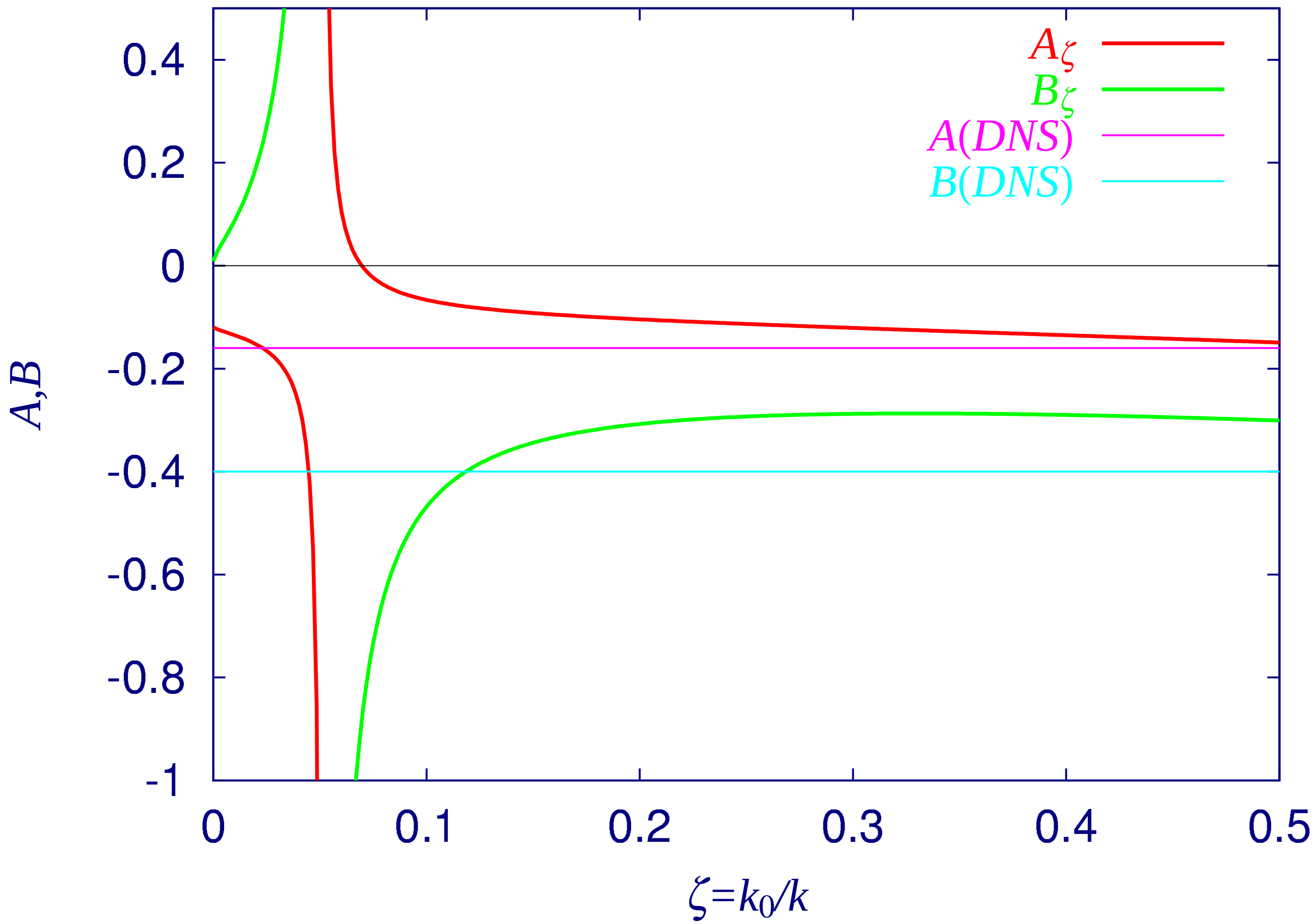
とする.



$Q^{(1)}(k)$ を定常にする $A_1 = A_1(\zeta), A_2 = A_2(\zeta)$ を求める.

$$\zeta = \frac{k_0}{k}$$

1.18　スケール領域の有限性の影響 2



1.19　まとめ（一様剪断乱流）

- 一様シアー乱流の小スケールにおける速度相関スペクトルテンソル Q の一般形を導いた.
- DNS によりそのテンソル形を検証し, Q の非等方成分 $Q^{(1)}$ を決定する定数 A_1 と A_2 を測定した.
- Lagarange 繰り込み近似 (LRA) により, スケール領域幅 $\to \infty$ の極限の普遍定数 A_1 と A_2 の値を求めた.
- LRA 解析により, $Q^{(1)}(k)$ は k_0/k (k_0 はスケール領域の下端波数) に強く依存し, $k_0/k \to 0$ の極限に漸近するには, k_0/k が十分小さい (≈ 0.05) 必要があることが示唆された.

1.20　成層乱流

- 大気・海洋の乱流
- 密度成層の効果で大スケールでは場は統計的に非等方的
- 小スケール（海洋乱流では $\sim 1\mathbf{m}$ 以下）では準等方的

基礎方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} &= -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} \boxed{-N\rho\mathbf{e}_3}, \\
\nabla\cdot\mathbf{u} &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}\rho &= -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho + \kappa\nabla^2\rho \boxed{+Nu_3},
\end{aligned}
$$

$\mathbf{u}$: 速度場,　ρ: 密度揺らぎ場,　p: 圧力場,
ν: 動粘性係数,　κ: 拡散係数,　N: Brunt-Väisälä 振動数.

1.21 スペクトルの一般形

密度揺らぎ相関スペクトル $P(\mathbf{k})$, 質量流束スペクトルテンソル $B_i(\mathbf{k})$

$$P(\mathbf{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{r}\langle\rho(\mathbf{x}+\mathbf{r},t)\rho(\mathbf{x},t)\rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad B_i(\mathbf{k},t) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{r}\langle u_i(\mathbf{x}+\mathbf{r},t)\rho(\mathbf{x},t)\rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

$$\begin{aligned}
Q_{ij}(\mathbf{k}) &= Q_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}) + \Delta Q_{ij}(\mathbf{k}), & \Delta Q_{ij}(\mathbf{k}) &= Q_{ijm}^{(1)}(\mathbf{k})N_m + Q_{ijmn}^{(2)}(\mathbf{k})N_mN_n + \ldots, \\
P(\mathbf{k}) &= P^{(0)}(\mathbf{k}) + \Delta P(\mathbf{k}), & \Delta P(\mathbf{k}) &= P_m^{(1)}(\mathbf{k})N_m + P_{mn}^{(2)}(\mathbf{k})N_mN_n + \ldots, \\
B_i(\mathbf{k}) &= B_i^{(0)}(\mathbf{k}) + \Delta B_i(\mathbf{k}), & \Delta B_i(\mathbf{k}) &= B_{im}^{(1)}(\mathbf{k})N_m + B_{imn}^{(2)}(\mathbf{k})N_mN_n + \ldots, \\
& & & \mathbf{N} = N\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta Q_{ij}(\mathbf{k}) &= \left[\boxed{q_1(k)}P_{i3}(\mathbf{k})P_{j3}(\mathbf{k}) + \boxed{q_2(k)}P_{ij}(\mathbf{k})\frac{k_3^2}{k^2} + \boxed{q_3(k)}P_{ij}(\mathbf{k})\right]N^2, \\
\Delta P(\mathbf{k}) &= \left[\boxed{p_1(k)}\frac{k_3^2}{k^2} + \boxed{p_2(k)}\right]N^2, \\
\Delta B_i(\mathbf{k}) &= \boxed{b(k)}P_{i3}(\mathbf{k})N,
\end{aligned}$$

Kolmogorov スケーリング

$$q_i(k) = \alpha_i k^{-5}, \qquad p_j(k) = \beta_j k^{-5}, \qquad b(k) = \gamma\epsilon^{1/3}k^{-13/3},$$

ただし $\alpha_i, \beta_j, \gamma$ はエネルギー散逸率 ϵ と ρ^2 の散逸率 χ の無次元関数.

1.22 シミュレーション概要

直接数値シミュレーション (DNS)

格子点数: 512^3（周期境界条件）

数値計算法: エリアスフリー・スペクトル法, $K_{\rm max} = 241$
時間積分は 4 次 Runge-Kutta 法

N: 1.0

積分時間: $Nt = 5.0$

初期条件: 速度場は平均流無しのシミュレーションで得られた統計的準定常状態
密度揺らぎ場は $E_P(k) \approx (1/2)E_Q(k)$ を満たすようにランダムに発生.

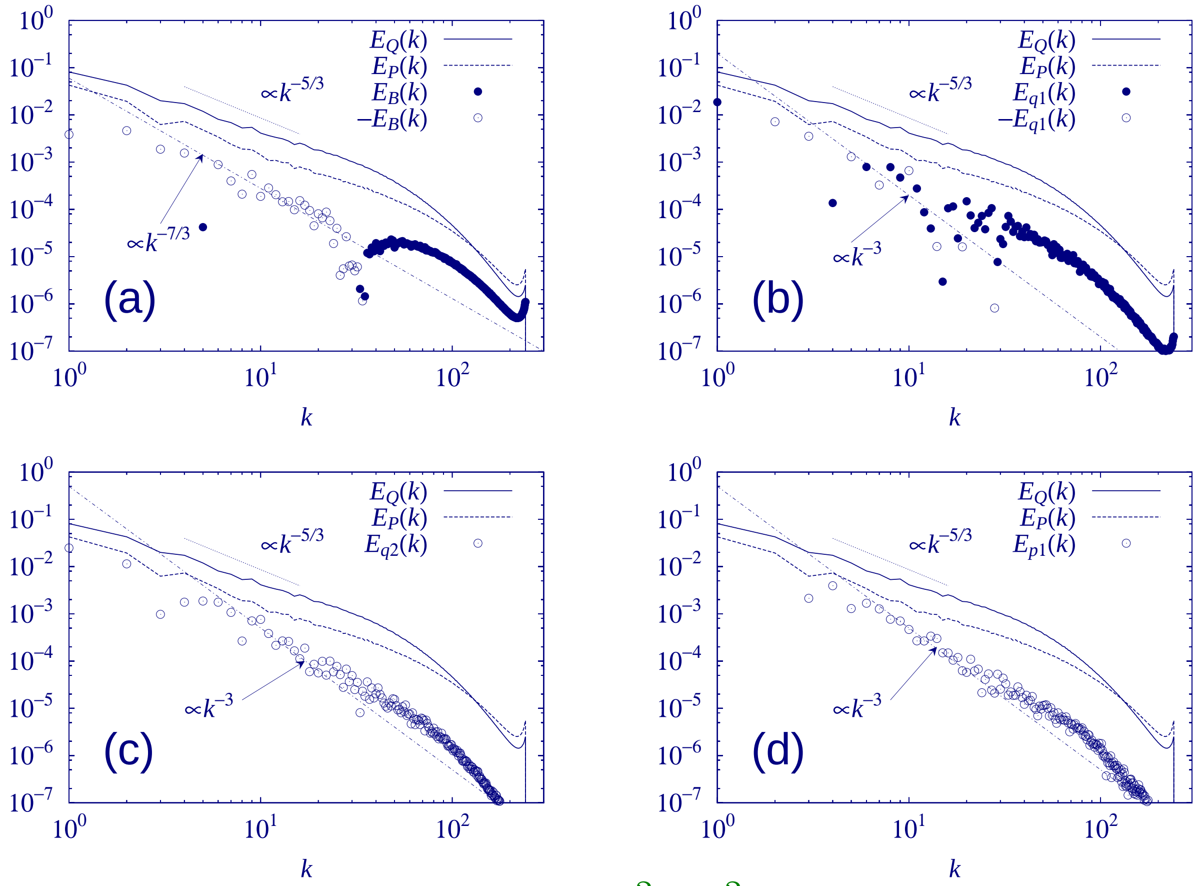
Nt	E_Q	E_P	ϵ	L_0	λ	η	R_λ
0.0	0.500	0.250	7.12×10^{-2}	1.21	0.143	4.30×10^{-3}	284
3.0	0.263	0.114	5.55×10^{-2}	1.10	0.117	4.57×10^{-3}	170

E_Q: 運動エネルギー, E_P:ポテンシャルエネルギー ϵ: エネルギー散逸率,

L_0: 積分長, λ: Taylor マイクロスケール, η: Kolmogorov 長,

R_λ: Taylor マイクロスケール Reynolds number

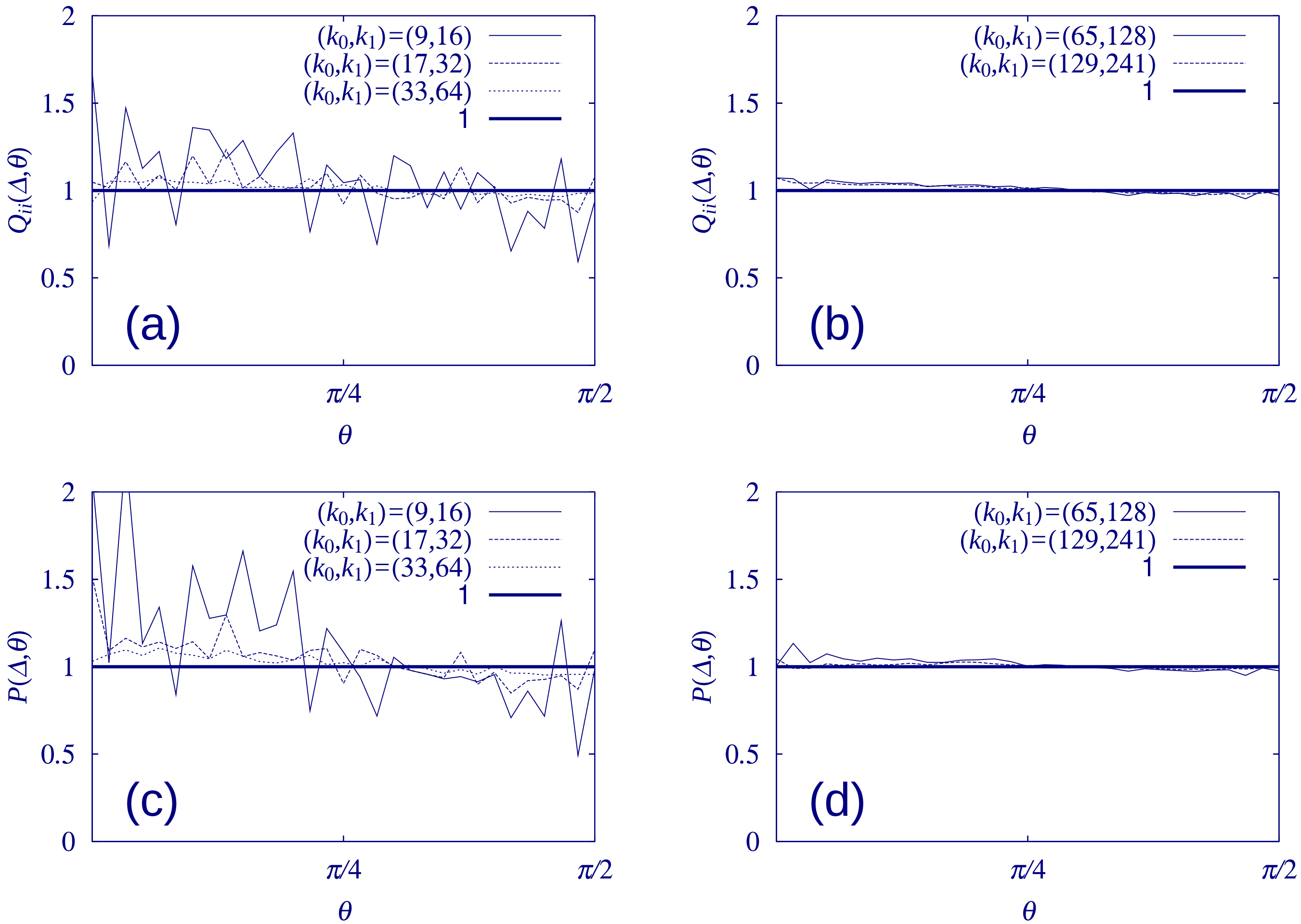
1.23 結果：非等方スペクトルのスケーリング



$$\begin{aligned}
E_B(k) &\equiv \ll B_3(\mathbf{k}) \gg_k \\
&= \frac{8\pi}{3} k^2 \boxed{b(k)} N \propto k^{-7/3}, \\
E_{q1}(k) &\equiv \ll q_1(\mathbf{k}) \gg_k \\
&= \frac{8\pi}{3} k^2 \boxed{q_1(k)} N^2 \propto k^{-3}, \\
E_{q2}(k) &\equiv \ll (3\cos^2\theta - 1) q_2(\mathbf{k}) \gg_k \\
&= \frac{16\pi}{15} k^2 \boxed{q_2(k)} N^2 \propto k^{-3}, \\
E_{p1}(k) &\equiv \ll (3\cos^2\theta - 1) p_1(\mathbf{k}) \gg_k \\
&= \frac{16\pi}{15} k^2 \boxed{p_1(k)} N^2 \propto k^{-3}
\end{aligned}$$

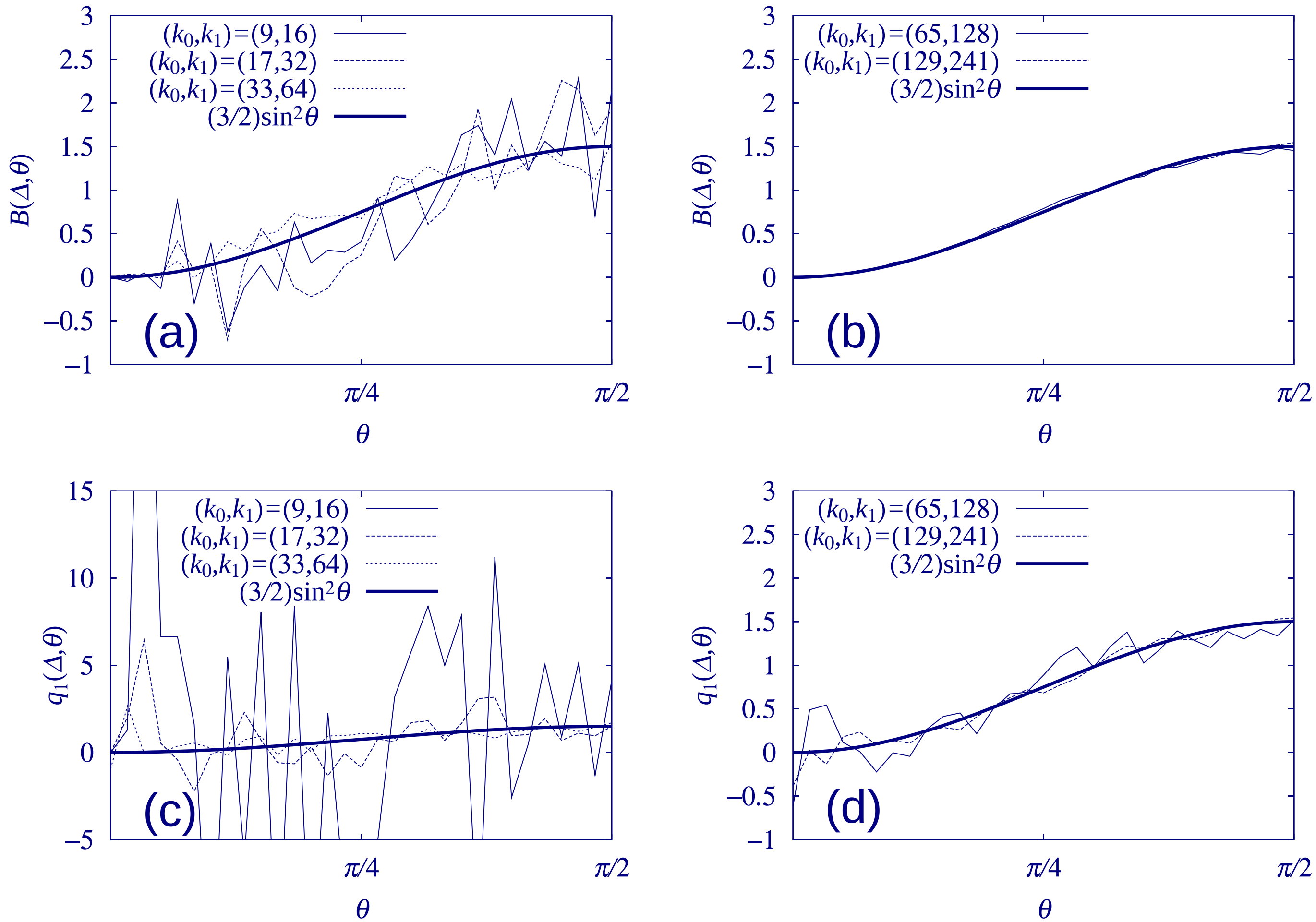
$$\begin{aligned}
q_1(\mathbf{k}) &\equiv \frac{k^2 + k_3^2}{k^2 - k_3^2} Q_{33}(\mathbf{k}) - Q_{11}(\mathbf{k}) - Q_{22}(\mathbf{k}), \\
q_2(\mathbf{k}) &\equiv Q_{11}(\mathbf{k}) + Q_{22}(\mathbf{k}) - \frac{k_3^2}{k^2 - k_3^2} Q_{33}(\mathbf{k}) - \frac{1}{4\pi k^2} \ll \cdot \gg_k \\
p_1(\mathbf{k}) &\equiv P(\mathbf{k}) - \frac{1}{4\pi k^2} \ll \cdot \gg_k
\end{aligned}$$

1.24 結果：スペクトルの角度依存性 (1)



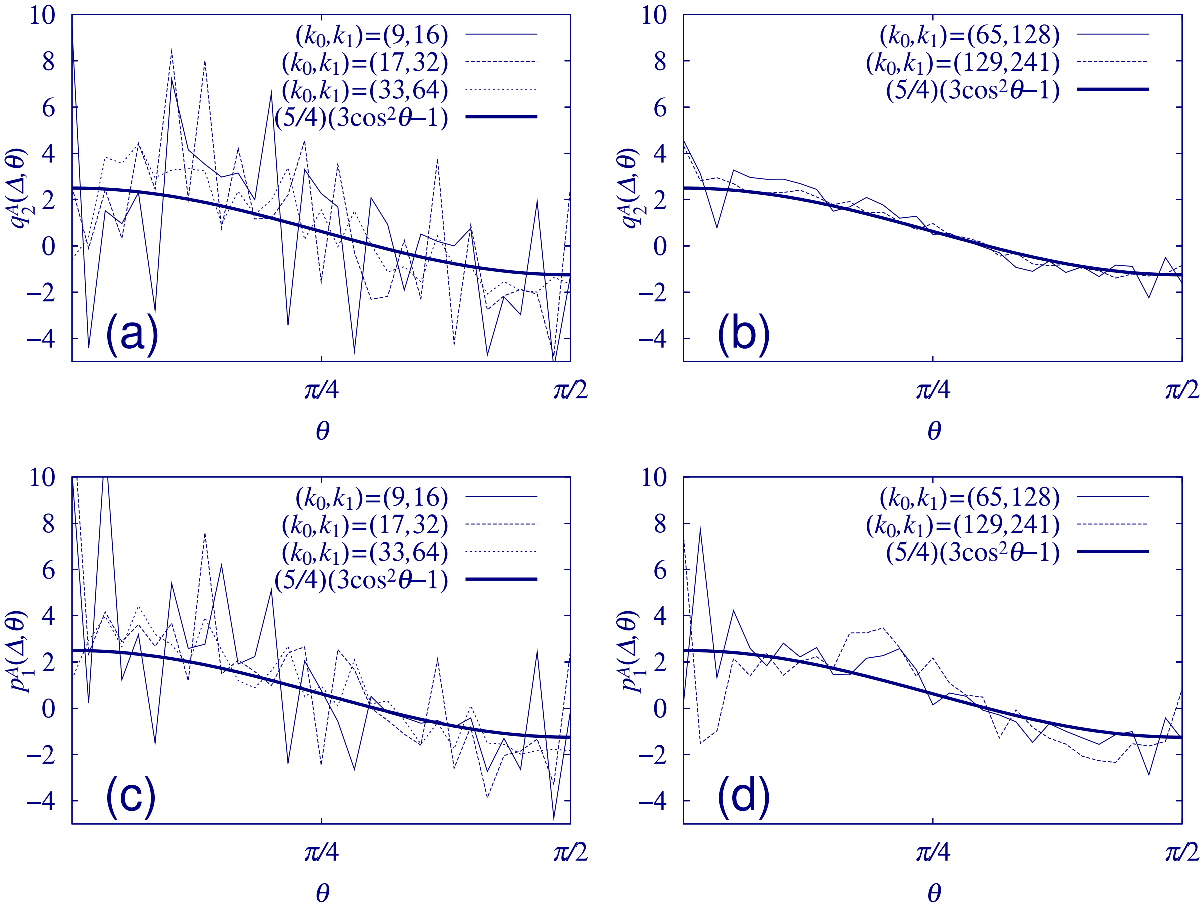
$$X(\Delta,\theta) \equiv \frac{4\pi \int_\Delta dk k^2 X(k,\theta)}{\int_\Delta dk \ll X(\mathbf{k}) \gg_k}, \qquad \Delta = [k_0, k_1], \qquad X = Q_{ii}, P.$$

1.25 結果：スペクトルの角度依存性 (2)



$$X(\Delta,\theta) \equiv \frac{4\pi \int_\Delta dk k^2 X(k,\theta)}{\int_\Delta dk \ll X(\mathbf{k}) \gg_k}, \qquad \Delta = [k_0, k_1], \qquad X = B_3, q_1$$

1.26　結果：スペクトルの角度依存性 (3)



$$X^A(\Delta,\theta) \equiv \frac{4\pi \int_\Delta dk k^2 X(k,\theta)}{\int_\Delta dk \ll (3\cos^2\theta - 1) X(\mathbf{k}) \gg_k}, \qquad \Delta = [k_0, k_1], \qquad X = q_2, p_1$$

1.27　まとめ（成層乱流）

- 摂動解析により成層乱流小スケールにおける速度相関スペクトルテンソル, 密度揺らぎスペクトル, 質量流束スペクトルテンソルの一般形を得た.
- 直接数値シミュレーション（**DNS**, 格子点数 512^3）により, 上記スペクトルテンソルのスケーリング, 角度依存性を検証した.

今後の課題

- 更に高 **Reynolds** 数乱流の **DNS** における検証.
- 相関スペクトルを決定する関数 α_1,α_2,α_3,β_1, β_2,γ の理論的見積もり（**LRA** による）.

2　大スケールデータ同化による小スケールの再生

Yoshida, Yamaguchi, and Kaneda, Phys. Rev. Lett. 94 (2005), 014501

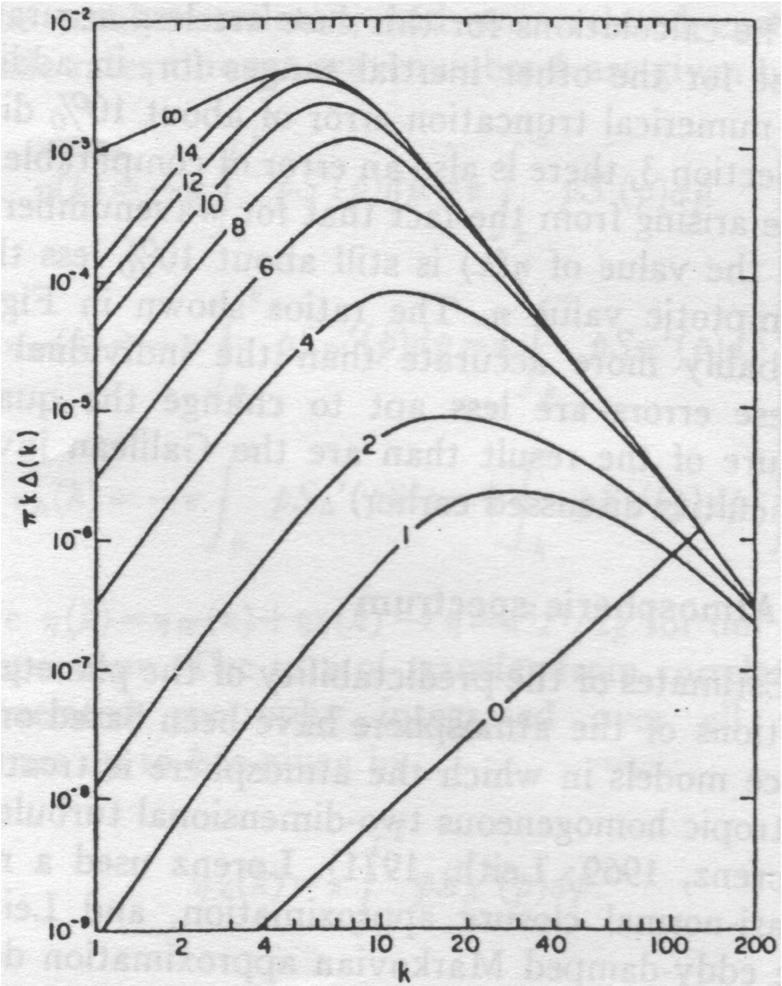
乱流

- 大自由度, 非線形 非平衡力学系.
- 乱流場は, 初期場・境界条件などに敏感に依存する.

$\Longrightarrow$ 予測不可能性

  - カオス (e.g, Lorenz モデル).
  - 地球規模大気乱流の予測は約 2 週間が限度 (Leith and Kraichnan, 1967).

2.2 乱流の予測不可能性



$\mathbf{u}^{(1)}$ ：正しい場

$\mathbf{u}^{(2)}$ ：シミュレーションした場
(初期に小さな誤差含む)

$\delta\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}^{(1)}$:誤差場

誤差スペクトル

$$\Delta(k) = \sum_{|\mathbf{k}'|=k} \delta\mathbf{u}(\mathbf{k}') \cdot \delta\mathbf{u}(-\mathbf{k}')$$

大気乱流の予測は約 2 週間が限度

(Leith and Kraichnan, 1972)

2.3 データ同化

大スケールの時々刻々の情報があれば,
小スケールの誤差を抑制できるか?

(衛星などによる)時々刻々の粗いデータから,

細かいスケールの流れを知ることができるか?

- 気象モデルでの研究. (Charney *et al.*, 1969)
- Navier-Stokes(NS) 方程式の数値シミュレーション
  [Henshaw *et al.* (1998, 2003), Hayashi *et al.* (2002), Olson and Titi (2003)]
  - Reynolds 数が小さい.
- 数学的研究, theory of determing modes
  - 必要なモード数の上限が得られているが, 数値実験と比して大きすぎる.

2.4 Number of determining modes

$\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}$ を NS 方程式の解, $\delta\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}$ として,

$$\lim_{t\to\infty} |\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}^{(m)}, t)| = 0 \ (m = 1, \cdots, N) \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} |\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)| = 0 \ (\forall\ \mathbf{x})$$

を満たす最小の N の評価.

Foias and Prodi (1967), Foias *et al.* (1983), Jones and Titi (1993)

得られている N の上限の評価は, 数値実験の結果と比べると, 大きすぎる.

2.5 この章の目的

直接数値シミュレーション（DNS）により, 高 **Reynolds** 数乱流におけるデータ同化の影響について, 定量的な評価を得る.

「波数 $k < k^*$ のモードを逐次データ同化すれば,
小スケール $(k \geq k_*)$ のデータが再生するのに十分である」

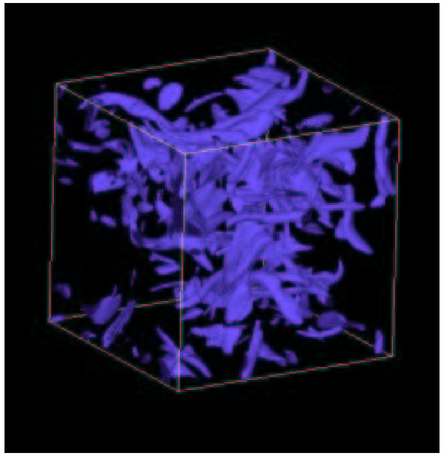
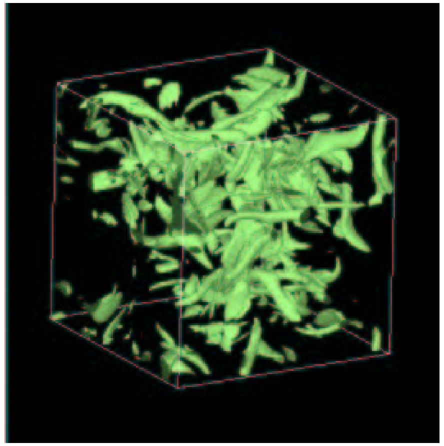
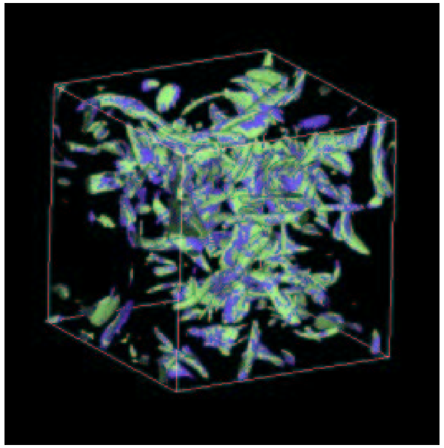
となる臨界波数 k^* の評価, その乱流の特徴量との関係を調べる.

広範囲の **Reynolds** 数 $(R_\lambda = 31 - 179)$ で **DNS** を行う.

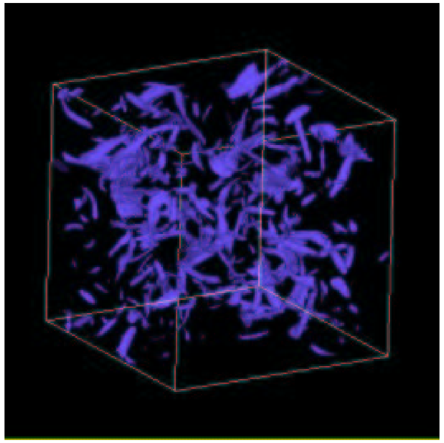
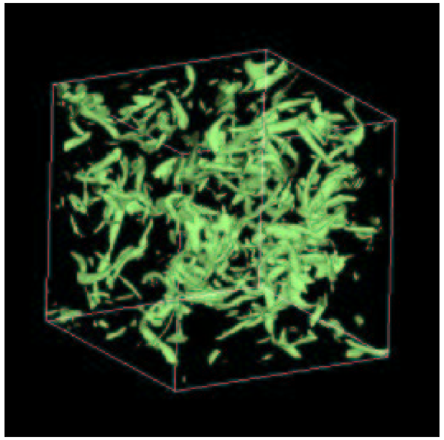
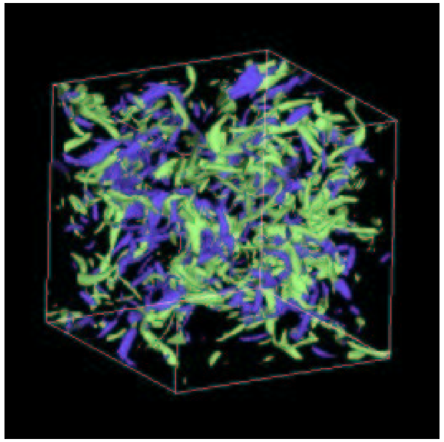
2.6　データ同化しない場合

$\mathbf{u}_1$（正しい速度場）　$\mathbf{u}_2$（正しい速度場＋誤差）　重ねた場

初期 $(t=0)$

$t=T$

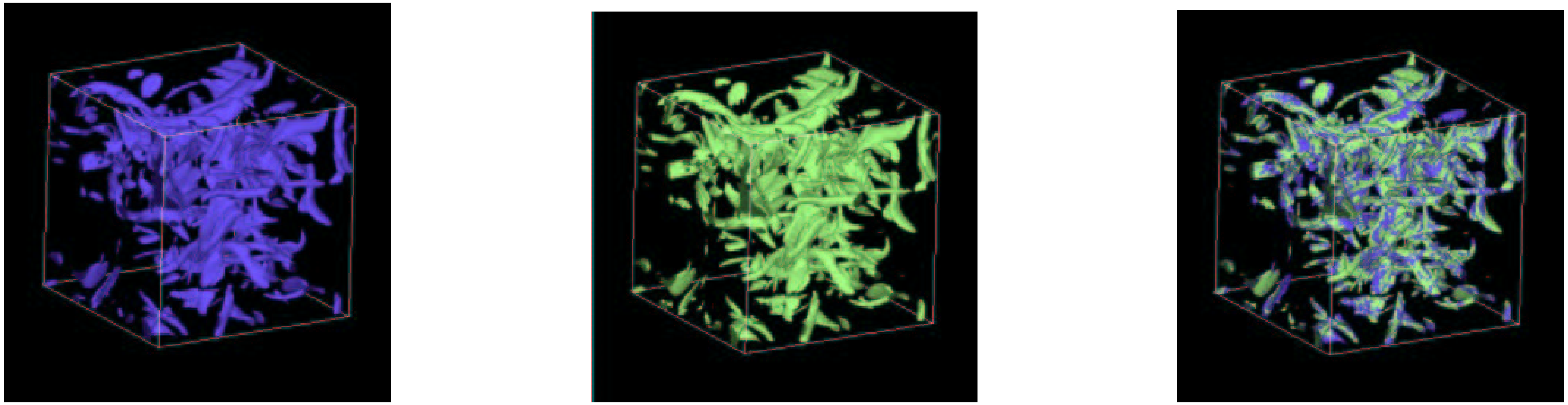
誤差 $|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|$ が時間と共に増大する.

2.7　十分データ同化した場合

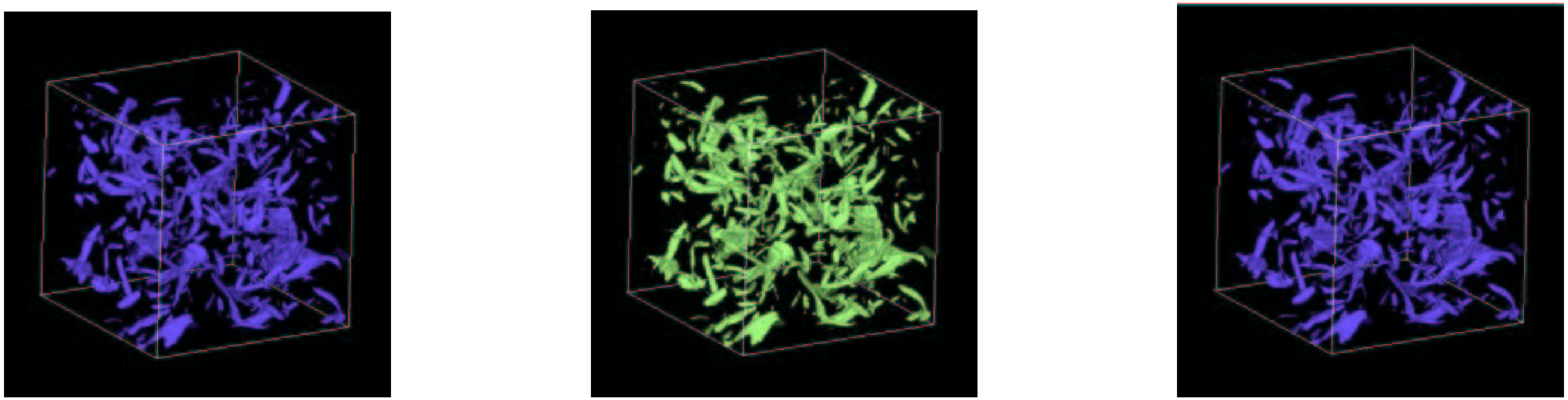
時々刻々$\mathbf{u}_1$ の低波数データを $\mathbf{u}_2$ にコピーすると、

$\mathbf{u}_1$（正しい速度場）　$\mathbf{u}_2$（正しい速度場＋誤差）　重ねた場

初期 $(t = 0)$



$t = T$



2.8 エネルギースペクトル・誤差スペクトル

正しい場：$\hat{\mathbf{u}}^{(1)}(\mathbf{k})$, 誤差を含む場：$\hat{\mathbf{u}}^{(2)}(\mathbf{k})$

誤差場: $\delta\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \equiv \hat{\mathbf{u}}^{(1)}(\mathbf{k}) - \hat{\mathbf{u}}^{(2)}(\mathbf{k})$

エネルギースペクトル, エネルギー

$$E^{(i)}(k) = \frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{k}'|=k} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}')|^2, \qquad E^{(i)} = \sum_k E^{(i)}(k) \qquad (i = 1, 2),$$

誤差スペクトル, 誤差

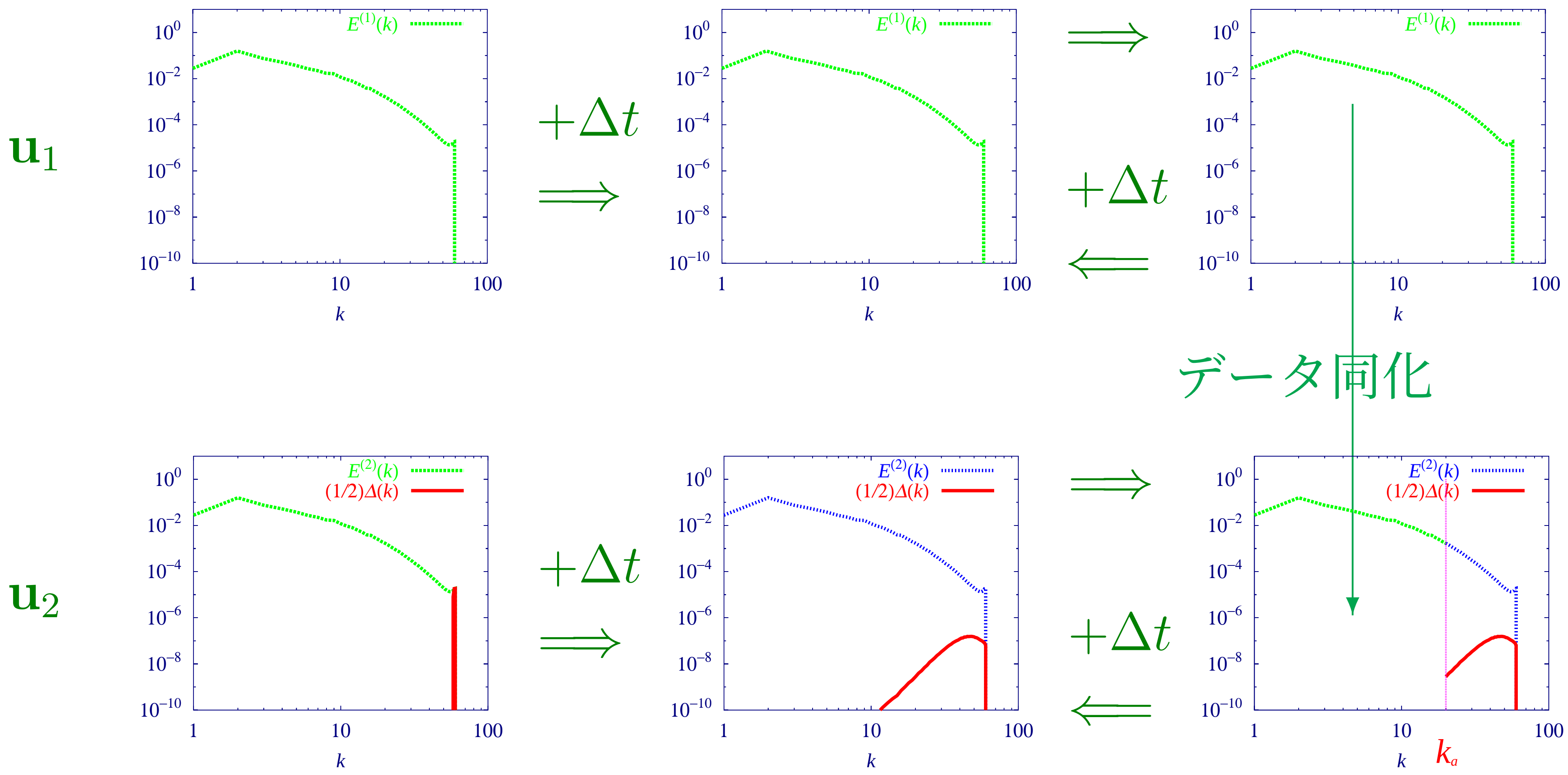
$$\Delta(k) = \frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{k}'|=k} |\delta\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}')|^2, \qquad \Delta = \sum_k \Delta(k).$$

$E^{(1)}(k) = E^{(2)}(k)$ のとき,

$$\Delta(k) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \hat{\mathbf{u}}^{(1)}(\mathbf{k}') = \hat{\mathbf{u}}^{(2)}(\mathbf{k}') \quad (|\mathbf{k}'| = k)$$

$$\Delta(k) = 2E^{(1)}(k) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{|\mathbf{k}'|=k} \hat{\mathbf{u}}^{(1)}(-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{k}') = 0.$$

2.9 数値計算の方法



$k < k_a$ の波数モードを時々刻々データ同化.

2.10 DNS Parameters

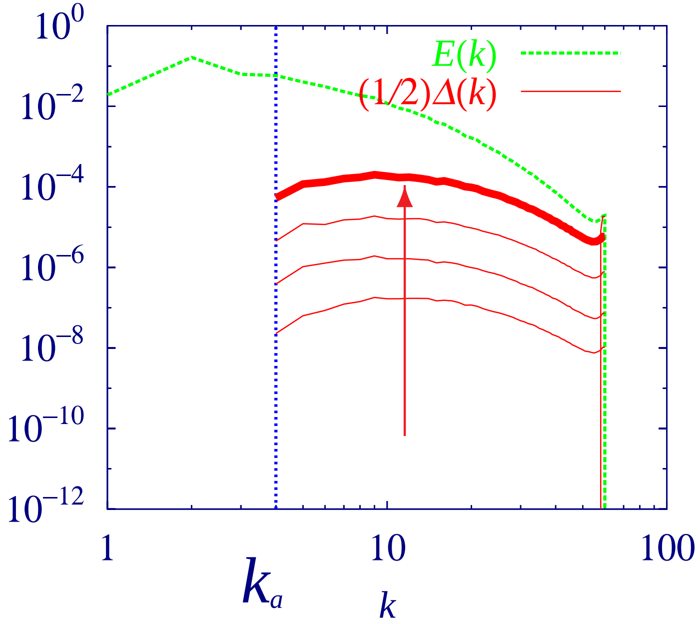
N	$k_{\max}$	$\nu(\times 10^3)$	E	ϵ	$\eta(\times 10^3)$	R_λ
64	30	10.0	0.500	0.171	49.2	**31**
128	60	2.70	0.500	0.138	19.4	**67**
256	120	1.10	0.500	0.132	10.0	**107**
512	241	0.410	0.500	0.127	4.82	**179**

外力: $\mathbf{f}(\mathbf{k}, t) = -\gamma \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) \qquad 2 < k < 3$

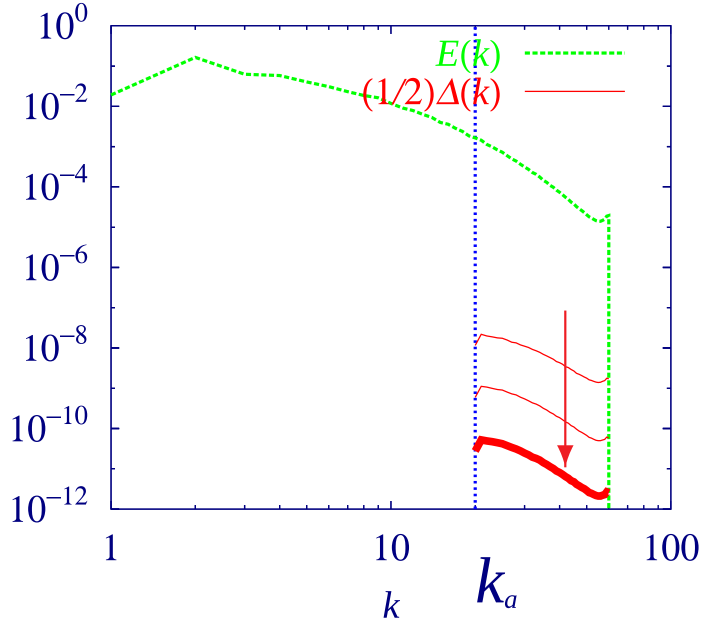
粘性係数 ν: $k_{\max}\eta \sim 1, \qquad \eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$

数値スキーム: エイリアスを除去したスペクトル法,
時間発展は 4 次の Runge-Kutta 法

2.11　誤差スペクトルの時間発展



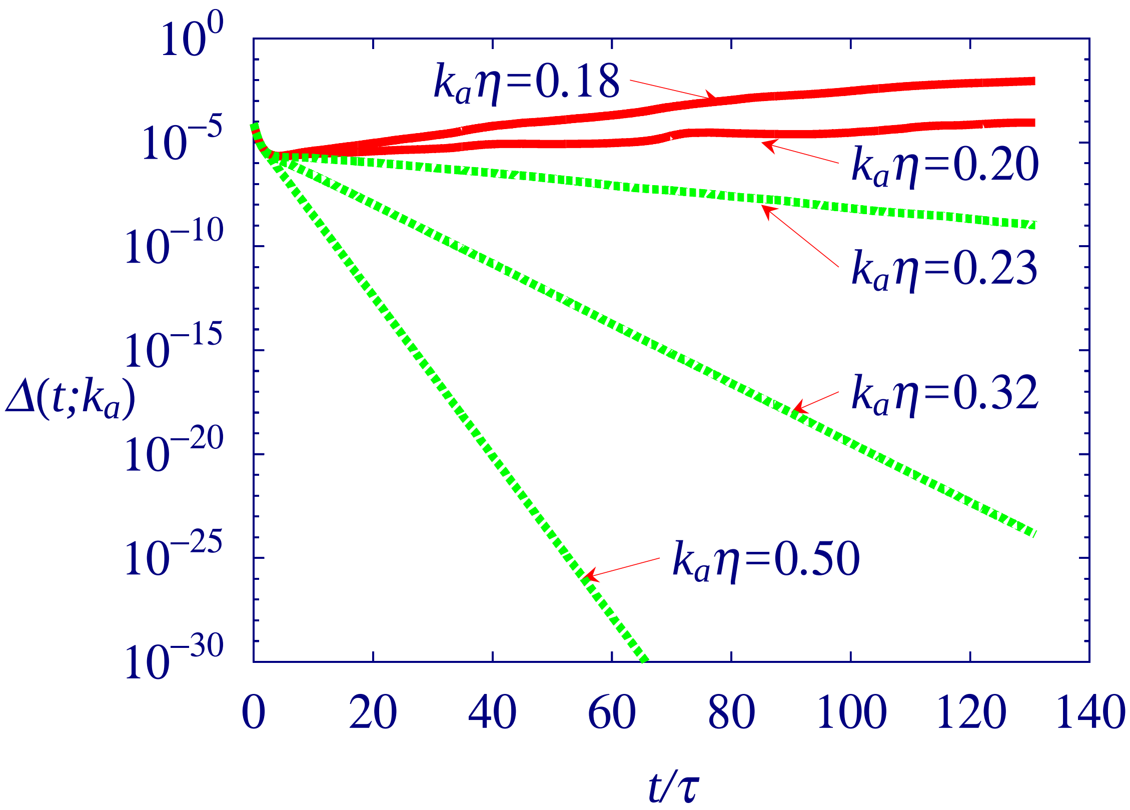
$k_a < k^*$



$k_a > k^*$

2.12 誤差の時間発展

$R_\lambda = 107$



α: 減衰定数

$$\Delta(t) \sim C\exp(-\alpha t).$$

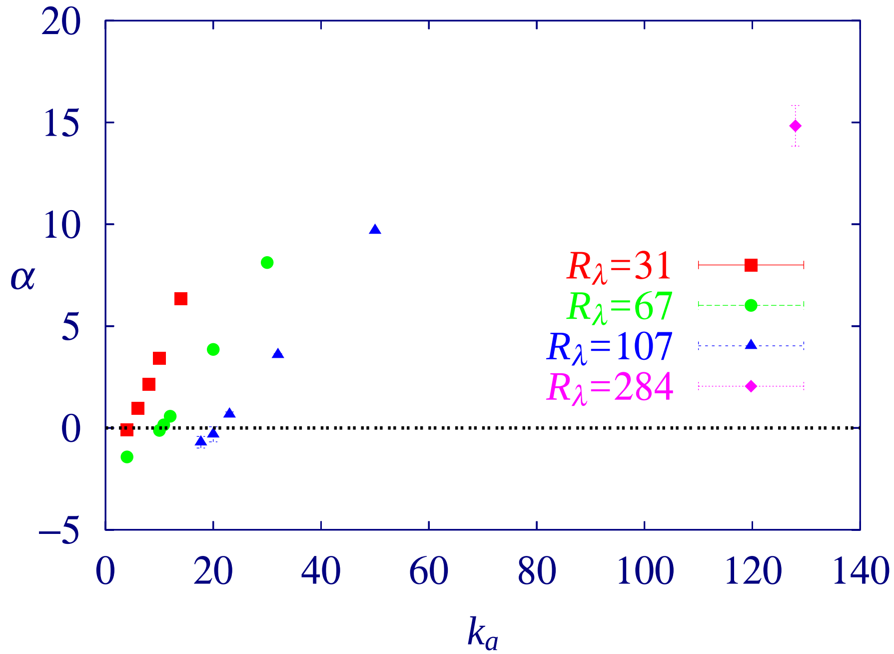
Kolmogorov 長

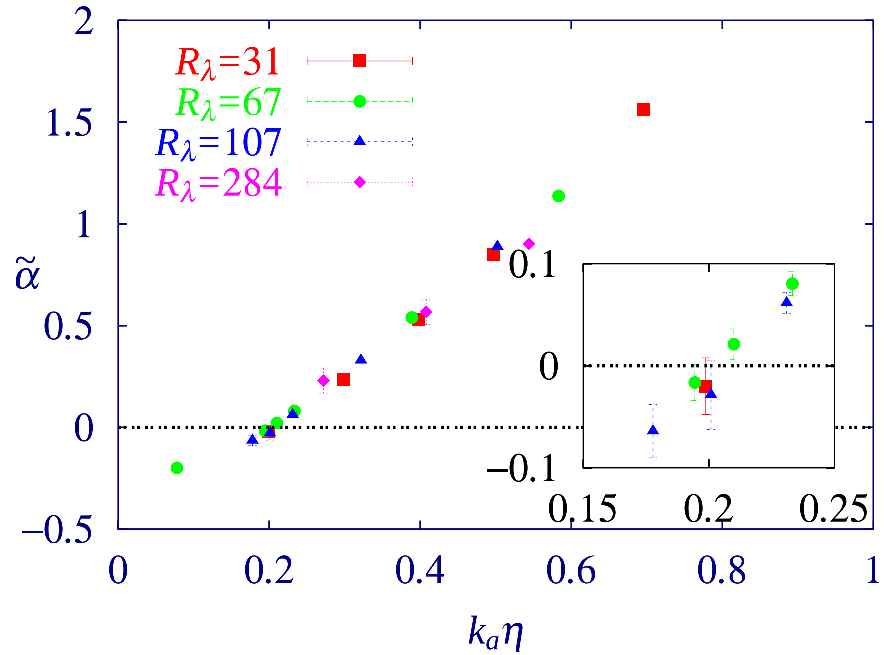
$$\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$$

Kolmogorov 時間

$$\tau = (\nu/\epsilon)^{1/2}$$

2.13　減衰定数と同化波数の関係





規格化された減衰定数

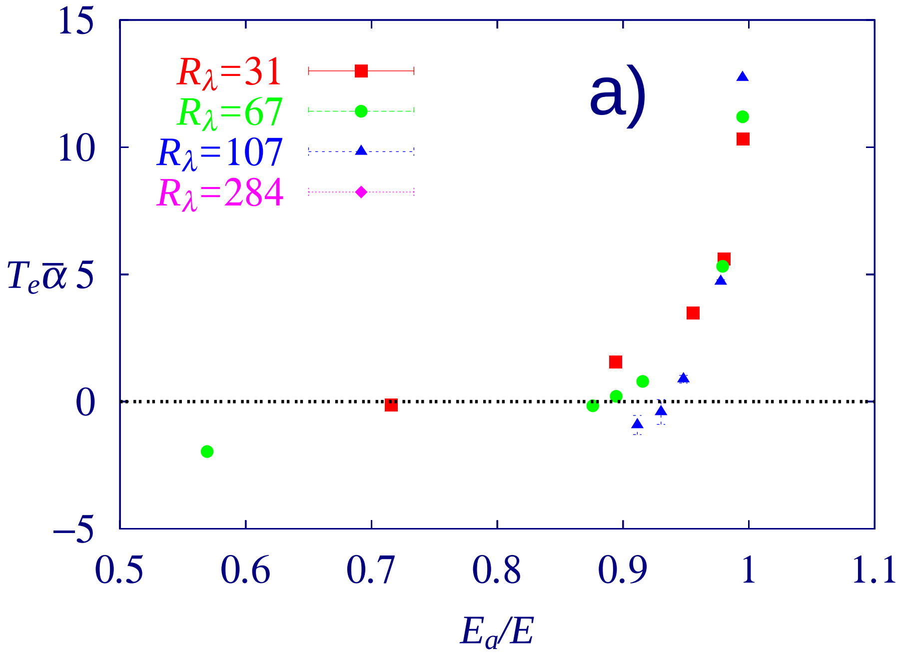
$$\boxed{\tilde{\alpha}(k_a\eta) = \tau\alpha(k_a)} \qquad \eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}, \tau = (\nu/\epsilon)^{1/2}.$$

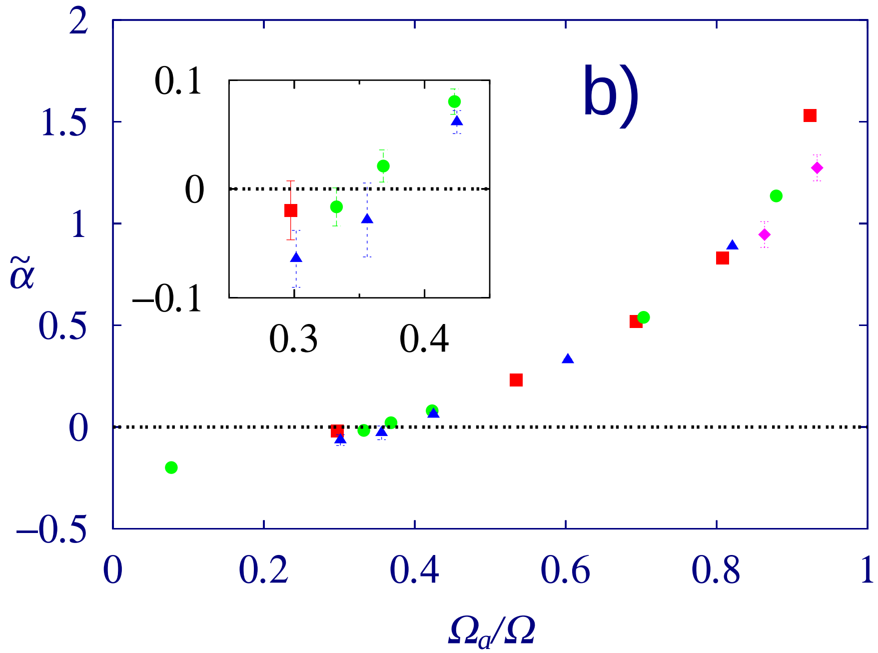
臨界波数

$$\boxed{k^* \sim 0.2\eta^{-1}.}$$

2.14　減衰定数と同化エネルギー／エンストロフィー比率

01234
5678





同化されたエネルギー

$$E_a = \int_0^{k_a} dk E(k)$$

Eddy-turnover time

$$T_e = \frac{L_0}{u'}$$

同化されたエンストロフィー

$$\Omega_a = \int_0^{k_a} dk k^2 E(k)$$

Kolmogorov 時間

$$\tau = (\nu/\epsilon)^{1/2}$$

2.15 まとめ・考察（データ同化）

- 乱流場において、大スケールの時々刻々の十分なデータがあれば、小スケールはそれから再生される。
- 小スケールが再生するための条件は、

$$\boxed{k_a > k^* \qquad k^* \sim 0.2\eta^{-1}}$$

k_a: データ同化する最大波数,

$\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$: Kolmogorov 長.

  - エンストロフィー比: $\boxed{\Omega^*/\Omega \sim 0.30 - 0.35}$
  - 自由度数比（$k_{\mathrm{max}}\eta = 1$ の場合）: $\boxed{N^*/N \sim 0.01}$
- 上の条件は、（本研究の範囲では）Reynolds 数に依存しない。

$\Longrightarrow$ （高 Reynolds）乱流の普遍的性質。

スケール ℓ の渦に対応する Reynolds 数

01234
5678

$$\mathrm{Re}_\ell \equiv \frac{u_\ell \ell}{\nu}, \qquad u_\ell \sim (\epsilon \ell)^{1/3}, \quad \mathrm{Re}_\ell \sim \left(\frac{\ell}{\eta}\right)^{4/3}$$

臨界 Reynolds 数

$$\boxed{\mathrm{Re}_{1/\mathrm{k}^*} \sim (\mathrm{k}^* \eta)^{4/3} \sim 9.}$$

cf. 平面 Poiseuille 流 $\mathrm{Re}_\mathrm{c} = 5722$

小さい渦は「トカゲのシッポ」