クライチナンモデル勉強会 その2

吉田恭 *
Kyo Yoshida
名古屋大学大学院工学研究科計算理工学専攻

平成 13 年 3 月 12 日

1 はじめに

本稿は, 松本さんによる『クライチナンモデル勉強会 その 1』[13] の続きである.

文献 [13] でも紹介されているとおり, クライチナンモデルとは, 相関時間が無限小の速度場によって流されるスカラー場の系である. 速度場の相関時間が無限小のとき, スカラー場の相関について厳密に閉じた方程式が得られる. このことは Kraichnan[8] が 1968 年に指摘しているが, このモデルが乱流研究者の間で脚光を浴びることになったきっかけは, Kraichnan[9] が 1994 年にこのモデルの高次相関が次元解析からずれたスケーリング指数を持ち得ること (異常スケーリング) を指摘したことにある. それ以後, クライチナンモデルの異常スケーリングに関連する研究が盛んに行われた. 本稿の目的は, それらの研究の内容, 流れを簡単に紹介することである. 本稿の内容は, 既存のクライチナンモデルのレビュー Gawędzki & Kupiainen [7] や Frisch & Wirth [5] と重なる部分も多く, これらの文献も併せて参考にされることが薦められる.

まず, 第 2 節では, クライチナンモデルの定義を与える. 文献 [13] では, 速度場相関の時間依存性について δ 関数を初めから仮定していたが, ここでは速度場の相関時間が短い極限としてモデルを定義することにする. 第 3 節では, その定義に基づきスカラー場の 1 次相関方程式を導出する. 2 次相関方程式, 4 次相関方程式の導出は文献 [13] にゆずる. 第 4 節では, 異常スケーリングと相関方程式の斉次解の関係について議論する. 第 5 節では, スカラー場の 4 次相関について斉次解に基づく異常スケーリング指数を摂動的に求めた Gawędzki & Kupiainen [6] の仕事を紹介する. 第 6 節では, モンテカルロ・シミュレーションでスカラー場の 4 次相関のスケーリング指数を求めた Frisch ら [4] の仕事を紹介する. 第 7 節では, その他いくつかの関連研究について簡単に触れる.

*e-mail: kyo@cse.nagoya-u.ac.jp

2　クライチナンモデルの定義

$\theta(\mathbf{x},t)$ は空間時間 $d+1$ 次元上のスカラー場で, 同じ時空間上の速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ に輸送されるとする, 即ち

$$[\partial_t - \kappa\nabla^2 + \mathbf{v}\cdot\nabla]\theta = f. \tag{1}$$

ただし, ここで κ はスカラー場の分子拡散係数であり, f はスカラーに対する外力である. スカラー場 $\theta(\mathbf{x},t)$, 速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, 外力場 $f(\mathbf{x},t)$ は確率変数である. 確率平均は以下 $\langle\cdot\rangle$ で表す. $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ と $f(\mathbf{x},t)$ は外的に与えるもので, 任意の $\mathbf{x},\mathbf{y},t,s$ について $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ と $f(\mathbf{y},s)$ は統計的に互いに独立であるとする.

いま $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ の統計について以下の仮定を設ける.

(A1) $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ の統計は時間空間的に一様で, かつ空間反転対象である.

(A2) ある時間 τ が存在して $|t_1-t_2| \geq \tau$ ならば, $\mathbf{v}(\mathbf{x}^{(1)},t_1)$ と $\mathbf{v}(\mathbf{x}^{(2)},t_2)$ は統計的に独立である.

仮定 (A1) より, 1 点多時刻奇数次モーメントは 0 である:

$$\langle v_{i_1}(\mathbf{x},t_1)\cdots v_{i_n}(\mathbf{x},t_n)\rangle = 0, \qquad n \text{は奇数}.$$

仮定 (A2) の τ は $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ の相関の特徴的な時間スケールを表している.

(A3) τ は θ の特徴的時間スケール τ_θ より十分短く, $O(\frac{\tau}{\tau_\theta})$ の項は無限小として扱える.

この仮定 (A3) がクライチナンモデルの本質的な部分である. この仮定により, 計算で $O(\frac{\tau}{\tau_\theta})$ の項を無視でき, 閉じた方程式を導出できるのである.

記号の簡略化のため演算子 $\beta(\mathbf{x},t)$ を導入する:

$$\beta(\mathbf{x},t) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{v}_i(\mathbf{x},t)\partial_i. \tag{2}$$

また, 今後特に断らない限り, 場の値は空間上のある 1 点 $\mathbf{x}$ での値とし, $\mathbf{x}$ の表記は省略する. 特に β については, $\beta_i = \beta(\mathbf{x},t_i)$ とも書く.

仮定 (A1-3) に加えて θ, β について更にいくつかの仮定を用意する.

(A4) $\phi(\mathbf{x},t)$ は, 時刻 t 以前の β によって決まる. 従って $s-t \geq \tau$ ならば $\phi(\mathbf{x},t)$ と $\beta(\mathbf{y},s)$ は統計的に独立である. また初期場 $\phi(\mathbf{x},0)$ は $\beta(\mathbf{y},s)(s\in[0,\infty))$ と統計的に独立であるとする.

(A5) $\langle\phi(\mathbf{x},t)\rangle$ はある区間 $t\in[0,a)$ で解を持つ.

(A6) 任意の自然数 n について, 演算子 β の 1 点 n 時刻相関は, θ の平均場に作用して発散しない:

$$|\langle\beta_1\cdots\beta_n\rangle\langle\phi(t)\rangle| = C_{t_1,\cdots,t_n,t} < \infty.$$

$\beta(\mathbf{x},t)$ 即ち $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ の統計が Gauss 系であることはここでは仮定されていないことに, 注意されたい. $\mathbf{v}$ について要求されているのは, 基本的に多次相関が発散しないことである.

以上, 式 (1) と仮定 (A1-6) を合わせたものを, 本稿ではクライチナンモデルと定義する.

3　1点相関方程式の導出

クライチナンモデルの 1 点 1 時刻相関 $\langle\theta(\mathbf{x},t)\rangle$ の方程式を導出しよう．以下，簡単のため $\kappa=0, f=0$ として議論する．κ, f の項を復活させるのは容易である．

(A1) より β の 1 点多時刻奇数次モーメント $\langle\beta_1,\cdots\beta_{2n-1}\rangle$ が消えることに注意すると，式 (1), (A4), (A5) より，$t, t+\Delta t\in[0,a)$ について

$$\langle\theta(t+\Delta t)\rangle=\langle\theta(t)\rangle+\sum_{n=1}^{\infty}\int_t^{t_0}dt_1\int_{\gamma_1}^{t_1}dt_2\cdots\int_{\gamma_{2n-1}}^{t_{2n-1}}dt_{2n}\langle\beta_1\cdots\beta_{2n}\rangle\langle\theta(\gamma_{2n})\rangle. \tag{3}$$

となり，かつ右辺の無限和は収束する．ただし $t_0=t+\Delta t$ で，$\gamma_i=\max(t-i\tau,0)$ である．ここで，$t_i(i\geq 2)$ の積分領域を以下のように 2 つに分解する:

$$A_i=[\max(t_{i-1}-\tau,0),t_{i-1}],\qquad \bar{A}_i=[\gamma_{i-1},\max(t_{i-1}-\tau,0)). \tag{4}$$

$t_i\in A_i$ であれば，β_{i-1} と β_i との間には相関があり，$t_i\in\bar{A}_i$ であれば，$\{\beta_1,\cdots,\beta_{i-1}\}$ と $\{\beta_i,\cdots,\beta_n\}$ は統計的に独立である．式 (3) の右辺第 2 項の積分領域を I_n とし，そのうち被積分関数が 0 にならない領域は以下のように直和分解される:

$$\bigsqcup_{i=n/2}^{n}\ \{\ ((t,t_0)\times A_2\times\bar{A}_3\times\cdots\times A_{2n})\text{ の形で } A_j \text{ を } 2i \text{ 個, } \bar{A}_j \text{ を } 2(n-i) \text{ 個含むものの直和 }\} \tag{5}$$

積分区間が $\cdots\times\bar{A}_i\times\bar{A}_{i+1}\times\cdots$ のように $\bar{A}$ が連続すると，β_i は $\beta_1,\cdots,\beta_{i-1},\beta_{i+1},\cdots,\beta_{2n},\theta(\gamma_{2n})$ と統計的に独立となり，$\langle\beta_i\rangle=0$ より，この区間の積分は 0 となる．

仮定 (A6) より，区間 J が A_j の形が i 個 $\bar{A}_j$ の形が $2(n-i)$ 個 の直積であるとき，

$$\left|\int\cdots\int_J dt_1\cdots dt_{2n}\langle\beta_1\cdots\beta_{2n}\rangle\langle\theta(\gamma_{2n})\rangle\right|<C_n\tau^{2i}(\Delta t)^{2(n-i)}\left(1+O\left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)\right) \tag{6}$$

となる $\tau,\Delta t$ に依存しない定数 C_n が存在する．従って，積分領域 I_n の積分では，

$$\begin{aligned}
&\int\cdots\int_{I_n}dt_1\cdots dt_{2n}\langle\beta_1\cdots\beta_{2n}\rangle\langle\theta(\gamma_{2n})\rangle\\
=&\int_t^{t_0}dt_1\int_{A_2}dt_2\int_{\bar{A}_3}dt_3\int_{A_4}dt_4\cdots\int_{\bar{A}_{2n-1}}dt_{2n-1}\int_{A_{2n}}dt_{2n}\langle\beta_1\cdots\beta_{2n}\rangle\langle\theta(\gamma_{2n})\rangle\\
&+C'_n\tau^n(\Delta t)^nO\left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)
\end{aligned} \tag{7}$$

となる．ここで右辺の積分領域は A_i(i が偶数), $\bar{A}_i$ ($i>1$ が奇数) であり，従って被積分関数は，

$$\langle\beta_1\beta_2\rangle\langle\beta_3\beta_4\rangle\cdots\langle\beta_{2n-1}\beta_{2n}\rangle\langle\theta(\gamma_n)\rangle \tag{8}$$

と書ける．

ここで，Δt は θ の時間発展のスケールである，つまり $\Delta t\sim\tau_\theta$，とする．仮定 (A3) より $O\left(\frac{\tau}{\Delta t}\right)$ の項を無視すると，

$$\langle\theta(t+\Delta t)-\theta(t)\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_t^{t_0} dt_1 \int_{\max(t_1-\tau,0)}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{\gamma_{2n-2}}^{t_{2n-2}} dt_{2n-1} \int_{\max(t_{n-1}-\tau,0)}^{t_{2n-1}} dt_{2n}\langle\beta_1\beta_2\rangle\cdots\langle\beta_{2n-1}\beta_{2n}\rangle\langle\theta(\gamma_{2n})\rangle \\
&= \int_t^{t_0} dt_1 \int_{t_1-\tau}^{t_1} dt_2\langle\beta_1\beta_2\rangle\langle\theta(\gamma_2)\rangle + C''\tau\Delta t\left(\frac{\tau}{\Delta t}\right) + O((\Delta t)^2) \\
&= \Delta t\int_{-\infty}^{t_1} ds\langle\beta(t_1)\beta(s)\rangle\langle\theta(\gamma_2)\rangle + C''\tau\Delta t\left(\frac{\tau}{\Delta t}\right) + O((\Delta t)^2). \qquad (9)
\end{aligned}
$$

上式右辺の第二項は第一項に比べて $\frac{\tau}{\Delta t}$ のオーダーなので無視して, 上式の両辺を Δt で割って, $\Delta t \to 0$ の極限をとると,

$$
\frac{\partial}{\partial t}\langle\theta(t)\rangle = \int_{-\infty}^{0} ds\langle\beta(0)\beta(s)\rangle\langle\theta(t)\rangle = V_{ij}(\mathbf{0})\partial_i\partial_j\langle\theta(t)\rangle \qquad (10)
$$

となり, 1 点相関 $\langle\theta\rangle$ について 閉じた式を得る. ただし, ここで

$$
V_{ij}(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{0} ds\langle v_i(\mathbf{x}+\mathbf{r},0)v_j(\mathbf{x},s)\rangle \qquad (11)
$$

である.

多次相関に就いても, 同様に閉じた方程式を得られる. 特に 2 点相関, 4 点相関の場合の方程式の導出は, [13] を参考にされたい.

4 相関方程式の斉次解と異常スケーリング

今, 外力 f の相関を

$$
\int_{-\infty}^{0}\langle f(\mathbf{x}+\mathbf{r},t)f(\mathbf{x},s)\rangle = F\left(\frac{r}{L}\right), \qquad r = |\mathbf{r}| \qquad (12)
$$

と書く. ここで L は外力の相関の特徴的空間スケールである. また, 速度場の 2 次の相関を具体的に与える. 速度場は等方的であり, あるスケーリング領域 $\eta \ll r = |\mathbf{r}| \ll L$ が存在し, その領域内で速度差 $\delta\mathbf{v}(\mathbf{x},\mathbf{r},t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{r},t) - \mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ の 2 次相関がスケーリング指数 $0 < \xi < 2$ を持つとする. このとき, 速度差の 2 次相関 $S_{ij}(\mathbf{r})$ は以下のように与えられる.

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(\mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{0} ds\langle\delta v_i(\mathbf{x},\mathbf{r},t)\delta v_j(\mathbf{x},\mathbf{r},t+s)\rangle \\
&= 2[V_{ij}(\mathbf{0},t) - V_{ij}(\mathbf{r},t)] \\
&= 2r^{\xi}D[(d-1+\xi)\delta_{ij} - \xi\frac{r_i r_j}{r^2}]. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

また, この速度場のスケーリング領域における $r = |\mathbf{r}|$ は, スカラー場について分子拡散の支配するスケールより十分大きいとしよう. そのとき, このスケーリング領域では, 拡散項は無視できるので $\kappa = 0$ とみなせる. また $r = |\mathbf{r}| \ll L$ であるから, 外力の相関は定数 $F(r) \sim F(0)$ とみなせる.

以下, θ の統計はスケーリング領域では時間的に定常, 空間的に一様な状態が実現されるとしよう. そのとき 2 点 1 時刻相関

$$
\Theta_2(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle\theta(\mathbf{x}+\mathbf{r},t)\theta(\mathbf{x},t)\rangle \qquad (14)
$$

の方程式は以下のように与えられる ([13] 参照).

$$\mathcal{M}_2\Theta_2(\mathbf{r},t) = F(0), \tag{15}$$

$$\mathcal{M}_2 = -S_{ij}(\mathbf{r})\partial_{\mathbf{r}^i}\partial_{\mathbf{r}^j} \tag{16}$$

スカラー場の 2 次の構造関数:

$$S_2 \stackrel{\text{def}}{=} \langle(\theta(\mathbf{x}+\mathbf{r},t)-\theta(\mathbf{x},t))^2\rangle = 2[\Theta_2(\mathbf{0})-\Theta_2(\mathbf{r})] \tag{17}$$

はスケーリング領域で,

$$\mathcal{M}_2 S_2(\mathbf{r}) = -2F(0) \tag{18}$$

を満たす. ここで, θ の統計も等方的な場合を考察する. このとき次元解析により,

$$S_2^{(I)}(\mathbf{r}) \propto r^{\zeta_2^{(I)}}, \qquad \zeta_2^{(I)} = 2-\xi \tag{19}$$

となる解があることが分かる. ここで上添字 (I) は非斉次方程式 (18) の解 (inhomogenous solution) と対応していることを示している.

さて, $\mathcal{M}_2$ が線形演算子であるから, 上の (18) の解 $S_2^{(I)}$ に斉次方程式

$$\mathcal{M}_2 S_2^{(H)}(\mathbf{r}) = 0 \tag{20}$$

の解 (homogeneous solution) を加えた

$$S_2(\mathbf{r}) = S_2^{(I)}(\mathbf{r}) + S_2^{(H)}(\mathbf{r}) \tag{21}$$

もまた (18) の解である. (20) は同次方程式であるから, その解は $S_2^{(H)}(\mathbf{r}) \propto r^{\zeta_2^{(H)}}$ の形で与えられる. そして, そのスケーリング指数 $\zeta_2^{(H)}$ はもとのパッシヴスカラーの方程式から導かれた演算子 $\mathcal{M}_2$ の性質によってのみ決まっていて, もはや外力とのバランスによる次元解析のそれと一致する必然はない. つまり次元解析と異なるスケーリング (異常スケーリング) を示す可能性がある.

実際, 式 (20) に $S_2^{(H)}(\mathbf{r}) = r^{\zeta_2^{(H)}}$ を代入すれば, $\zeta_2^{(H)}$ の代数方程式が得られ, その解は $\zeta_2^{(H)} = 0, -\xi+2-d$ であることが分かる. 今スケーリング領域の両端 $r=\eta, L$ で $S_2(\eta) \ll S_2(L)$ と考えるのは物理的に妥当である. このとき $S_2(\mathbf{r})$ の解のスケーリングで支配的となるのは, 正の指数 $\zeta_2^{(I)}$ を持つ非斉次解の方である. 従って, スカラーの 2 次相関のスケーリングは次元解析と等しい指数 $\zeta_2 = 2-\xi$ を示す.

5 4 次相関のスケーリング指数の摂動的計算

スケーリング領域内 $\eta \ll r \ll L$ で定常状態の 4 点 1 時刻相関方程式は次のように与えられる ([13] 参照):

$$\mathcal{M}_4\langle\theta(\mathbf{x}^{(1)})\theta(\mathbf{x}^{(2)})\theta(\mathbf{x}^{(3)})\theta(\mathbf{x}^{(4)})\rangle = F(0)\sum_{a,b=1}^{4}\langle\theta(\mathbf{x}^{(a)})\theta(\mathbf{x}^{(b)})\rangle \tag{22}$$

$$\mathcal{M}_4 = -\kappa\sum_{a=1}^{4}\partial_i^{(m)}\partial_i^{(m)} + \sum_{a<b}S_{ij}(\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(2)})\partial_i^{(m)}\partial_j^{(n)} \tag{23}$$

ここで, m,n は $1,2,3,4$ の値をとる．スカラー場の 4 次の構造関数

$$S_4(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle(\theta(\mathbf{x}+\mathbf{r})-\theta(\mathbf{x}))^4\rangle \tag{24}$$

は, (22) よりスケーリング領域で $S_4^{(I)}(\mathbf{r}) \propto r^{\zeta_4^{(I)}}, \zeta_4^{(I)} = 2\zeta_2^{(I)}$ となる, 次元解析と一致する解があることが分かる.

前節と同様の議論により, (22) の非斉次解 $\langle\theta(\mathbf{x}^{(1)})\theta(\mathbf{x}^{(2)})\theta(\mathbf{x}^{(3)})\theta(\mathbf{x}^{(4)})\rangle = \Psi^{(I)}(\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)},\mathbf{x}^{(3)},\mathbf{x}^{(4)})$ に

$$\mathcal{M}_4\Psi^{(H)}(\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)},\mathbf{x}^{(3)},\mathbf{x}^{(4)}) = 0 \tag{25}$$

を満たす斉次解 $\Psi^{(H)}$ を加えても, もとの方程式 (22) の解である.

この斉次解のスケーリング指数 $\zeta_4^{(H)}$:

$$\lambda^{\zeta_4^{(H)}}\Psi^{(H)}(\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)},\mathbf{x}^{(3)},\mathbf{x}^{(4)}) = \Psi^{(H)}(\lambda\mathbf{x}^{(1)},\lambda\mathbf{x}^{(2)},\lambda\mathbf{x}^{(3)},\lambda\mathbf{x}^{(4)}) \tag{26}$$

は、Gawędzki & Kupiainen [6] により, ξ が 0 近傍での表現が摂動展開によって導かれた．その指数は $\zeta_4^{(H)} < \zeta_4^{(I)}$ であり, 従って (スケーリング領域内の) 小スケールでは斉次解が支配的で, 4 次相関はそれに起因して異常スケーリングすることが分かった.

以下に [6] のスケール指数 $\zeta_4^{(H)}$ を求める方法の概略を示す．まず, $\xi=0$ のときの $\mathcal{M}_4$ を $\mathcal{M}_{4,0}$ と書く．ここで,

$$\mathcal{M}_{4,0}\Psi_0^{(H)} = 0 \tag{27}$$

の解となる $\mathbf{x}^{(1)},\cdots,\mathbf{x}^{(4)}$ の同次多項式 $\Psi_0^{(H)}$ には次数が 0 と 4 のものがある．次数が 0 の場合は定数である．いま, 4 次相関が 4 点の置換, 回転, 並進について不変であるとする．すると, 次数が 4 では一般に a,b,c を定数として,

$$\begin{aligned} & a\sum_{\{n,n'\}}(\mathbf{x}^{(n)}-\mathbf{x}^{(n')})^4 + b\sum_{\{n,m\},\{n,m'\}}(\mathbf{x}^{(n)}-\mathbf{x}^{(m)})^2(\mathbf{x}^{(n)}-\mathbf{x}^{(m')})^2 \\ + \;& c\sum_{\{n,n'\},\{m,m'\}}(\mathbf{x}^{(n)}-\mathbf{x}^{(n')})^2(\mathbf{x}^{(m)}-\mathbf{x}^{(m')})^2 \end{aligned} \tag{28}$$

と書ける．ただし m,m',n,n' は $1,2,3,4$ の値をとり, $\sum_{\{n,m\}}$ は n と m が等しくない組合せについて和をとることを意味する．式 (27) は, a,b,c について

$$2(d+2)a + 2(2d+1)b + dc = 0 \tag{29}$$

の条件を与える．従って斉次解となる 4 点相関で独立なものは 2 つある．4 点相関に適当な内積 $(\cdot,\cdot)$ を定義して, R^4f_1, R^4f_2 がそれぞれ斉次解となるように, 正規直交基底 (f_1,f_2,f_3) をとれる．ただし $R \stackrel{\text{def}}{=} [\frac{1}{2}\sum_{\{n,m\}}(\mathbf{x}^{(n)}-\mathbf{x}^{(m)})^2]^{\frac{1}{2}}$．ここで $\xi>0$ が十分に小さいとして, 演算子 $\mathcal{M}_4$ を ξ で

$$\mathcal{M}_4 = \mathcal{M}_{4,0} + 2\xi DV_4 + O(\xi^2) \tag{30}$$

のように展開し, $\Psi^{(H)} = R^{4+\xi\lambda}(a_1f_1 + a_2f_2 + \xi a_3f_3) + O(\xi^2)$ の形の

$$\mathcal{M}_4\Psi^{(H)} = O(\xi^2) \tag{31}$$

の解を探す．計算の詳細は省くが，結局 $\lambda = -\frac{8+2d}{2+d}$ と求まり，即ち

$$\zeta_4^{(H)} = 2\zeta_2^{(I)} - \frac{4}{2+d}\xi + O(\xi) \tag{32}$$

となる．

一方で，Kraichnan の 1994 年の論文では，Linear Ansatz の仮定をもとに，高次構造関数のスケーリング指数を

$$\zeta_{2p} = \frac{1}{2}\sqrt{4pd\zeta_2 + (d-\zeta_2)^2} - \frac{1}{2}(d-\zeta_2), \qquad \zeta_2 = 2-\xi \tag{33}$$

と求めていた．この指数は $\xi = 0$ で $\zeta_4 \neq 4$ であり，先の摂動展開法の指数 (32) とは異なる値を与えている．

6 シミュレーションによる異常スケーリングの計算

クライチナンモデルの高次相関の異常スケーリング指数 ζ_n を斉次解の解析で $0 < \xi < 2$ の全領域で求めるのは，4 次の場合においてさえ困難であり，現在のところ $\xi = 0$ の近傍 (前節参照)，または $\xi = 2$ の近傍での振舞が摂動的に求められているのみである．

一方で，Frisch ら [3] は，ラグランジアン法と呼ばれるモンテカルロ・シミュレーションにより，ζ_4 を計算した．これは，オイラー的に場全体をシミュレーションするのではなく，n 点相関を計算するために，n 点の流体粒子の軌跡とその点のスカラー場の値のみを時間的に追うという方法である．今拡散係数 $\kappa = 0$ とおく．時刻 $t = 0$ で空間座標 $\mathbf{x}$ にある粒子のスカラー場の値は

$$\theta(\mathbf{x}, 0) = \int_{-T}^{0} dt f(\mathbf{a}(t, \mathbf{x}), t) \tag{34}$$

で与えられる．ただし，$\mathbf{a}(s, \mathbf{x})$ は $t = 0$ で $\mathbf{a}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ にある流体粒子の $t = s$ における位置

$$\mathbf{a}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} - \int_{t}^{0} ds \mathbf{v}(\mathbf{a}(t, \mathbf{x})) \tag{35}$$

であり，また任意の $\mathbf{x}$ について十分過去 $t = -T$ で $\theta(-T, \mathbf{x}) = 0$ とした．このとき，t=0 でのスカラー場の 2 点 1 時刻相関は

$$\langle \theta(\mathbf{x}^{(1)})\theta(\mathbf{x}^{(2)}) \rangle = \left\langle \int_{-T}^{0} ds_1 \int_{-T}^{0} ds_2 \langle f(\mathbf{a}(s_1, \mathbf{x}^{(1)}), s_1) f(\mathbf{a}(s_2, \mathbf{x}^{(2)}), s_2) \rangle_f \right\rangle_v \tag{36}$$

で与えられる．今，速度場 $\mathbf{v}$ と外力 f は統計的に独立と仮定しているので，それぞれについての確率平均を別々にとることができる．ここで，$\langle \cdot \rangle_v$ は $\mathbf{v}$ に関する確率平均，$\langle \cdot \rangle_f$ は外力 f に関する確率平均である．

今，外力の統計について特徴的空間スケールを L として，

$$\int_{-\infty}^{t} ds \langle f(\mathbf{x}^{(1)}, t) f(\mathbf{x}^{(2)}, s) \rangle = \begin{cases} F, & |\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}| < L, \\ 0, & |\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}| \geq L, \end{cases} \tag{37}$$

かつ $\langle f(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{y}, t+s) \rangle = 0, \forall t > \tau_f$ となる特徴的時間スケール τ_f は十分に小さいとする．

すると,

$$\langle\theta(\mathbf{x}^{(1)})\theta(\mathbf{x}^{(2)})\rangle = C\langle T_{12}(L)\rangle_v \tag{38}$$

と書ける. ただし, $T_{12}(L)$ は $t=0$ で $\mathbf{x}^{(1)}$ と $\mathbf{x}^{(2)}$ にある流体粒子が過去において互いの距離が L 以下であった時間である. 4 次相関については, f の相関時間が十分短いことを使って,

$$\langle\theta(\mathbf{x}^{(1)})\theta(\mathbf{x}^{(2)})\theta(\mathbf{x}^{(3)})\theta(\mathbf{x}^{(4)})\rangle = \langle T_{12}(L)T_{34}(L)\rangle_v + \langle T_{13}(L)T_{24}(L)\rangle_v + \langle T_{14}(L)T_{23}(L)\rangle_v \tag{39}$$

と表せる. 相関時間が短く, 式 (13) の統計に従う速度場を発生させ, $t=0$ で $\mathbf{x}^{(1)},\cdots,\mathbf{x}^{(n)}$ にある n 個の流体粒子を十分長時間 (T) 過去に向かって軌跡を追うモンテカルロ・シミュレーションを行えば, (39) の右辺が計算でき, 即ち 4 次相関が得られる. 拡散 κ の効果や $\mathbf{x}^{(1)}=\mathbf{x}^{(2)}$ となる場合の対処として, 流体粒子の運動にブラウン運動を加えるなどの方法があるが, それについてはここでは触れない.

このラグランジアン法によるモンテカルロ・シミュレーションにより, $d=2,3$ で $0<\zeta<2$ の全領域のスケーリング指数 ζ_4 が得られ, それは斉次解のスケーリング指数の $\zeta=0$ または $\zeta=2$ 近傍の摂動的解析の結果を支持した. つまり, クライチナンモデルの異常スケーリングが実際に斉次解に起因することが示された. Linear Ansatz の仮定により導かれたスケーリング指数は, 特に $\zeta=0$ または $\zeta=2$ の近傍で, シミュレーションの結果と合わず, つまりこの仮定が適当でないことも示唆された.

7 その他の研究

これまで見たように, 相関時間無限小の速度場に流されるパッシヴスカラー場のモデルは, 相関について厳密な閉じたが成立ち. そして高次相関については, その斉次方程式の解に起因する異常スケーリングが存在することが分かった. この斉次解解析により異常スケーリング指数を求める手法は, Gawędzki & Kupiainen [6] 以降, クライチナンモデルを拡張したものにも, 適用された.

まず, スカラー場の統計が等方的であるという条件を外した場合, 相関の非等方成分については, すでに 2 次相関から異常スケーリングを示すことが分かる. 今 $d=2$ として考えると, 2 次相関の角波数 l の成分

$$\langle\theta(\mathbf{x}+\mathbf{r})\theta(\mathbf{x})\rangle \propto r^{\zeta_2^{(l)}}\cos(l\phi), \tag{40}$$

のスケーリング指数 $\zeta_2^{(l)}$ は, 簡単な計算で

$$\zeta_2^{(l)} = \frac{1}{2}(-\xi+\sqrt{\xi^2+4(1+\xi)l^2}), \tag{41}$$

であることが分かる (Fairhall ら [2]). 一般に非等方成分のスケーリング指数は角波数 l が大きい程, 大きくなる. つまり, 境界条件などで決まる大スケールの非等方性は l が大きい程小スケールに浸透しにくいことを意味する. これは, 大スケールの非等方性に関わらず小スケールでは乱流は等方的であろう, という乱流研究で経験的によく使われる仮定と合致している.

Vergassola [11] は, スカラー場を磁場のアナロジーで, パッシヴソレノイダルヴェクトル場 $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ に置き換えたモデル:

$$\partial_t\mathbf{B} = -\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{v} + \kappa\nabla^2\mathbf{B} + \mathbf{f} \tag{42}$$

を解析した．このモデルがスカラー場のモデルと特に異なる点は, $\kappa = 0$ で一般に 1 点 1 時刻 2 次相関 (エネルギーの 2 倍) $\langle |B|^2 \rangle$ が保存しないため, κ が有限でもエネルギーが時間に伴い増加し続ける場合 (ダイナモ効果) があり得るところである．Vergassola は $d = 2$ ではダイナモ効果は無く, $d = 3$ なら $0 < \xi < 1$ でダイナモ効果が無いことを示した．このとき統計的定常状態を議論することに意味があり, 2 次相関の等方的な場合でも, 斉次解に起因する異常スケーリングがあることが示された．また, 2 次相関の非等方成分のスケーリングについては, Arad ら [1] の仕事がある．

また, Navier-Stokes 乱流に近づく次の一歩として, パッシヴソレノイダルヴェクトル場の運動方程式に空間的に非局所的な圧力項を模した項を加えたモデルが, Yoshida & Kaneda [12] により解析されている．

クライチナンモデルに関する研究は, 他にも色々あるが, 筆者がフォローしていない部分も多く, ここではこれ以上紹介はしない．この分野の他の研究については, Shraimann & Siggia [10] のレビューの文献リスト等を参考にされたい．

8　終わりに

クライチナンモデルは, 流体運動に特徴的な移流項 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ を含みながら, 他の点では Navier-Stokes 方程式に比べて簡単化がなされている: スカラー場の方程式である, 速度場の相関時間が無限小である, 線形である, など．このようなモデルでも, Navier-Stokes 乱流でも見られる相関の異常スケーリングが現れることは興味深い．そしてクライチナンモデルの相関の異常スケーリングの本質は斉次解にあることが明らかになった．しかし, Navier-Stokes 乱流の場合の異常スケーリングの本質が何なのかは, 未だ明らかではない．クライチナンモデルの結果をそのまま Navier-Stokes 乱流に持っていくことには無理があろう．特に線形と非線形の違いは大きい．しかし, 今までの乱流の異常スケーリングに関する研究のほとんどが, 運動方程式と直接結び付かない現象論であったことをふりかえれば, 運動方程式をもとに解析したこのクライチナンモデルの知見は, 何らかの形で Navier-Stokes 乱流の研究に生かせるであろう, と筆者は期待している．

謝辞

2000 年流体若手夏の学校で, この勉強会の機会を与えてくださった, 運営の九州応力研及川研究室の皆さん, テキストの準備や議論をしてくださった松本剛さん, クライチナンモデルや確率過程について私に教示, 議論してくださった金田行雄先生, 阪本雄二さんに感謝します．また, 本研究は一部学術振興会未来開拓事業 (計算科学プロジェクト– 地球規模流動現象解明のための計算科学) による助成を受けて行われた．

参考文献

[1] I. Arad, L. Biferale, and I. Procaccia. Nonperturbative spectrum of anomalous scaling exponents in the anisotropic sectors of passively advected magnetic fields. *Phys. Rev. E*, Vol. 61, pp. 2654–2662, 2000.

[2] A. Fairhall, O. Gat, V.S. L'vov, and I. Procaccia. Anomalous scaling in a model of passive scalar advection: Exact results. *Phys. Rev. E*, Vol. 53, p. 3518, 1996.

[3] U. Frisch, A. Mazzino, A. Noullez, and M. Vergassola. Lagrangian method for multiple correlations in passive scalar advection. *Phys. of Fluids*, Vol. 11, pp. 2178–2186, 1999.

[4] U. Frisch, A. Mazzino, and M. Vergassola. Intermittency in passive scalar advection. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 80, pp. 5532–5535, 1998.

[5] U. Frisch and A. Wirth. Intermittency of passive scalars in delta-correlated flow: Introduction to recent work. In O. Boratav, A. Eden, and A. Erzan, editors, *Low-Dimensional Models in Statistical Physics and Quantum Field Theory*, pp. 53–64, Berlin, 1996. Springer-Verlag.

[6] K. Gawędzki and A. Kupiainen. Anomalous scaling of the passive scalar. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 75, pp. 3634–3637, 1995.

[7] K. Gawędzki and A. Kupiainen. Universality in turbulence: An exactly solvable model. In H. Grosse and L. Pittner, editors, *Low-Dimensional Models in Statistical Physics and Quantum Field Theory*, pp. 71–105, Berlin, 1996. Springer-Verlag.

[8] R. H. Kraichnan. Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 11, pp. 945–953, 1968.

[9] R. H. Kraichnan. Anomalous scaling of a randomly advected passive scalar. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 72, pp. 1016–1019, 1994.

[10] B. I. Shraiman and E. D. Sigga. Scalar turbulence. *Nature*, Vol. 405, pp. 639–646, 2000.

[11] M. Vergassola. Anomalous scaling for passively advected magnetic fields. *Phys. Rev. E*, Vol. 53, pp. R3021–R3024, 1996.

[12] K. Yoshida and Y. Kaneda. Anomalous scaling of anisotropy of second-order moments in a model of a randomly advected solenoidal vector field. *Phys. Rev. E*, Vol. 63, p. 016308, 2001.

[13] 松本剛. クライチナンモデル勉強会 その 1. 本講究録, 2001.