課題 4 は、以下の方程式を解けばよい。

$$\nabla^2\phi(r,\theta,z)=0, \tag{1}$$
$$\phi(a,\theta,z)=\phi_0, \tag{2}$$
$$\phi(r,\theta,0)=\phi(r,\theta,l)=0. \tag{3}$$

Laplacian の円筒座標表示

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{4}$$

と変数分離解の形

$$\phi(r,\theta,z)=R(r)\Theta(\theta)Z(z) \tag{5}$$

を (1) に代入して、

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}=\alpha^2R, \tag{6}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}=\beta^2Z, \tag{7}$$
$$\alpha^2+\beta^2=0 \tag{8}$$

を得る。ただし、境界条件が θ に依存しないので $\Theta(\theta)=1$ と置けることを使った。これらの一般解は

$$R(r)=A(\alpha)J_0(-\mathrm{i}\alpha r)+B(\alpha)Y_0(-\mathrm{i}\alpha r), \tag{9}$$
$$Z(z)=C(\beta)\mathrm{e}^{\beta z}+D(\beta)\mathrm{e}^{-\beta z}, \tag{10}$$

となる。ただし、$J_n(r)$ は n 次の第 1 種 Bessel 関数で $Y_n(r)$ は n 次の第 2 種 Bessel 関数。境界条件 (3) より、

$$C(\beta)+D(\beta)=0, \tag{11}$$
$$C(\beta)\mathrm{e}^{\beta l}+D(\beta)\mathrm{e}^{-\beta l}=0, \tag{12}$$

となり

$$D(\beta)=-C(\beta), \tag{13}$$
$$\beta=\frac{\mathrm{i}n\pi}{l}\quad(n=0,1,2,\cdots) \tag{14}$$

を得る。(8) を使って、

$$\alpha=\frac{n\pi}{l}\quad(n=0,1,2,\cdots) \tag{15}$$

となる。ここで、α と β を指定するとき $J_0(r)$ が偶関数であることなどから $n\geq 0$ に限定してよい。ϕ が $r=0$ で発散しない条件から $B(\alpha)=0$ となる。ここまでから、

$$\phi(r,\theta,z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nJ_0\left(-\mathrm{i}\frac{n\pi}{l}r\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right), \tag{16}$$
$$A_n=2\mathrm{i}A\left(\frac{n\pi}{l}\right)C\left(\mathrm{i}\frac{n\pi}{l}\right) \tag{17}$$

を得る。境界条件 (2) から

$$\phi_0=\sum_{n=0}^{\infty}A_nJ_0\left(-\mathrm{i}\frac{n\pi}{l}a\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right), \tag{18}$$

である。(18) の両辺に $\sin(m\pi z/l)$ をかけて 0 から L まで z で積分すると、

$$\int_0^L\mathrm{d}z\sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}z\right)=0\qquad(n\neq m), \tag{19}$$

に注意して

$$A_m=\frac{\phi_0\int_0^L\mathrm{d}z\sin\left(\frac{m\pi}{l}z\right)}{J_0\left(-\mathrm{i}\frac{m\pi}{l}a\right)\int_0^L\mathrm{d}z\left[\sin\left(\frac{m\pi}{l}z\right)\right]^2} \tag{20}$$

を得る。

(16) と (20) が求める解である。