

〔特集〕乱流混合・拡散

乱流拡散とLagrange速度相関

*名古屋大学大学院工学研究科 吉田 恭†

Turbulent Diffusion and Lagrangian Velocity Correlation

Kyo YOSHIDA, Graduate School of Engineering, Nagoya Univ.

1 はじめに

乱流中において、ある時刻に狭い領域に集中していた物質や熱は、一般にその後時間とともに拡散する。この現象を乱流拡散という。物質や熱の拡散は流体が静止している場合もおこり、これはミクロな分子運動に起因するもので、分子拡散という。乱流拡散は分子拡散に比べて桁違いに大きく、その定性的・定量的評価は応用上も重要である。

分子拡散についてはミクロな分子運動とマクロな拡散の対応づけは確立しているが、一方で流体運動と乱流拡散の対応は未だ確立していない。乱流拡散の理解にはいくつかの方法があり得るだろうが、本稿では、乱流拡散が一般に流体粒子の運動に沿った速度、Lagrange速度、の相関で記述されることに着目した解析について解説する。

まず、第2節で分子拡散について復習し、第3節で分子拡散からの類推がなぜ乱流拡散に適用できないかを議論する。第4、5節では、Lagrange速度相関に基づく乱流拡散に関する最近の研究をいくつか紹介する。また第6節では、数値シミュレーションの乱流モデルで用いる渦拡散の評価について触れる。

2 分子拡散

マクロなスケール(連続体近似が妥当なスケール)では静止している流体中に、流体を構成する

分子とは別種の分子(以下溶質分子と呼ぶ)が N 個含まれているとする。個々の溶質分子の時刻 t での速度を $v(t)$ と書く。 v はどの溶質分子に着目するかに依存するが、以下ではそれは露わに書かない。また $\langle \cdot \rangle$ を N 個の溶質分子についての統計平均とする。ここで、2時刻速度相関

$$V_{ij}(t', t) \equiv \langle v_i(t') v_j(t) \rangle, \quad (1)$$

($i, j = 1, 2, 3$) を導入する。時刻 t_0 から時刻 t の間における溶質分子の変位を $\delta x(t_0, t)$ と表すと、その2乗平均は V を用いて

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}(t_0, t) &\equiv \langle \delta x_i(t_0, t) \delta x_j(t_0, t) \rangle \\ &= \int_{t_0}^t ds' \int_{t_0}^t ds V_{ij}(s', s), \end{aligned} \quad (2)$$

と表される。

溶質分子は他の分子との相互作用によりランダムな熱揺動を受け、一般に $V_{ij}(t', t)$ は $|t' - t|$ とともに減少する。2時刻相関の特徴的時間スケールを表す量として相関時間 τ

$$\tau \equiv \frac{1}{3\bar{v}^2} \int_0^\infty ds V_{ii}(t_0 + s, t_0) \quad (3)$$

を定義する、ただし $\bar{v}^2 \equiv V_{ii}(t_0)/3$ で、今後繰り返す添字については和をとるものとする。また統計的定常性が成り立ち、 τ は t_0 に依存しないものとする。

ここで、次の仮定を設ける。

(A1) 相関時間 τ は着目するマクロの時間スケールより十分短い。

* 〒464-8603 名古屋市中種区不老町
(現所属: 筑波大学大学院数理物質科学研究科,
〒305-8671 つくば市天王台 1-1-1)

† E-mail: kyoshida@cm.ph.tsukuba.ac.jp

マクロに静止してる流体は特別な方向を持たず、対称性より $\Delta_{ij}(t_0, t)$ は等方テンソル、つまり $(\Delta(t_0, t)/3)\delta_{ij}$ と書ける。仮定 (A1) によりマクロな時間間隔 $t - t_0 (\gg \tau)$ における $\Delta(t_0, t)$ は、

$$\Delta(t_0, t) = 6\kappa(t - t_0), \quad \kappa \equiv \tau\bar{v}^2, \quad (4)$$

であることが示される。

更に次の仮定を設ける。

(A2) 個々の溶質分子の運動は互いに独立である。

これは、 v に関する相関距離 λ が十分小さく、マクロのスケールから見て殆ど同じ座標にある異なる溶質分子も、殆どの時間において互いに λ より十分離れていることを要請している。

仮定 (A1), (A2) から、マクロなスケールでの単位体積あたりの溶質分子の数密度 $\theta(x, t)$ についての方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \theta \quad (5)$$

が導かれる。(例えば、文献¹⁾参照)これはよく知られた拡散方程式であり、 κ は拡散係数である。

例えば、常温・常圧の気体において、気体分子と同程度の溶質分子を考え、溶質分子の速度の相関時間 τ と相関距離 λ を、気体分子の平均衝突時間間隔と平均自由行程で見積もれば、 $\tau \sim 10^{-10}$ s, $\lambda \sim 10^{-6} - 10^{-5}$ cm のオーダーとなる。これらのオーダーは通常、流体運動の時間・空間スケールのオーダーより十分小さく、仮定 (A1) と (A2) が妥当であることが見てとれよう。

3 乱流拡散と分子拡散の違い：何が問題か

第2節の議論の類推を、乱流拡散に当てはめることを考える。乱流状態ではマクロな流体運動が存在し、第2節の v は溶質分子の速度から流体粒子の速度と読み換える。このとき流体粒子の運動に沿った速度 v を Lagrange 速度といい、(1) で定義される $V_{ij}(s, t)$ は2時刻 Lagrange 自己速度相関という。式(2)で定義される拡散 Δ_{ij} について(4)のような式を導くのが目標となるが、乱

流拡散の場合には分子拡散と異なり以下のような問題が生じる。

(P1) 相関時間 τ は着目する時間スケールより十分短くはない。従って仮定 (A1) は成り立たない。

(P2) 相関距離 λ は着目する空間スケールより十分短くはない。従って異なる流体粒子の運動には相関があり、仮定 (A2) は成り立たない。

(P3) 乱流の統計は定常、一様等方的とは限らないので、拡散 $\Delta_{ij}(t_0, t)$ も等方テンソルとは限らず、その値も流体粒子アンサンブルをとる領域や初期時刻 t_0 に依存し得る。

十分に高い Reynolds 数の乱流の境界等から離れた領域の十分小スケールにおいては、乱流の統計は準定常で一様等方的である、と一般に考えられており、実験によっても支持されている。よって解析の適用領域を限定すれば、(P3) は問題にしなくても良い場合がある。

しかし (P1) と (P2) はより本質的な問題である。しばしば乱流においては、最大渦の空間スケールは系全体のスケールにおよび、またその渦の時間スケールも我々が拡散について知りたいと思う時間スケールよりも非常に長い。このような場合、乱流速度場 v を何らかの方法で $v = \bar{v} + v'$ とマクロに変動する部分 \bar{v} とミクロに変動する部分 v' に分けて、 v' による拡散に分子拡散からの類推を適用しよう、という発想は自然であろう。しかし、乱流中には大小様々なスケールの渦が連続的に存在し、それぞれのスケールの渦は異なった時間スケールで変動しているため、どのように \bar{v} と v' に分けても、 v' の時間・空間スケールが \bar{v} のそれらに比べて十分に小さくなるようにするのは、一般に困難である。結局、乱流拡散においては仮定 (A1) と (A2) は成り立たず、その帰結である(4)、(5)が成り立つとも期待しにくい。

ここで仮定 (A1) と (A2) が成り立たなくても、拡散 Δ と Lagrange 速度相関 V の関係式(2)は厳

密に成立することに注意されたい．本稿では以降，Lagrange 速度相関を通して拡散の定量的評価を行なう方法を，最近の研究を例に紹介する．

4 1 粒子拡散

式(2)で定義される $\Delta_{ij}(t_0, t)$ は，1つの流体粒子がある時間間隔 $t - t_0$ にどの程度変位するかの指標を与えており（第5章で扱う2粒子拡散と区別して）1粒子拡散とも呼ばれる．この節では，成層乱流や β 平面上の乱流で，成層や β 効果が強い場合の1粒子拡散 Δ_{ij} を扱う．

成層乱流は，大気や海洋の流れに見られる．鉛直方向に平均密度勾配があるために，鉛直方向と水平方向で乱流の統計は異なり，乱流拡散も非等方になる． β 平面は，回転球面上の流体運動をその接平面上の運動で近似したもので， β 効果は Coriolis 力による効果を表す．これは，鉛直方向のスケールを無視した地球規模の大気流れの簡単なモデルになっている． β 効果のため東西方向と南北方向で拡散が異なる．

大気や海洋中の物質の拡散は，大気汚染・海洋汚染などの環境問題とも深い関わりを持つ．本稿では，現実の大気や海洋と比べて成層や β 効果が非常に強い場合の解析を紹介するが，極限的な例の解析による知見は，より現実的な場合の理解・解析の出発点となろう．

以降は非圧縮性流体を考える．まず，流体の速度場を $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ とし，2点2時刻 Euler 速度相関

$$U_{ij}(\mathbf{r}, t', t) = \langle u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t') u_j(\mathbf{x}, t) \rangle_{\mathbf{x}} \quad (6)$$

を導入する．ここで $\langle \cdot \rangle_{\mathbf{x}}$ は，適当に選んだ座標 $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}$ についての平均，または N を十分大きくした極限であるところの適当な領域 D についての空間平均 $\langle f(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbf{x}} = |D|^{-1} \int_D d\mathbf{x} f(\mathbf{x})$ ，ただし $|D|$ は領域 D の体積，である．

$\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(N)}(t)$ を適当に選んだ N 個の流体粒子の時刻 t での位置とする．Lagrange 速度 \mathbf{v} は \mathbf{u} を用いて，

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)$$

と表せるので，Lagrange 自己速度相関 V は \mathbf{u} を用いて，

$$V_{ij}(t', t) = \int d^3\mathbf{r} \langle u_i(\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}, t') u_j(\mathbf{x}(t), t) \times \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \delta\mathbf{x}(t, t')) \rangle_{\mathbf{x}(t)}, \quad (7)$$

と書ける．ただし， $\delta^{(3)}$ は3次元の δ 関数である．ここで Corrsin²⁾ による次の仮説を導入する．

Corrsin の仮説：時間間隔 $t' - t$ における粒子の変位 $\delta\mathbf{x}(t, t')$ は， $t' - t$ が十分大きいとき，両端時刻 t と t' における粒子の速度 $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{v}(t')$ と統計的に独立である．

Corrsin の仮説は， $t' - t$ が相関時間 τ よりも十分大きければ妥当であろう．しかし，比較的短い $t' - t$ においてもこの仮説が有効である場合があることが，過去の研究でも示唆されている（文献³⁾ やその中の引用文献参照．）

Corrsin の仮説を任意の $t' - t$ に対して拡張すると，(7) は

$$V_{ij}(t', t) = \int d^3\mathbf{r} U_{ij}(\mathbf{r}, t', t) \times \langle \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \delta\mathbf{x}(t, t')) \rangle \quad (8)$$

となり，Euler 速度相関 U と Lagrange 速度相関 V が関連づけが得られる．ここで， $\langle \cdot \rangle$ は N 個の流体粒子についての統計平均である．

成層が強い乱流について，Kaneda & Ishida³⁾ は，Corrsin の仮説に加えて2つの近似を導入し，1粒子拡散 $\Delta_{ij}(t_0, t)$ を求める方法を提案した．その2つの近似とは，

- (i) 成層 (\mathbf{u} について線形の外力項) が十分強いときに，Euler 速度相関 U について Navier-Stokes (NS) 方程式の \mathbf{u} の非線形項を無視する線形近似，
- (ii) $\delta\mathbf{x}(t, t')$ の分布を Gauss 分布で近似すること，

である．(i) によりある時刻 t_0 で $U_{ij}(\mathbf{r}, t_0, t_0)$ が分かれば，任意の時刻 t, t' での $U_{ij}(\mathbf{r}, t', t)$ が求まる．また (ii) により (8) にある $\delta\mathbf{x}(t, t')$ の確率密

度関数 $\langle \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \delta\mathbf{x}(t, t')) \rangle$ はその分散 $\Delta_{ij}(t, t')$ を用いて表される。よって $U_{ij}(\mathbf{r}, t_0, t_0)$ が与えられれば, (2), (8) から $\Delta_{ij}(t, t')$ について閉じた方程式が得られる。

さらに,

(iii) $\delta\mathbf{x}(t, t')$ は十分小さく, (8) で $\langle \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \delta\mathbf{x}(t, t')) \rangle \sim \langle \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \rangle$ の近似が成り立つと仮定する,

と (8) が Δ_{ij} に依存しなくなり, Δ_{ij} の評価計算が簡略化される。また, 鉛直方向の拡散 $\Delta_{33}(t_0, t)$ が $t \rightarrow \infty$ で有限の値に抑えられることが示され, その定量的評価が得られる。

この鉛直拡散が有限に抑えられることは, 鉛直速度成分のオーダー $\sim \sqrt{U_{33}(\mathbf{r}, t, t)}$ が小さいかどうかとは関係が無い。実際, $U_{11}(\mathbf{r}, t, t) = U_{22}(\mathbf{r}, t, t) = U_{33}(\mathbf{r}, t, t)$ となる場の場合でも, $\Delta_{33}(t_0, t)$ は有限値で抑えられる。また, この鉛直拡散の評価は, (A1) から導かれる分子拡散の (4) と著しく異なっている。その原因の 1 つは, (8)+(iii) により $V_{ij}(t', t)$ について非線形効果 (一般に相関を消す方向に働く) が無くなることで, 長時間相関が (負の相関も含めて) 残ってしまうことにある。

Corrsin の仮説+(i)+(ii) そして Corrsin の仮説+(i)+(ii)+(iii) による鉛直方向の拡散 Δ_{33} の評価は, 直接数値計算 (DNS) の結果とよく一致していることが示されている。

一方, Corrsin の仮説+(i)+(ii) による一粒子拡散 Δ_{ij} の近似計算は, β 平面乱流で β 効果が強い場合についても可能である。しかし, この場合 Corrsin の仮説+(i)+(ii) の近似は DNS の結果と一致しないことが示されている。その理由として, β 平面乱流の場合は Corrsin の仮説が成り立たないことが推測される。

そこで Yoshida *et al.*⁴⁾ は, Corrsin の仮説を用いずに, Lagrange 繰り込み近似 (LRA)^{5,6)} から 1 粒子拡散 Δ_{ij} を評価する方法を試みた。

LRA は乱流統計の 2 点完結近似の 1 つで, 系統的な繰り込み展開と打ち切りにより, Lagrange 2 点 2 時刻統計量について閉じた式を与える。LRA は, 十分発達した一様等方性乱流の慣性小領域における Kolmogorov のエネルギースペクトル $E(k) = K_0 \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$ と整合し, かつ定数 $K_0 = 1.72$ を恣意的パラメタ無しで評価する, などのいくつかの成果がある。LRA で用いる統計量, 2 点 2 時刻 Lagrange 速度相関 Q と Lagrange 応答関数 G は,

$$\begin{aligned} Q_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') & \equiv \langle P_S^{(x)} [v_i(\mathbf{x}, t'; t)] v_j(\mathbf{x}', t') \rangle, \\ & \int d\mathbf{x}' G_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \delta v_j(\mathbf{x}', t'; t') \\ & \equiv \langle P_S^{(x)} [\delta v_i(\mathbf{x}, t'; t)] \rangle, \end{aligned}$$

ただし $t \geq t'$, で定義される。ここで, $v(\mathbf{x}, t'; t)$ は時刻 t' で \mathbf{x} にあった流体粒子の時刻 t での速度, $\delta v(\mathbf{x}, t'; t)$ は時刻 t' で $v(\mathbf{x}, t'; t')$ に与えられた無限小摂動に対する時刻 t での $v(\mathbf{x}, t'; t)$ の応答である。また, $P_S^{(x)}$ は \mathbf{x} についてのベクトル場のソレノイダル成分への射影演算子である。 $\langle \cdot \rangle$ は適当な意味での統計平均である。今, 乱流は統計的に一様で定常である, つまり $Q(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ と $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ が $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ と $t - t'$ を通してのみ $\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t'$ に依存する場合を考える。射影演算子の寄与が小さくて無視できると仮定すると

$$V_{ij}(t', t) = Q_{ij}(\mathbf{0}, t', t), \quad (9)$$

ただし $Q_{ij}(\mathbf{r}, t', t) \equiv Q_{ij}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t', \mathbf{x}, t)$, が成り立つ。よって Q が分かれば (2), (9) により 1 粒子拡散 $\Delta_{ij}(t_0, t)$ が求まる。LRA 方程式の解析から, β 効果の十分大きい極限においては, Δ_{ij} の式 (2), (9) 中の $Q_{ij}(\mathbf{0}, t', t)$ は, Euler 速度相関 $U_{ij}(\mathbf{0}, t', t)$ の線形近似で置き換えられることが示される。これは, 数式的には Corrsin の仮説+(i)+(ii)+(iii) と等価であるが, 論理的にこの 4 つをそれぞれ仮定しているのではないことに注意されたい。この LRA を用いた Δ_{ij} の評価では, $t \rightarrow \infty$ で南北方

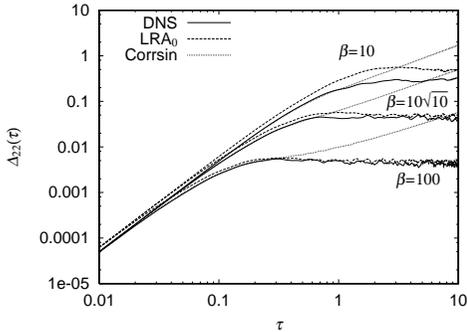


図1 β 平面乱流中の南北方向の1粒子拡散 $\Delta_{22}(\tau)$, $\tau = t - t_0$. 図中“DNS”はDNSの結果, “LRA₀”はLRAによる近似, “Corrsin”はCorrsinの仮説+(i)+(ii)の近似(文献⁴⁾より.)

向の拡散 $\Delta_{22}(t_0, t)$ は有限に抑えられる. この評価は β が非常に大きい場合のDNSの結果とよく一致している(図1参照). ただし, この近似が β のどのような範囲まで適用できるか, などの問題はまだ残っている.

5 2粒子拡散

仮定(A2)が成り立たない場合, 1粒子拡散 $\Delta_{ij}(t_0, t)$ はある時刻 t_0 に狭い領域に集中していた粒子が時刻 t でどれだけ拡散しているかを表す指標として適当でない. なぜなら, 初期に相関距離 λ より十分近い距離にある2つの流体粒子は, それぞれ時間 t の間に $\sim \sqrt{\Delta_{ii}(t)}$ 変位するが, それぞれの速度には強い相関があるので, ある程度の時間の範囲ではほぼ寄り添って運動し, よって2流体粒子間の距離は $\sim \sqrt{\Delta_{ii}(t)}$ より小さくなるからである.

そこで初期 t_0 に狭い領域に集中していた粒子が時間 $t - t_0$ の間にどれだけ拡散しているかを表す指標として, 2粒子拡散を考える. 流体粒子対[粒子(1)と粒子(2)]の位置座標を $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ として,

$$\delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(2)}(t) - \mathbf{x}^{(1)}(t),$$

とする. 十分大きい数 N の流体粒子対を統計アンサンブルとして選び, $\delta \mathbf{x}(t)$ の統計的性質について

調べる. 特に, $\delta \mathbf{x}(t)$ が \mathbf{r} となる確率密度 $P(\mathbf{r}, t, t_0)$ と, 分散

$$\Delta_{ij}^{(2)}(t_0, t) \equiv \langle \delta x_i(t) \delta x_j(t) \rangle,$$

について考える. 当然, 前者が知れば, 後者は得られる. また, 各流体粒子対について, 粒子(1)と粒子(2)を交換したのももアンサンブルに含むようにしておくと, $P(-\mathbf{r}, t, t_0) = P(\mathbf{r}, t, t_0)$ となる. 本稿では, そのようにアンサンブルをとるものとする.

2粒子拡散の概念は, まず Richardson⁷⁾ により導入された(本誌同特集記事, 後藤晋「秩序構造による乱流混合・拡散の理解」も参照.) Richardson は物理的考察と観測データから P について方程式を提案し, その解は特に分散については $\Delta_{ii}^{(2)}(t_0, t) \propto (t - t_0)^3$ となる. この $t - t_0$ の指数は, 一様等方性乱流のKolmogorov的な次元解析で求まるスケール則

$$\Delta_{ii}^{(2)}(t_0, t) = C \epsilon (t - t_0)^3 \quad (10)$$

と一致している. ただし, ここで ϵ は単位質量当たりのエネルギー散逸率で, C は普遍定数である.

Kraichnan⁸⁾ は, 乱流統計の2点完結近似の一つであるLagrangian-History Direct Interaction approximation(LHDIA)を用いて, P の方程式を導いた. 同様のことは, 第4節で触れたLRAでも行え, 本稿ではLRAに基づいてその概略を説明する.

まず, 各流体粒子対についてスカラー場,

$$\psi(\mathbf{x}, t) = [\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(1)}(t)) + \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(2)}(t))]$$

を対応させる. すると

$$\int_D d^3 \mathbf{x} \langle \psi(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{x}, t) \rangle = 2P(\mathbf{r}, t, t_0) + 2\delta^{(3)}(\mathbf{r}), \quad (11)$$

が成り立つ. ただし D は流体の占める領域である. 場 ψ は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \psi = 0$$

に従うパッシブスカラー場と捉えることができ、その2点相関の発展方程式はLRAを用いて得られる⁶⁾。従って P の発展方程式も得られる。統計的に空間一様性の仮定の下、 P の方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t}(\mathbf{r}, t, t_0) &= \frac{\partial}{\partial r_i} \left[\eta_{ij}(\mathbf{r}, t, t_0) \frac{\partial}{\partial r_j} P(\mathbf{r}, t, t_0) \right], \quad (12) \\ \eta_{ij}(\mathbf{r}, t, t_0) &\equiv 2 \int_{t_0}^t dt' [Q_{ij}(\mathbf{0}, t, t') - Q_{ij}(\mathbf{r}, t, t')] \end{aligned}$$

となることが示される。ここで Q は第4節で導入した2点2時刻Lagrange速度相関である。因みに、Richardson⁷⁾の提案した P の式は、 $\eta_{ij}(\mathbf{r}, t, t_0) = A r^{4/3} \delta_{ij}$ (A は定数)としたものに対応する。

式(12)により、 Q が分かれば P そして $\Delta_{ij}^{(2)}$ を評価できることになる。十分高いReynolds数の一様等方性乱流の慣性小領域における Q のLRA相似解は求まっており⁶⁾、その解を(12)に代入し、 P が求められる。 $\Delta_{ii}^{(2)}$ に関しては、(10)と $C = 4.7$ の評価が得られる(LHDIAでは $C = 5.5$)。

実験⁹⁾やDNS¹⁰⁾によって C の値が見積もられているが、それらはLRAやLHDIAの見積もりよりかなり小さい。例えば、Ishihara & Kaneda¹⁰⁾の一様等方性乱流のDNS(Taylor長に基づくReynolds数で $R_\lambda = 284$)では、 $C \approx 0.7$ である。

この食い違いの原因としては、DNSのReynolds数が十分高くなく、 Q の相似解を用いる近似が妥当でない可能性が、まず考えられる。そのことを考慮して、Ishihara & Kaneda¹⁰⁾は、統計的等方性の仮定の下、同時刻相関 $Q(\mathbf{r}, t, t)$ についてはDNSデータを用いて、また2時刻相関 $Q(\mathbf{r}, t, t')$ についてはデータの $Q(\mathbf{r}, t, t)$ を定常解とするようにLRAから求め、それを(12)に代入して、 $C \approx 2.7$ の見積もりを得た。この値は相似解による $C = 4.7$ よりかなり小さく、またDNSの値 $C \approx 0.7$ に近づいている。この解析により、Reynolds数が十分大きくないとき、近似的に求まる C の値がReynolds数に敏感に依

存することが推測される。また、LRAによる C の評価は、 $R_\lambda = 283$ 程度の乱流においてはDNSの値と4倍程度のずれがあり不十分であると言えよう。

そこで、Ishihara & Kaneda¹⁰⁾は、LRAを用いずに、第4節で用いたCorrsinの仮説に類似する仮説を導入して、Lagrange速度相関 Q と2粒子拡散の分散 $\Delta_{ij}^{(2)}$ とを関連づける方法を提案した。その仮説は以下で与えられる。

時刻 t' における流体粒子対の相対位置 $\delta x(t')$ は、 $t' - t_0$ が十分大きいとき、それぞれの粒子の速度 $v(t)$ 、($t > t'$)と統計的に独立である。

この仮説を $t' - t_0$ が小さい場合にも形式的に拡張し、統計的一様性および定常性を仮定すると、

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}^{(2)}(t_0, t) &= \int_{t_0}^t ds' \int_{s'}^t ds [Q_{ij}(\mathbf{0}, s, s') \\ &\quad - \int d^3 r Q_{ij}(\mathbf{r}, s, s') P(\mathbf{r}, s', t_0)] \quad (13) \end{aligned}$$

が導かれる。ここで $P(\mathbf{r}, s', t_0)$ についてGauss分布近似を導入すれば、 $P(\mathbf{r}, s', t_0)$ は $\Delta_{ij}^{(2)}(t_0, s')$ の関数になる。よって Q が分かれば、 $\Delta_{ij}^{(2)}$ が求まることになる。

また、 Q の評価について、Ishihara & Kanedaは同時刻相関 $Q(\mathbf{r}, t, t)$ のデータのみならず、 $Q(\mathbf{r}, t + \tau, t)$ の τ についてのTaylor展開の2次までのデータを用いて見積もる方法を提案した(文献¹¹⁾も参照)。まず、 $Q(\mathbf{r}, t, t')$ の \mathbf{r} についてのFourier変換を $\hat{Q}(\mathbf{k}, t, t')$ とする。 \hat{Q} の統計的等方性を仮定し、時間依存性について

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}, t + \tau, t) = \hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}, t, t) \exp[a(k)\tau + b(k)\tau^2] \quad (14)$$

の形で近似し、両辺が τ の2次の展開まで整合するように、 $a(k)$ と $b(k)$ を決定する。このようにして求められた Q (\hat{Q} の逆Fourier変換)を(13)に代入して、 $\Delta_{ij}^{(2)}$ を評価できる。その結果からは

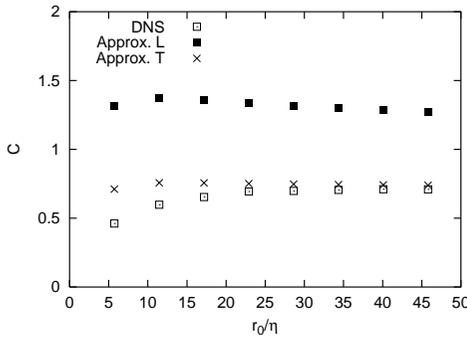


図2 2粒子拡散の定数 C . 横軸は Kolmogorov 長 η で規格化した初期の2粒子間隔 $r_0 \equiv |\delta \mathbf{x}(t_0)|$. 図中“DNS”はDNSによる見積もり, “Approx. T”は(13), (14)による見積もり, “Approx. L”については文献¹⁰⁾参照(文献¹⁰⁾より.)

$C \approx 0.7$ と見積もられ, DNS との良い一致を示している(図2参照) .

式(13)と(14)による $\Delta^{(2)}$ の評価は, LRA による $\Delta^{(2)}$ の評価と比べて, DNS による検証において定量的に良い結果を得ている . ただし, この評価方法は $Q(r, t + \tau, t)$ の τ についての2次までの展開, つまりは \mathbf{u} について同時刻4次までの相関のデータを必要としている . よってその4次相関の高 Reynolds 数極限での振舞いが分からないと, 高 Reynolds 数極限での普遍定数 C の予言はできない . その点では, LRA による評価の方が優れている .

今後, 更なる大規模 DNS やより高精度の実験によって, 高 Reynolds 数乱流の C の測定, LRA そして(13), (14)による $\Delta^{(2)}$ の評価の検証が行われることが望まれる .

6 乱流モデルの渦粘性・渦拡散

第4, 5節で扱った乱流中の1粒子拡散 $\Delta_{ij}(t_0, t)$ や2粒子拡散 $\Delta_{ij}^{(2)}(t_0, t)$ は, (4)を満たさず, よってこれらの乱流によって輸送される物質の濃度場 $\theta(x, t)$ を拡散方程式(5)で表すことはできない . 第4, 5節で扱った乱流は決して特異な例ではなく, 特に第5節で扱った一様等方性乱流は, 外力や境界条件の如何に拘らず十分に高い Reynolds 数の乱流の境界から十分離れた場所の十分小ス

ケールにおける普遍的状态と考えられている .

分子動力学の基礎方程式を直接解かなくても拡散方程式(5)により分子拡散による $\theta(x, t)$ の時間発展が記述されるように, NS 方程式を直接解かずに乱流拡散による $\theta(x, t)$ の時間発展を記述する方法があれば望ましい . これは応用上も重要な課題である . なぜなら, 高 Reynolds 数乱流の力学系としての自由度の数は莫大で, 実用上の局面で乱流拡散を数値的に解く場合, 何らかの方法による自由度の低減が不可欠だからである . 例えば, 海洋乱流で最小スケールの Kolmogorov 長 $\eta \equiv (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ (ただし ν は動粘性係数, ϵ は単位体積当たりの平均エネルギー散逸率)は cm オーダーであり, 地球上の全海洋の体積を η^3 で割って自由度の数を見積もると, 約 10^{23} , Avogadro 数に匹敵する . 現在または近い将来の最高性能のスーパーコンピュータを持ってしても, この巨大数の自由度が互いに強く相互作用する NS 方程式を直接解くことは不可能である .

分子拡散の場合, 物質濃度 θ は微小体積 $(\Delta x)^3$ ($\Delta x \gg \lambda$, ただし λ は分子速度の相関距離)の平均であった . 以下 $(\Delta x)^3$ の体積平均を他の統計平均とは区別するため Δx スケールの粗視化と呼び, また場 f の粗視化された場を \bar{f} と書く . 乱流拡散の場合, 流体速度の相関距離 λ は系のサイズと同程度になる場合が多く, もっと細かいスケールの拡散の様子は, λ スケールの粗視化では見えなくなってしまう . 今, $\eta \ll \Delta x \ll \lambda$ となる適当な Δx で粗視化された物質密度場 $\bar{\theta}$ と速度場 $\bar{\mathbf{v}}$ についての方程式が必要なわけである .

適当なスケール Δx で粗視化した場について閉じたモデル方程式を作り, それを数値的に解く手法をラージ・エディ・シミュレーション (LES) と呼ぶ . 非圧縮性流体で LES のモデル場 $\mathbf{u}^M(x, t)$, $\theta^M(x, t)$ の方程式は外力項を省略して,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}^M \cdot \nabla\right) \mathbf{u}^M = -\nabla P^M + I[\mathbf{u}^M] \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}^M \cdot \nabla\right) \theta^M = J[\mathbf{u}^M, \theta^M] \quad (16)$$

と書ける。ただし圧力 P^M は \mathbf{u}^M の非圧縮条件から求まり、 $I[\mathbf{u}^M]$ と $J[\mathbf{u}^M, \theta^M]$ は粗視化で省略された \mathbf{u} と θ の小さいスケールからの寄与をモデル化した項である (I が θ^M に依らないのは、今流される物質の密度場 θ が速度場 \mathbf{u} に影響を与えない場合を考えているからである。) モデル化の課題は、何らかの意味で \mathbf{u}^M と θ^M が $\bar{\mathbf{u}}$ と $\bar{\theta}$ を模倣するように $I[\mathbf{u}^M]$ と $J[\mathbf{u}^M, \theta^M]$ をうまく選んでやる、ということになる。

出発点として、分子粘性、分子拡散の類推から考えると、

$$I[\mathbf{u}^M] = \nu_e \nabla^2 \mathbf{u}^M, \quad J[\mathbf{u}^M, \theta^M] = \kappa_e \nabla^2 \theta^M \quad (17)$$

となる。この ν_e, κ_e はそれぞれ渦粘性係数、渦拡散係数と呼ばれる。

さてここで注意しなくてはならないのは、マクロとミクロのスケールが分離している分子粘性や分子拡散の場合と異なり、乱流粘性や乱流拡散の場合、一般に勝手に選んだ Δx についてそれより大きい渦と小さい渦は強く相互作用していることである。そのため、2つの速度場、物質密度場の組 $(\mathbf{u}_1, \theta_1), (\mathbf{u}_2, \theta_2)$ について、ある時刻 t_0 で $\overline{\mathbf{u}_1}(t_0) = \overline{\mathbf{u}_2}(t_0), \overline{\theta_1}(t_0) = \overline{\theta_2}(t_0)$ が成り立ったとしても、 $\mathbf{u}_1(t_0) \neq \mathbf{u}_2(t_0), \theta_1(t_0) \neq \theta_2(t_0)$ ならば、 $t > t_0$ について $\overline{\mathbf{u}_1}(t) \neq \overline{\mathbf{u}_2}(t), \overline{\theta_1}(t) \neq \overline{\theta_2}(t)$ となるだろう。つまり、時刻 t_0 における粗視化された場の情報だけから、その後の粗視化された場を (分子粘性や分子拡散の場合のように) 完全に再現することは一般に不可能である。よって上の「何らかの意味で」は、「場そのものが等しくなるように」ではなく、「何らかの統計量が等しくなるように」ということになるだろう。

ここでは、 $\bar{\mathbf{u}}$ と $\bar{\theta}$ に関するスペクトルを再現することを目的としたスペクトル LES モデル^{12, 13, 14)}を紹介する。

波数空間での速度場と物質密度場をそれぞれ $\hat{\mathbf{u}}(k), \hat{\theta}(k)$ とする、ただし k は波数ベクトルである。今、粗視化はある波数 k_c より高波数成分の除去で行なうことにする。粗視化された場とモ

デル場のスペクトルは、

$$\bar{E}(k) \equiv \frac{1}{2} \sum_{|k'|=k} |\hat{\mathbf{u}}(k')|^2,$$

$$\bar{F}(k) \equiv \sum_{|k'|=k} |\hat{\theta}(k')|^2,$$

$$E^M(k) \equiv \frac{1}{2} \sum_{|k'|=k} |\hat{\mathbf{u}}^M(k')|^2,$$

$$F^M(k) \equiv \sum_{|k'|=k} |\hat{\theta}^M(k')|^2,$$

で与えられる、ただし $\sum_{|k'|=k}$ は球殻 $|k'| = k$ 上の k' 積分である。NS 方程式、LES モデル方程式 (15)–(17) からスペクトルの時間発展方程式はシンボリックに

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{E}(k) = T^<(k) + T^>(k),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{F}(k) = S^<(k) + S^>(k),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E^M(k) = T^M(k) - 2\nu_e k^2 E(k),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F^M(k) = S^M(k) - 2\kappa_e k^2 F(k),$$

と表される。ただし、 $T^<, T^>, S^<, S^>$ は $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\theta}$ について 3 次の量であり、 $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\theta}$ のみに依存する部分を $T^<, S^<$ 、それ以外の部分を $T^>, S^>$ と書いた。 T^M, S^M は $\hat{\mathbf{u}}^M, \hat{\theta}^M$ について 3 次の量である。

スペクトル LES の目的は、 $k < k_c$ で $E^M(k) = \bar{E}(k), F^M(k) = \bar{F}(k)$ とすることである。 T や S のような 3 次相関量は、乱流統計の 2 点完結近似において、 $E(k)$ や $F(k)$ のような 2 次相関量の関数として近似される。この近似法に従い、 $T^<(k), S^<(k)$ は近似的に $\bar{E}(k), \bar{F}(k)$ から求まると仮定しよう。すると、上の目的が達せられているとき、 $T^M(k) = T^<(k), S^M(k) = S^<(k)$ も近似的に成立していることになる。よって、渦粘性 ν_e と渦拡散 κ_e に k 依存性を許せば、その充たすべき条件は、

$$\nu_e(k) \equiv -\frac{T^>(k)}{2k^2 E(k)},$$

$$\kappa_e(k) \equiv -\frac{S^>(k)}{2k^2 F(k)},$$

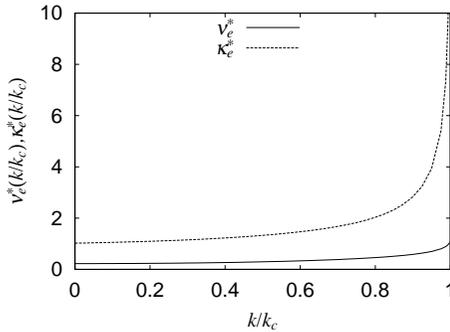


図3 LRA による渦粘性 ν_e と渦拡散 κ_e の無次元普遍関数 ν_e^*, κ_e^* (文献¹⁴⁾より.)

となる. この $\nu_e(k)$ の表現はKraichnan¹⁵⁾によって導出されたものと等しく, $\kappa_e(k)$ は対応する渦拡散の表現である.

乱流統計の2点完結近似を用いれば, $T^>(k)$ と $S^>(k)$ もスペクトル $E(k)$, $F(k)$ などから評価できる. 特に慣性小領域が十分広く k_c がその中にある場合, $T^>(k)$ と $S^>(k)$ は $E(k)$ や $F(k)$ などの慣性小領域内の相似解から求められ,

$$\nu_e(k) = \epsilon^{1/3} k_c^{4/3} \nu_e^* \left(\frac{k}{k_c} \right),$$

$$\kappa_e(k) = \epsilon^{1/3} k_c^{4/3} \kappa_e^* \left(\frac{k}{k_c} \right),$$

の形になる. ただし ν_e^* , κ_e^* は無次元普遍関数である. 図3は, 第4, 5節でも触れたLRAを用いて恣意的パラメタ無しで評価した普遍関数 ν_e^* , κ_e^* である.

この高波数成分除去による粗視化と k 依存の ν_e と κ_e によるスペクトルLESモデルは, スペクトル法の数値スキームで実装可能である. いくつかの乱流場においてこのスペクトルLESの結果は, より高解像度のDNSと良い一致を示している.

LESモデルに現れる渦粘性 ν_e や渦拡散 κ_e について, 一般に注意すべき点は, それらが分子粘性 ν や分子拡散 κ と異なり, モデルの性質, つまりモデルで再現したい統計量, 粗視化の方法, その粗視化のスケール($\Delta x \sim 1/k_c$)など, に依存す

ることである. また, 差分法などの数値スキームを使うLESの場合は, 例えば, 粗視化にGaussフィルターを使う, 波数 k に依存する ν_e や κ_e を実空間において高階のLaplacianで近似する, などの工夫も必要である.

7 まとめ

乱流においては, 大小様々な空間・時間スケールを持つ渦が連続的に分布するため, ミクロな分子運動のスケールがマクロの流体運動のスケールより十分小さいことを基にした分子拡散からの類推を, そのまま乱流拡散に用いることはできない. しかし, そのような場合でも, 乱流拡散はLagrange速度相関を用いて記述することができる. 本稿では, Lagrange速度相関の近似に基づく1粒子拡散, 2粒子拡散の定量的評価を, いくつかの乱流の場合について紹介した. また, 速度相関のFourier変換に対応するスペクトルを基に, スペクトルLESモデルの渦粘性・渦拡散を見積もる手法を紹介した.

ここで紹介したLagrange速度相関に関する近似の中で, LRAは原理的に非一様・非等方性乱流にも適用可能である. よって, ここでは取り上げなかった様々な乱流, 例えば回転乱流, 壁乱流, 電磁流体乱流など, による拡散の解析にも, Lagrange速度相関を基にした方法は有望である, と思われる.

謝辞: 本稿の執筆にあたって, 金田行雄先生, 石原卓氏, 後藤晋氏に草稿を読んで頂き, 有益な意見を頂いた. また, 金田行雄先生, 石原卓氏には図2の引用に快諾頂いた. 記して謝意を表したい.

引用文献

- 1) A. Einstein: Ann. der Phys. **17** (1905) 549.
- 2) S. Corssin: in "Atmospheric Diffusion and Air Pollution", (ed. F. N. Frenkiel & P. A. Sheppard, Academic, 1959) 161.

- 3) Y. Kaneda & T. Ishida: *J. Fluid Mech.* **402** (2000) 311.
- 4) 吉田恭, 岡垣晶, 金田行雄: 日本流体力学学会年会 2003 講演論文集, 326
- 5) Y. Kaneda: *J. Fluid Mech.* **107** (1981) 131.
- 6) Y. Kaneda. *Phys. Fluids* **29** (1986) 701.
- 7) L. F. Richardson: *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **110** (1926) 709.
- 8) R. H. Kraichnan: *Phys. Fluids* **9** (1966) 1937.
- 9) S. Ott & J. Mann: *J. Fluid Mech.* **422** (2000) 207.
- 10) T. Ishihara & Y. Kaneda: *Phys. Fluids* **14** (2002) 69.
- 11) Y. Kaneda, T. Ishihara & K. Gotoh: *Phys. Fluids* **11** (1999) 2154.
- 12) 金田行雄: *ながれ* **20** (2001), 468
- 13) K. Yoshida, T. Ishihara, D. Fujita, T. Yamahira, and Y. Kaneda: in “Statistical Theories and Computational Approaches to Turbulence, Modern Perspectives and Applications to Global-Scale Flows”, (ed. Y. Kaneda & T. Gotoh, Springer, 2002) 203.
- 14) K. Yoshida, T. Ishihara, , and Y. Kaneda: in “Statistical Theories and Computational Approaches to Turbulence, Modern Perspectives and Applications to Global-Scale Flows”, (ed. Y. Kaneda & T. Gotoh, Springer, 2002) 219.
- 15) R. H. Kraichnan: *J. Atmos. Sci.* **33** (1976) 1521.