

## 2 Schemes

### 2.7 Projective Morphisms

#### 2.7.1

$\mathcal{L}, \mathcal{M}$  は invertible sheaf なので、 $\forall x \in X$  に対し、 $x \in U = \text{Spec } A$  で  $\mathcal{L}|_U = \mathcal{O}_U$ ,  $\mathcal{M}|_U = \mathcal{O}_U$  となるように  $U$  をとる。 $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$  が全射なので、 $f_x : \mathcal{L}_x = \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{M}_x = \mathcal{O}_x$  も全射となり、 $1 \in \mathcal{M}_x = \mathcal{O}_x$  に対応する  $a \in \mathcal{L}_x = \mathcal{O}_x$  が存在して  $f_x(a) = 1$  を満たす。 $f$  が  $\mathcal{O}_X$ -module なので、 $f_x$  は  $\mathcal{O}_x$ -module であり、 $f_x(a) = af_x(1) = 1$  より  $f_x(1)$  は単元で  $a^{-1}$  に等しい。

従って、

$$\begin{aligned} f_x : \mathcal{L}_x &\rightarrow \mathcal{M}_x \\ b &\mapsto ba^{-1} \end{aligned}$$

は全単射を与える。

#### 2.7.2

$\mathbf{P}^n = \text{Proj } k[x_0, \dots, x_n]$ ,  $\mathbf{P}^m = \text{Proj } k[y_0, \dots, y_m]$  とおく。 $\{s_0, \dots, s_n\}, \{t_0, \dots, t_m\}$  が共に  $V$  を生成するので、 $s_i = \sum_j a_{ij}t_j$  となる  $a_{ij} \in k$  が存在する ( $\mathbf{s} = A\mathbf{t}$ ,  $A = [a_{ij}]$  と記す)。

ここで、行列  $A$  の rank は  $d = \dim_k V$  であるが、 $s_0, \dots, s_n$  は基底をなすとして、 $\text{rank } A = n+1$  とする (Remark 7.8.1 にもそのような記述がある)<sup>1</sup>。

$I = (\sum_j a_{0j}y_j, \dots, \sum_j a_{nj}y_j)$  とおき (これを  $I = (A\mathbf{y})$  と記す)、 $L := V(I)$  とする。

このとき、[1], Corollary 11.16 より  $\text{height } I \leq n+1$  であり、また

$$(0) \subsetneq \left(\sum_j a_{0j}y_j\right) \subsetneq \left(\sum_j a_{0j}y_j, \sum_j a_{1j}y_j\right), \dots, \subsetneq \left(\sum_j a_{0j}y_j, \dots, \sum_j a_{nj}y_j\right) = I \quad (1)$$

は、 $A$  の前提より prime ideal 系列を与えるので、 $\text{height } I \geq n+1$  から  $\text{height } I = n+1$  である。よって

$$\dim L = \dim T(L) - 1 = \dim T/I - 1 = \dim T - \text{height } I - 1 = (m+1) - (n+1) - 1 = m - n - 1$$

を得る (Exercise I.2.6)。ここで、 $T(L)$  は coordinate ring である (Exercise II.5.14)。

さて

$$\alpha : S := k[x_0, \dots, x_n] \rightarrow T := k[y_0, \dots, y_m], \quad x_i \mapsto \sum_j a_{ij}y_j$$

<sup>1</sup> そうでなく  $n > d-1$  の場合は、式 (1) に示すように、 $\text{height } I = d$  となるので、 $\dim L = m-d$  である。

に対し、 $\alpha(S_+) = I$  であり、 $U = \{\mathfrak{p} \in \mathbf{P}^m \mid \mathfrak{p} \not\supseteq \alpha(S_+)\} = \mathbf{P}^m - V(I)$  から

$$\sigma : U = \mathbf{P}^m - L \rightarrow \mathbf{P}^n$$

が存在する (Exercise II.2.14(b))。

次に、 $\text{im } \psi \subseteq U$  を示す。

Inclusion は local 性質なので、 $x \in X$  に対し、 $\mathcal{L}|_W = \mathcal{O}_W$  となる  $W = \text{Spec } B \subseteq X$  で考える (すなわち、 $W$  は  $x \in X$  の germ を与える open affine)。

$$\beta : T = k[y_0, \dots, y_m] \rightarrow B, \quad y_j \mapsto t_j = \psi^* y_j$$

において (ここでの  $t_j$  等は正確には  $t_j|_W$  等)、 $\mathfrak{p} \subseteq B$  を prime ideal としたとき、仮に  $\psi(\mathfrak{p}) = \beta^{-1}(\mathfrak{p}) \in L = V(I)$  とすると、 $\beta^{-1}(\mathfrak{p}) \supseteq I = (A\mathbf{y})$  から

$$\mathfrak{p} \supseteq \beta\beta^{-1}(\mathfrak{p}) \supseteq \beta(I) = \beta(A\mathbf{y}) = \psi^* A\mathbf{y} = A\psi^* \mathbf{y} = A\mathbf{t} = \mathbf{s},$$

よって  $\mathfrak{p} \supseteq k[s_0, \dots, s_n]_+ \supseteq \mathcal{L}(W) = \mathcal{L}|_W(W) = B \Rightarrow \mathfrak{p} = B$  となるが、これは  $\mathfrak{p}$  の定義に反する。よって  $\text{im } \psi \subseteq U$  である。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^m - L & \xrightarrow{\sigma} & \mathbf{P}^n \\ & \searrow \psi & \nearrow \varphi \\ & X & \end{array}$$

$t$  から  $\sigma\psi$  と  $\varphi$  のルートを通して、 $\mathbf{P}^n$  の linear system における二つの basis ができるので、その間には automorphism  $\gamma$  で繋がる (Remark 7.8.1)。

以上により  $\varphi$  と  $\psi$  の差は  $\sigma$  と  $\mathbf{P}^n$  の automorphism  $\gamma$  の合成  $\gamma\sigma$  である。

### 2.7.3

$\varphi : \mathbf{P}_k^n \rightarrow \mathbf{P}_k^m$  とする。

(a) Theorem 7.1 から  $\mathcal{L} = \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1)$  は invertible sheaf なので、 $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$ ,  $d \in \mathbf{Z}$  とおける (Corollary 6.17)。

このとき、 $\mathcal{L}$  は  $\mathcal{L}_P = \mathcal{O}_P = k[x_0, \dots, x_n]_{(\mathfrak{p})} \neq 0$  より 0 ではない。すると、 $\Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{L}) = \Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)) = k[x_0, \dots, x_n]_d$  から、 $d < 0$  はありえない。

$d = 0$  のときは  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}$ ,  $\Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{L}) = k$  となり、 $\varphi^* y_j = a_j \in k$  である。このとき、Theorem 7.1(b) における morphism の一意性から、(b) の証明のように分解して考えれば、morphism の定義は  $\varphi$  に対応しており、対応する ring morphism は  $y_j \mapsto a_j$  から  $k[y_0, \dots, y_m] \rightarrow k \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$  となる。この morphism を  $f$  とすると、 $\varphi(\mathbf{P}_k^n)$  は  $f^{-1}(\mathfrak{p})$  からなるが ( $\mathfrak{p}$  は  $k[x_0, \dots, x_n]$  の prime ideal)、それは (0) のみである。よって  $\varphi(\mathbf{P}_k^n) = \text{pt}$  が得られ、 $\dim \varphi(\mathbf{P}^n) = 0$  となる。

$d \geq 1$  とすると、 $V \subseteq \Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{L})$  の基底は  $\Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d))$  の  $d$  次単項式なので、それは  $n$  より多くなる。よって  $n > m$  のときは  $s_0, \dots, s_m$  では生成できなくなる。

$n \leq m$ ,  $\varphi(\mathbf{P}^n) \neq \text{pt}$  場合は次の (b) から  $\dim \varphi(\mathbf{P}^n) = n$  である。

(b)  $n \leq m$  とする。Corollary 6.17 から

$$\mathcal{L} = \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d), \quad d \in \mathbf{Z} \quad (2)$$

であり、既に (a) で述べたように  $\varphi(\mathbf{P}^n) \neq pt$  なら  $d \geq 1$  である。

ここで、もし  $m > N = \binom{n+d}{n} - 1$  ならば  $m \leq \binom{n+d'}{n} - 1$  となる最小の  $d'$  が一つ定まるので、それを改めて  $d$  とおき、その  $d$ -uple を  $\psi: \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^N$  とおく。すると、 $k[z_0, \dots, z_N] \twoheadrightarrow k[y_0, \dots, y_m]$ ,  $z_0 \mapsto y_0, \dots, z_m \mapsto y_m, z_{m+1} \mapsto 0, \dots, z_N \mapsto 0$  は全射になるので、対応する  $\iota: \mathbf{P}^m \rightarrow \mathbf{P}^N$  は closed immersion である。従って、 $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1) = \iota^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(1)$  となる (Theorem 5.17 の証明に出ている)。

以上により  $\psi: \mathbf{P}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbf{P}^m \xrightarrow{\iota} \mathbf{P}^N \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^N$  が得られ (最後の automorphism は前問 7.2 と同様で、これにより可換となる)、 $\mathcal{L} = \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1) = \varphi^* \iota^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(1) = \psi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(1)$  が得られ、前問 Exercise 7.2 を適用すると設問の (1), (2), (3) を満たすことがわかる。

$\varphi$  は finite である。実際、 $\varphi: \mathbf{P}^n \xrightarrow{\psi} \mathbf{P}^N - L \xrightarrow{\sigma} \mathbf{P}^m \xrightarrow{\gamma} \mathbf{P}^m$  において、 $\psi$  が  $d$ -uple ゆえ closed immersion であり (下記性質 1)、linear projection  $\sigma$  は作り方から同型であるので (同型となるように  $L$  がとられている)、 $\psi$  が finite ゆえ (Exercise 5.5(b))  $\varphi$  も finite となる。

$\varphi$  が finite なので性質 3 から  $n = \dim \mathbf{P}^n = \dim \varphi(\mathbf{P}^n)$  であり<sup>2</sup>、Exercise II.3.5(a) より  $\varphi$  は finite fibre を持つ。

**性質 1.**  $d$ -uple は closed immersion である。

(証明)  $d$ -uple  $\psi$  を用いた系列  $\mathbf{P}_k^n \xrightarrow{\psi} \mathbf{P}_k^N \rightarrow k$  を考える。 $\mathbf{P}_k^N \rightarrow k$  は projective なので separated、 $\mathbf{P}_k^n \rightarrow k$  も projective ゆえ proper である。すると Corollary 4.8(e) から、 $\psi$  は proper である。よって  $\psi$  の像は閉集合である。

$S = k[x_0, \dots, x_n]$  とすると、Exercise II.5.13 から  $\mathbf{P}^n \approx \text{Proj } S^{(d)}$ ,  $S^{(d)} = \bigoplus_{n \geq 0} S_{nd}$  であり、また  $k[y_0, \dots, y_N] \twoheadrightarrow S^{(d)}$  は全射なので  $\text{Proj } S^{(d)} \rightarrow \mathbf{P}_k^N$  は closed immersion、よって  $d$ -uple  $\psi$  は closed immersion である。(証明終)

**性質 2.** finite 性は Exercise II.4.8 の (a), (b), (c) を満たす。ゆえに、(d), (e), (f) も満たす。

(証明) Finite morphism は affine で (Exercise II.5.17(b))、affine morphism の合成は affine なので、ここで扱う scheme は affine scheme と仮定してよい。

(a) Exercise II.5.5(b) より closed immersion は finite である。

(b)  $\text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  が finite morphism の合成だったとする。 $A \rightarrow B \rightarrow C$  において  $B$  が有限生成  $A$ -加群、 $C$  が有限生成  $B$ -加群ならば  $C$  は有限生成  $A$ -加群である ([1], Proposition 2.16)。従って  $\text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } A$  は finite である。

---

<sup>2</sup> $\varphi: X \rightarrow Y$  を  $\varphi: X \xrightarrow{\varphi'} \varphi(X) \xrightarrow{\iota} Y$  とみなす。 $\varphi$  は finite ゆえ proper (Exercise II.4.1)、よって  $\iota$  は closed immersion で separated、従って  $\varphi'$  は finite であつ全射となる (性質 2(e))。

(c) 下図式において、 $f' : \text{Spec } A \otimes_C B \rightarrow \text{Spec } B$  が finite であることを示す。

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Spec } A \times_{\text{Spec } C} \text{Spec } B = \text{Spec } (A \otimes_C B) & \\
 \swarrow & & \searrow f' \\
 \text{Spec } A & & \text{Spec } B \\
 \searrow f & & \swarrow \\
 & \text{Spec } C &
 \end{array}$$

$C \rightarrow B$  より  $B$  は  $C$ -加群である。 $f$  が finite なので  $A$  は有限生成  $C$ -加群であり、 $A$  は  $C$  上  $\{a_1, \dots, a_l\}$  で生成される。すると、 $A \otimes_C B$  は  $B$  上  $\{a_1 \otimes_C 1, \dots, a_l \otimes_C 1\}$  で生成される。(証明終)

性質 3. Finite morphism  $f : X \rightarrow Y$  が存在すれば  $\dim X \leq \dim Y$  である。特に、 $f$  が全射ならば、 $\dim X = \dim Y$  である。

(証明) Dimension は開集合の dimension で決まること、および finite morphism は affine なので、 $X, Y$  は affine としてよいことから、 $f : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  の場合に証明すればよい。 $f$  に対応する ring morphism を  $\varphi : A \rightarrow B$  とすると、 $B$  は有限生成  $A$ -module である。このとき、 $B$  は  $A$  上整となる ([1], Proposition 5.1, (ii)  $\Rightarrow$  (i), or Corollary 5.3 後の Remark)。Corollary 5.9, [1] より  $\dim A \geq \dim B$  であり、Example 3.2.7 から  $\dim Y \geq \dim X$  となる。

$f$  が全射とする。 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ ,  $r = \dim Y$  となる prime ideal 列をとる。 $f$  が全射ゆえ  $\mathfrak{p}_0 \in \text{Spec } A$  に対し、 $\mathfrak{q}_0 \in \text{Spec } B$  が存在して  $\mathfrak{p}_0 = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_0)$  となる。すると、上昇定理 ([1], Theorem 5.11) から  $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_r$ ,  $\mathfrak{p}_i = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_i)$  となる  $B$  の prime ideal 系列が存在する。従って、 $\dim A \leq \dim B$ 、すなわち  $\dim Y \leq \dim X$  となる。(証明終)

#### 2.7.4

(a)  $X \rightarrow \text{Spec } A$  が finite type で、 $A$  が noetherian なので  $X$  も noetherian である (Exercise II.3.13(g))。

$\mathcal{L}$  が  $X$  上 ample invertible sheaf なら、ある  $m > 0$  に対して  $\mathcal{L}^m$  は very ample invertible sheaf となる (Theorem 7.6)。従って、immersion  $i$  が存在して

$$X \xrightarrow{i} \mathbf{P}_A^n \rightarrow \text{Spec } A, \quad \mathcal{L}^m = i^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_A^n}(1)$$

である。また immersion は open immersion と closed immersion の合成なので、

$$X \approx U \xrightarrow{o.i.} Z \xrightarrow{c.i.} \mathbf{P}_A^n \rightarrow \text{Spec } A$$

であり、これは  $X$  が  $A$  上 quasi-projective であることを示している。また、Theorem 4.9 より quasi-projective は separated なので、 $X$  は separated である。

(b)  $X$  は  $X_1 = \mathbf{A}_k^1$  と  $X_2 = \mathbf{A}_k^1$  を  $U_i = \mathbf{A}_k^1 - P \subseteq X_i$ ,  $i = 1, 2$  に沿って貼り合わせた、二重に原点  $P = (x)$  を持つ affine line である。以下、二重の原点を  $P_1, P_2$  で区別する。

$$U_i = \mathbf{A}_k^1 - P_i = V(P_i)^c = V(x)^c = D(x) = \text{Spec } k[x]_x = \text{Spec } k[x, x^{-1}]$$

ここで  $U := U_1 \cap U_2 = \text{Spec } k[x, x^{-1}]$  とおく。

$X$  は既約なので (Web 解答 exercise 2.3.15 性質 8)、noetherian integral scheme である (但し、separated ではない、Example 4.0.1)。  $\text{Pic } X \ni \mathcal{L}$  とする。

Proposition 6.2、Proposition 6.11、Proposition 6.15 から  $\text{Pic } \mathbf{A}^1 \approx \text{CaCl } \mathbf{A}^1 = \text{Cl } \mathbf{A}^1 = 0$  であるが、 $\text{Pic } \mathbf{A}^1$  は乗法群として、 $\text{Cl } \mathbf{A}^1$  は加法群としての同型なので、 $\text{Pic } X_i = \{\mathcal{O}_{X_i}\}$ 、よって  $\mathcal{L}|_{X_i} \approx \mathcal{O}_{X_i}$  である。

この対応は

$$\mathcal{O}_{X_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_{X_i}, 1 \mapsto f_i^{-1}, \exists f_i \in k(x)$$

で与えられ (Proposition 6.13(a) の証明中)、 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(D)$  となる divisor  $D$  は

$$D = \{(X_1, f_1), (X_2, f_2)\}$$

$$f_1/f_2 \in \mathcal{O}_{U_1 \cap U_2}^* = k[x, x^{-1}]^* \Rightarrow f_1 = ax^n f_2, a \in k^*, n \in \mathbf{Z}$$

で与えられる。すると

$$\begin{aligned} D &= \{(X_1, ax^n f_2), (X_2, f_2)\} = \{(X_1, x^n), (X_2, 1)\} + \{(X_1, a), (X_2, 1)\} + \{(X_1, f_2), (X_2, f_2)\} \\ &\Rightarrow D - \{(X_1, x^n), (X_2, 1)\} \approx \{(X_1, a), (X_2, 1)\} \end{aligned}$$

ここで  $\{(X_1, f_2), (X_2, f_2)\}$  が principal であることを用いた。さらに、 $a \in k^*$  ゆえ

$$\mathcal{L}(\{(X_1, a), (X_2, 1)\}) = \{\mathcal{O}_{X_1} a^{-1}, \mathcal{O}_{X_2} 1\} = \{\mathcal{O}_{X_1} 1, \mathcal{O}_{X_2} 1\} = \mathcal{L}(\{(X_1, 1), (X_2, 1)\})$$

から  $\{(X_1, a), (X_2, 1)\} \approx \{(X_1, 1), (X_2, 1)\}$ : principal なので、Proposition 6.13(c) より  $D \approx \{(X_1, x^n), (X_2, 1)\}$  が得られる。

これは

$$\mathbf{Z} \rightarrow \text{CaCl } X, n \mapsto D_n := \{(X_1, x^n), (X_2, 1)\}$$

が全射であることを示している。

もし  $D_n = D_0$  とすると、

$$\{(X_1, x^n), (X_2, 1)\} = \{(X_1, 1), (X_2, 1)\} \Rightarrow \mathcal{L}(\{(X_1, x^n), (X_2, 1)\}) = \mathcal{L}(\{(X_1, 1), (X_2, 1)\})$$

$$\Rightarrow x^n/1, 1/x^n \in \mathcal{O}_{X_1}(X_1) \Rightarrow x^n \in \mathcal{O}_{X_1}(X_1)^* = k^* \Rightarrow n = 0$$

から、単射でもある。よって、 $\text{Pic } X \approx \mathbf{Z}$  となる。

$\mathcal{L}_n := \mathcal{L}(D_n) = \{\mathcal{O}_{X_1} x^{-n}, \mathcal{O}_{X_2} 1\}$  が generated by global sections (以下、これを ggs と記す) となるのは  $n = 0$  に限ることを示す。

Global section を  $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}_n) = \{\mathcal{O}_{X_1}(X_1)x^{-n}, \mathcal{O}_{X_2}(X_2)1\} = \{k[x]x^{-n}, k[x]\}$  とすると

$$s|_{X_1} \in x^{-n}\mathcal{O}_{X_1}(X_1) = x^{-n}k[x], \quad s|_{X_2} \in 1 \cdot \mathcal{O}_{X_2}(X_2) = k[x]$$

$$\Rightarrow s|_{X_1} = x^{-n}b(x), \quad s|_{X_2} = a(x), \quad a(x), b(x) \in k[x]$$

となり、sheaf の性質から  $(s|_{X_1})|_U = (s|_{X_2})|_U$  より  $k[x]_x = k[x, x^{-1}]$  において  $x^{-n}b(x)/1 = a(x)/1$  となるが  $k[x]$  が整域なので  $b(x) = a(x)x^n$ 、すなわち  $s = \{g, g\}$ ,  $g \in k[x]$  の形となる。

すると  $s_{P_1} = (s|_{X_1})|_{P_1} = x^{-n} \cdot b(x)/1 = a(x)/1 \in x^{-n}\mathcal{O}_{X_1, P_1} = x^{-n}k[x]_{(x)}$ ,  $s_{P_2} = (s|_{X_2})|_{P_2} = a(x)/1 \in \mathcal{O}_{X_2, P_2} = k[x]_{(x)}$  なので、 $s_{P_1} = g$ ,  $s_{P_2} = g$  となる。

$\mathcal{L}_n$  が  $\{s^i\}_i$  で globally generated だとすると ( $s^i = \{g^i, g^i\}$  として)

$$(\mathcal{L}_n)_{P_1} = \oplus_i \mathcal{O}_{P_1} g^i = \oplus_i k[x]_{\mathfrak{p}} g^i, \quad (\mathcal{L}_n)_{P_2} = \oplus_i \mathcal{O}_{P_2} g^i = \oplus_i k[x]_{\mathfrak{p}} g^i$$

が成り立つ ( $\mathfrak{p} = (x)$  は  $P_1$  (および  $P_2$ ) に対応する prime ideal)。すなわち、形的にはそれらは等しい。

ところが  $(\mathcal{L}_n)_{P_1}$ ,  $(\mathcal{L}_n)_{P_2}$  はそれぞれ次のようになり

$$(\mathcal{L}_n)_{P_1} = \{(\mathcal{O}_{X_1})_{P_1} x^{-n} = k[x]_{\mathfrak{p}} x^{-n}$$

$$(\mathcal{L}_n)_{P_2} = \{(\mathcal{O}_{X_1})_{P_2} = k[x]_{\mathfrak{p}}$$

$k[x]_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{c(x)}{1+d(x)} \mid c(x), d(x) \in k[x] \right\}$  なので、 $k[x]_{\mathfrak{p}} x^{-n} = k[x]_{\mathfrak{p}}$  となるのは  $n = 0$  のときのみである。

Coherent sheaf  $\mathcal{L}_1$  に対して  $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_0^m = \mathcal{L}_1$  は ggs でないので、 $\mathcal{L}_0$  は ample ではない。また、coherent sheaf  $\mathcal{O}_X$  に対して  $\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{L}_n^m = \mathcal{L}_{n+m}$  は、 $-n$  以外の全ての  $m$  に対して ggs ではない。よって、 $X$  に ample invertible sheaf は存在しない。

## 2.7.5

$X$ : noetherian,  $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ : ggs とする。

(a)  $\mathcal{L}$  は ample なので、任意の coherent sheaf  $\mathcal{F}$  に対し、十分大きな  $n_0$  が存在して、 $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n$  は ggs である ( $\forall n \geq n_0$  に対して)。

一方、次の性質 4 より、 $\mathcal{M}^n$  も ggs であり

$$(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) \otimes \mathcal{M}^n \approx \mathcal{F} \otimes (\mathcal{L} \otimes \mathcal{M})^n : \text{generated by global sections}$$

となるので、 $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$  は ample である。

性質 4.  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  が ggs なら  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$  も ggs である。

(証明)  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  が各々  $\{s^i\}_{i \in I}$ ,  $\{t^j\}_{j \in J}$  で globally generated とすると、 $\forall P \in X$  に対して

$$\mathcal{F}_P = \oplus_{i \in I} \mathcal{O}_P s_P^i, \quad \mathcal{G}_P = \oplus_{j \in J} \mathcal{O}_P t_P^j$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{G}_P = \oplus_{(i,j) \in I \times J} \mathcal{O}_P(s_P^i \otimes_{\mathcal{O}_P} t_P^j) \quad (3)$$

さて、presheaf:  $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$  を  $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-$  とおくと

$$s^i \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} t^j \in (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^-(X)$$

であるが、Proposition-Definition II.1.2 より、 $\theta : (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^- \rightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$  が存在し、その証明中にあるように  $\theta_P = \text{id}$  となる。よって、 $\theta_X(s^i \otimes t^j)$  は  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$  の global section であり

$$(\theta_X(s^i \otimes t^j))_P = \theta_P(s^i \otimes t^j)_P = s_P^i \otimes t_P^j$$

から<sup>3</sup>、式 (3) を用いると

$$\oplus_{(i,j) \in I \times J} \mathcal{O}_P(\theta_X(s^i \otimes t^j))_P = \oplus_{(i,j) \in I \times J} \mathcal{O}_P(s_P^i \otimes_{\mathcal{O}_P} t_P^j) = \mathcal{F}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{G}_P = (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_P$$

が得られ、 $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$  は ggs となる。

(b) Coherent sheaf  $\mathcal{F}$  に対して  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^l$  は  $l \geq l_0$  となる任意の  $l$  に対して ggs となる ( $\exists l_0 > 0$ )。また invertible sheaf は coherent なので、十分大きな  $m$  に対して  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^m$  は ggs である。よって性質 4 より

$$(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^l) \times (\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^m)^l = \mathcal{F} \otimes (\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{m+1})^l$$

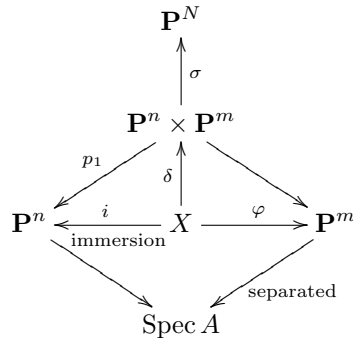
も ggs となり、十分大きな  $n$  に対し、 $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^n$  は ample sheaf である。

(c)  $\mathcal{F}$  を coherent sheaf とすると  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n$  は  $l \geq n_0$  となる任意の  $n$  に対して ggs となる ( $\exists n_0 > 0$ )。また、 $\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{M}^n = \mathcal{M}^n$  も  $l \geq n_1$  となる任意の  $n$  に対して ggs となる ( $\exists n_1 > 0$ )。よって性質 4 より  $\forall n \geq \max(n_0, n_1)$  に対して

$$(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) \otimes \mathcal{M}^n = \mathcal{F} \otimes (\mathcal{L} \otimes \mathcal{M})^n$$

も ggs であり、 $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$  は ample sheaf となる。

(d)  $\mathcal{L}$  が very ample なので immersion  $i : X \hookrightarrow \mathbf{P}_A^n$  が存在して  $\mathcal{L} = i^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$  とかけ、また  $\mathcal{M}$  が ggs ということから Theorem 7.1(b) より morphism  $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}_A^m$  が存在して  $\mathcal{M} = \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1)$  とかける。



<sup>3</sup>一般に  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  のとき  $\rho_P^{\mathcal{G}}(f(U)s) = f_P(\rho_P^{\mathcal{F}}s) \Rightarrow (f(U)s)_P = f_P(s_P)$

Exercise II.4.9 のヒントにあるように Segre embedding  $\sigma$  は closed immersion である。

このとき

$$\begin{aligned} (\sigma\delta)^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(1) &\stackrel{\S}{=} \delta^*\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(1) \stackrel{\%}{=} \delta^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m}(1) \\ &\stackrel{\&}{=} \delta^*(p_1^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1) \otimes p_2^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1)) \stackrel{\#}{=} (p_1\delta)^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1) \otimes (p_2\delta)^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1) \\ &= i^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1) \otimes \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1) = \mathcal{L} \otimes \mathcal{M} \end{aligned}$$

が成立する。ここで、 $\stackrel{\S}{=}$  は Exercise II.5.12 解答内性質 7、 $\stackrel{\%}{=}$  は  $\sigma$  が closed immersion ゆえ Proposition 5.12(c) において  $U = \text{Proj } T$  の場合に相当するからである。さらに  $\stackrel{\&}{=}$  は Exercise II.5.11、 $\stackrel{\#}{=}$  は Exercise II.5.12 解答内性質 6 による。

$\mathbf{P}_A^m \rightarrow \text{Spec } A$  は projective なので separated である (Theorem 4.9)。よって、base change にて separated は stable なので  $p_1$  も separated、 $i = p_1\delta$  は immersion ゆえ  $\delta$  は immersion である (Exercise II.5.12 性質 9)。Immersion の合成は immersion となるので (同性質 9)、 $\delta\sigma : X \rightarrow \mathbf{P}^N$  は immersion である。

以上により  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$  は very ample となる。

(e) Theorem 7.6 から十分大きなある  $n_1$  に対し  $\mathcal{L}^{n_1}$  は very ample である。また ample の定義から、十分大きな整数  $n_2$  に対して、 $\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{L}^{n+n_2} = \mathcal{L}^{n+n_2}$ ,  $\forall n \geq 0$  は ggs である。

すると、(d) から任意の  $n \geq 0$  に対して  $\mathcal{L}^{n_1} \otimes \mathcal{L}^{n+n_2} = \mathcal{L}^{n+n_0}$ ,  $n_0 = n_1 + n_2$  は very ample となる。

## 2.7.6

(a)  $\mathcal{L}$  が very ample ということから、 $i : X \rightarrow \mathbf{P}_k^m$  が存在して、 $\mathcal{L} = i^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1)$  となる。 $X$  が projective over  $k$  なので  $\exists n \geq 0$  に対して  $X \hookrightarrow \mathbf{P}_k^n$  は closed immersion  $\Rightarrow$  proper  $\Rightarrow$  finite-type で、 $\mathbf{P}_k^n$  は noetherian ゆえ  $X$  も noetherian である (Exercise II.3.13(g))。  $X$  が  $k$  上 projective なので proper (Theorem 4.9)、 $\mathbf{P}_k^m \rightarrow k$  は separated、よって  $i$  は proper (Corollary 4.8(e)) となり、 $X$  は  $\mathbf{P}^m$  の closed で integral だから  $V(\mathfrak{p})$  の形となる ( $\mathfrak{p} \subseteq S = k[x_0, \dots, x_m]$  は 齊次 prime ideal)。  $S \rightarrow T = S/\mathfrak{p}$  は全射なので、 $i : X \rightarrow \mathbf{P}^m$  は closed immersion である。よって

$$\mathcal{L}^n = (i^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1))^{\otimes n} = \mathcal{O}_X(1)^{\otimes n} = \mathcal{O}_X(n) = T(n)^\sim$$

すると、十分大きな  $n$  に対して次式が成り立つ (Exercise II.5.9(b))。

$$\Gamma(X, \mathcal{L}^n) = \Gamma(X, T(n)^\sim) = T_n$$

Theorem I.7.5 から  $P_T(n) = \dim_k T_n$  なので、 $P_X(n) = \dim \Gamma(X, \mathcal{L}^n)$ 、すなわち  $\dim_k |nD| = P_X(n) - 1$  を得る<sup>4</sup>。

<sup>4</sup> $T = S/\mathfrak{p} = S(X)$  なので、テキスト p. 52 の第 2Definition に従えば  $P_X(n) = P_T(n)$  である。



(b)  $r|n$  のとき  
 $nD = 0$  なので、 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(D)$  とすると Proposition 6.13 から

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{L}(D)^{\otimes n} = \mathcal{L}(nD) = \mathcal{O}_X$$

既に述べたように  $X$  は noetherian で projective だから proper であり、Exercise II.4.5(d) より

$$\Gamma(X, \mathcal{L}^n) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$$

$$\Rightarrow \dim |nD| = \dim_k \Gamma(X, \mathcal{L}^n) - 1 = 0$$

である。

$r \nmid n$  のとき

この場合  $nD \neq 0$  なので、もし effective divisor  $E \geq 0$  が  $E \sim nD$  を満たしていたとすると  $E > 0$  となる。Effective divisor の定義から、0 でない effective divisor の和は 0 でない effective divisor となるので、 $rE > 0$  である。しかるに、 $E \sim nD$  ならば  $rE \sim rnD$  であり、 $rD = 0$  から  $rE = 0$  となり、矛盾する。

よって  $|nD| = \emptyset$  から  $\dim_k |nD| = \dim_k \emptyset = -1$  である。

### 2.7.7

(a)  $X = \mathbf{P}_k^2$ ,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(D) = \mathcal{O}_X(2)$  において、 $|D| \approx V' = (x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx) \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$  から  $X \rightarrow \mathbf{P}_k^5$  が得られるが、それは Example 7.8.3 より 2-uple embedding である。

(b)  $V = (x^2, y^2, z^2, y(x-z), z(x-y))$  は、 $x(y-z) = y(x-z) - z(x-y)$  より、 $x, y, z$  に関して対称形であることに注意する。

Remark 7.8.2 を用いて証明する。

[(a)]  $P, Q \in X$ ,  $P \neq Q$  のとき、 $ax^2 + by^2 + cz^2 + dy(x-z) + ez(x-y)$  に  $P = (\alpha, \beta, \gamma)$  を代入して 0、 $Q = (\alpha', \beta', \gamma')$  を代入して非零となるように  $a, \dots, e$  を定められるのは明らかであるので、Proposition 7.3(a) を満たす。

[(b)] 本性質は local で、 $x, y, z$  に関して対称形なので、 $z = 1$  として考え、 $P = (a, b, 1)$  とする。

$a, b$  のいずれかが非零のとき (一般性を失うことなく  $a \neq 0$  とする)

$$s = 1/2a \cdot x^2 - a/2 \cdot 1$$

$$s' = (x - y) - (a - b) \cdot 1$$

の tangent space は

$$\partial s / \partial x|_{a,b}(x - a) + \partial s / \partial y|_{a,b}(y - b) = x - a$$

$$\partial s' / \partial x|_{a,b}(x - a) + \partial s' / \partial y|_{a,b}(y - b) = (x - a) + (y - b)$$

より、 $(x - a, y - b)$  を生成できる。すると、 $\forall t \in T_P X = \mathbf{P}^2$  に対して、 $D \sim s'' = \alpha s + \beta s'$   $\alpha, \beta \in k$  とすると  $T_P D = \{(x, y) | (\alpha + \beta)(x - a) + \beta(y - b) = 0\}$

なので、 $t \notin T_P D$  となるように  $\alpha, \beta$  を決定できる。このとき、 $s''(P) \neq 0$  より  $P \in \text{Supp } D$  となる。

$(a, b) = (0, 0)$  のときは、

$$s = -y(x-1), s' = x-y$$

をとれば、

$$\partial s / \partial x|_{0,0} x + \partial s / \partial y|_{0,0} y = y$$

$$\partial s' / \partial x|_{0,0} x + \partial s' / \partial y|_{0,0} y = x-y$$

は  $(x, y)$  を生成できるので、あとは同様にして証明できる。

(c) 一般性を失うことなく  $P = (0, 0, 1) \in X = \mathbf{P}^2$  とできる。すると  $P$  を通る 2 次斉次多項式は  $(ax + by + cz)x + (dx + ey + fz)y$  の形なので、結局  $\mathfrak{d} \approx V = (x^2, y^2, xy, yz, zx)$  で与えられる。このとき

$$\psi : S = k[t_0, \dots, t_4] \rightarrow T = k[x, y, z], \quad t_i \mapsto s_i \quad (0 \leq i \leq 4)$$

$$s_0 = x^2, s_1 = y^2, s_2 = xy, s_3 = yz, s_4 = zx$$

に対応する scheme morphism は

$$f : U = X - P \rightarrow \mathbf{P}^4$$

で与えられる。

実際、 $U = \{\mathfrak{p} \in \mathbf{P}^2 \mid \mathfrak{p} \not\supseteq \psi(T_+)\}$  であり (Exercise II.2.14(b))、 $\psi(T_+) = (x^2, y^2, xy, yz, zx)$  を含む max ideal は  $\mathfrak{p} = (x, y)$  に限るので、 $\psi(T_+)$  を含む prime ideal も  $\mathfrak{p}$  のみ、 $U = X - P$  となる。

このとき、

$$U \xrightarrow{\sim} V(F, G) \cap W \xrightarrow{\text{o.i.}} V(F, G) \xrightarrow{\text{c.i.}} \mathbf{P}^4, \quad W = V(t_0, t_1)^c$$

$$F = t_0 t_3 - t_2 t_4, \quad G = t_0 t_1 - t_2^2$$

が成り立つ (o.i. は open immersion)。

( $\because$ ) variety 上で  $Z := \{(a^2, b^2, ab, bc, ca)\}_{(a,b,c) \in U} \approx V(F, G) \cap W$  を示す。  $Z \subseteq V(F, G) \cap W$  は明らかである ( $U$  の元は  $P = (0, 0, 1)$  を除いているので、 $a^2, b^2$  のいずれかは非零である)。逆に、 $F = 0, G = 0$  でかつ  $t_0 \neq 0$  とする。すると、

$$(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) \sim (1, t_1/t_0, t_2/t_0, t_3/t_0, t_4/t_0) \sim (1, t_2^2/t_0^2, t_2/t_0, t_2 t_4/t_0^2, t_4/t_0)$$

$$\sim (t_0^2, t_2^2, t_0 t_2, t_2 t_4, t_4 t_0) \approx (x^2, y^2, xy, yz, zx)$$

よって  $Z \approx V(F, G) \cap W$  である。 $U \approx Z$  は自明である。(  $\because$  終)

以上により、 $\varphi : U \rightarrow \mathbf{P}^4$  は immersion となる。

Example 7.17.3 を適用する。開集合  $\{Q \in X \mid \mathcal{L}_Q = \mathcal{O}_X(2)_Q = \oplus_{0 \leq i \leq 4} \mathcal{O}_{X,Q} s_i\} = X - P = U$  となる。実際  $P$  を含まない  $D_+(x)$ ,  $D_+(y)$  では両者は一致するが、 $D_+(z)$  では  $P \sim (x, y)$  で localize すると一致せず、それ以外の点では一致する。

$$\psi : k[t_0, \dots, t_4] \rightarrow k[x, y, z], \quad t_i \mapsto s_i \quad (0 \leq i \leq 4)$$

から

$$k[t_0, \dots, t_4] \twoheadrightarrow k[t_0, \dots, t_4] / \ker \psi \approx \text{im } \psi = k[x^2, y^2, xy, yz, zx] \hookrightarrow k[x, y, z]$$

$$U \rightarrow Z = \text{Proj } k[x^2, y^2, xy, yz, zx] \hookrightarrow \mathbf{P}^4$$

が成り立つので次図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{X} & & \\ & \swarrow \pi & & \searrow \tilde{\varphi} & \\ X & \xleftarrow{\text{inclusion}} & U & \xrightarrow{i} & Z & \longrightarrow & \mathbf{P}^4 \\ & & & \searrow \varphi & & & \end{array}$$

$\varphi$  は  $\tilde{\varphi}$  の制限になっており、 $\varphi$  が単射なので  $i : U \rightarrow Z$  も単射である。

上図式において  $\tilde{X}$  は  $k$  上 projective なので (Proposition 7.16(c))、 $\tilde{\varphi}$  も projective ゆえ (Exercise II.4.9)、proper なので閉写像、よってその制限  $\varphi$  も閉写像である。

$X, \tilde{X}, Z$  とともに既約なので (Proposition 7.16(a))<sup>5</sup>、 $\overline{U} = X$ ,  $\pi^{-1}(U)^- = U^- = \tilde{X}$ ,  $i(U)^- = U^- = Z$  である (閉包が異なるので、区別するため異なる閉包の記号を使った)。 $\tilde{X}$  の閉集合は閉写像によって閉集合に映るので、 $U \subseteq Z$  から  $\tilde{X} = U^- \subseteq Z$  となるが閉包は最小閉集合なので、 $\tilde{X} \approx Z$  である (実は  $\tilde{X}, Z$  共に  $\mathbf{P}^4$  の世界の話なので、そこにおける閉包は一致する)。

次に、 $\tilde{X}$  の degree を求める。

$\dim k[t_0, \dots, t_4] / (F, G) = 2$  より  $\tilde{X}$  は surface であり、その degree は一般的な位置関係にある 2 個の hyperplane の交点の個数に等しい (テキスト p.48 上部分)。 $\mathbf{P}^4$  の hyperplane  $\sum_{0 \leq i \leq 4} a_i t_i$  と  $\tilde{X}$  の共通部分 ("交線") は  $a_0 x^2 + a_1 y^2 + a_2 xy + a_3 yz + a_4 zx$  なので

$$a_0 x^2 + a_1 y^2 + a_2 xy + a_3 yz + a_4 zx = 0, \quad b_0 x^2 + b_1 y^2 + b_2 xy + b_3 yz + b_4 zx = 0$$

の交点数を求める。 $x \neq 0$  と仮定してよいので、 $x = 1$  として  $z$  を消去すると  $y$  の 3 次式となるので、交点数は 3、すなわち  $\deg \tilde{X} = 3$  である。

$\mathbf{P}^2$  における  $P$  を通る直線は  $\alpha x + \beta y = 0$  であるが、 $\beta \neq 0$  と仮定できるので、 $y = \lambda x$  としてよい。このとき  $\tilde{X} \approx \text{Proj } k[x^2, y^2, xy, yz, zx]$  において、 $(x^2, y^2, xy, yz, zx) = (x^2, \lambda^2 x^2, \lambda x^2, \lambda xz, xz) \sim (1, \lambda^2, \lambda, \lambda z, z)$  は直線  $V(t_1 - \lambda^2 t_0, t_2 - \lambda t_0, t_3 - \lambda t_4)$  が対応する。

<sup>5</sup>  $Z = \text{Proj } k[x^2, y^2, xy, yz, zx]$  において  $k[x^2, y^2, xy, yz, zx] \subseteq k[x, y, z]$  は整域である。

異なる  $\mathbf{P}^2$  の直線  $y = \lambda'x$ ,  $\lambda' \neq \lambda$  に対応する  $(1, \lambda'^2, \lambda', \lambda'z, z)$  が  $(1, \lambda^2, \lambda, \lambda z, z)$  と一致する  $z$  は存在しないので、対応する直線は交わらない。

$(x^2, y^2, xy, yz, zx)$  において、 $x, y$  のいずれかは 0 でないので、 $x \neq 0$  と仮定する。 $y/x = \lambda$  とすると  $(x^2, y^2, xy, yz, zx) \sim (1, \lambda^2, \lambda, \lambda z, z)$  より  $V(t_1 - \lambda^2 t_0, t_2 - \lambda t_0, t_3 - \lambda t_4)$  に属す。すなわち任意の点は  $\mathbf{P}^2$  の直線  $y = \lambda x$  の像に含まれる。

## 2.7.8

Proposition 7.12 において、 $Y = X$ ,  $g = \text{id} : Y \xrightarrow{\sim} X$  とおくと、 $\pi\sigma = \text{id}_X$  となる  $\sigma$  の存在と、 $Y$  上の invertible sheaf  $\mathcal{L}$  および全射  $\psi : \text{id}^*\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$  の存在は等価である。なお、準同型定理  $\mathcal{L} \approx \text{id}^*\mathcal{E}/\ker \psi$  より  $\mathcal{L}$  は quotient sheaf である。

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{P}(\mathcal{E}) & \\ \sigma \nearrow & & \searrow \pi \\ Y = X & \xrightarrow{\text{id}} & X \end{array}$$

## 2.7.9

(a) Picard group morphism を次のように定義する。

$$\varphi : \text{Pic } X \times \mathbf{Z} \rightarrow \text{Pic } \mathbf{P}(\mathcal{E})$$

$$(\mathcal{L}, n) \mapsto \pi^*\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(n)$$

Exercise II.6.8(a) より  $\pi^*\mathcal{L}$  は invertible なので、 $\pi^*\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(n)$  は invertible である。

$\text{Pic } X \times \mathbf{Z}$  には自然に群構造が入っており、単位元は  $(\mathcal{O}_X, 0)$  である。これに対して  $\varphi$  は準同型になっている。

[単射性]

$\pi^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}$  とすると、左から  $\pi_*$  を作用させた  $\pi_*(\pi^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(n)) = \pi_*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})})$  から、Exercise II.5.1(d) と Proposition 7.11 を用いて

$$\mathcal{L} \otimes \pi_*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(n)) = \mathcal{O}_X$$

を得る。

ここで、もし  $n < 0$  とすると左辺は 0 となり (Proposition 7.11)、 $\mathcal{O}_X$  と等しくないなので、 $n \geq 0$  である。このとき、上式は

$$\mathcal{L} \otimes S^n(\mathcal{E}) = \mathcal{O}_X$$

となる (Proposition 7.11)。

よって  $S^n(\mathcal{E}) = \mathcal{L}^{-1} \in \text{Pic } X$  から  $S^n(\mathcal{E})$  の rank は 1 である。一方、Exercise II.5.11 によれば  $S^n(\mathcal{E})$  の rank は  $\binom{n+r-1}{r-1} = \frac{n+r-1}{r-1} \cdots \frac{n+1}{1}$  なので、 $n \geq 0, r \geq 2$  の条件下でこれが 1 となるのは  $n = 0$  のみである。

このとき、 $\mathcal{L} \otimes S^n(\mathcal{E}) = \mathcal{O}_X$  から  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$  が得られるが、 $(\mathcal{L}, n) = (\mathcal{O}_X, 0)$  より  $\varphi$  は単射となる。

[全射性]

$X$  の affine open cover  $X = \{U\}$  を、 $\mathcal{E}|_U = \mathcal{O}_U^{r-1}$  となるようにとる。このとき  $V = \pi^{-1}(U) = \mathbf{P}_U^{r-1} = U \times \mathbf{P}^{r-1}$  は  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  の open covering となっている。

$U$  は既約  $X$  の開集合ゆえ既約である。また、regular, separated, noetherian, reduced は local 性質なので、 $U$  は regular, separated, noetherian, integral である。

Exercise 5.16 より  $\mathcal{S}(\mathcal{E}|_U) = \mathcal{O}_U[x_0, \dots, x_{r-1}]$  なので、

$$\mathbf{P}(\mathcal{E}|_U) = \text{Proj } \mathcal{S}(\mathcal{E}|_U) = U \times \mathbf{P}^{r-1}$$

となる。一方、Exercise II.6.1 からの  $\text{CL}(U \times \mathbf{P}^{r-1}) \cong \text{CL } U \times \mathbf{Z}$  より、 $\text{Pic}(U \times \mathbf{P}^{r-1}) \cong \text{Pic } U \times \mathbf{Z}$  となり (Proposition 6.11 と Proposition 6.15)

$$\text{Pic } \mathbf{P}(\mathcal{E}|_U) \cong \text{Pic } U \times \mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \text{im } \varphi$$

が得られる。ここで、最後の  $\xrightarrow{\sim}$  は  $\varphi$  が単射であることによる。従って  $\mathbf{P}(\mathcal{E}|_U)$  上の invertible sheaf は  $\pi_i^* \mathcal{L}_i \otimes_{\mathcal{O}_{V_i}} \mathcal{O}_{V_i}(n_i)$  の形をしている。

$X$  の open covering  $X = \{U_i\}_i$  に対応する  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  の covering を  $\{V_i\}$  とするとき、 $\forall \mathcal{M} \in \text{Pic } \mathbf{P}(\mathcal{E})$  に対して  $\mathcal{M}|_{V_i} \in \text{Pic } V_i = \text{Pic } \mathbf{P}(\mathcal{E}|_U) \cong \text{Pic } U \times \mathbf{Z}$  より、 $\mathcal{M}|_{V_i} = \pi_i^* \mathcal{L}_i \otimes_{\mathcal{O}_{V_i}} \mathcal{O}_{V_i}(n_i)$  とかける。同様に  $V_j$  においては  $\mathcal{M}|_{V_j} = \pi_j^* \mathcal{L}_j \otimes_{\mathcal{O}_{V_j}} \mathcal{O}_{V_j}(n_j)$  となる。

さて、 $V_{ij} = V_i \cap V_j$  に対し、 $(\mathcal{M}|_{V_i})|_{V_{ij}} = \mathcal{M}|_{V_{ij}} = (\mathcal{M}|_{V_j})|_{V_{ij}}$  なので、

$$(\pi_i^* \mathcal{L}_i \otimes_{\mathcal{O}_{V_i}} \mathcal{O}_{V_i}(n_i))|_{V_{ij}} = (\pi_j^* \mathcal{L}_j \otimes_{\mathcal{O}_{V_j}} \mathcal{O}_{V_j}(n_j))|_{V_{ij}}$$

$$\Rightarrow \pi_{ij}^* \mathcal{L}_i|_{U_{ij}} \otimes_{\mathcal{O}_{V_{ij}}} \mathcal{O}_{V_{ij}}(n_i) = \pi_{ij}^* \mathcal{L}_j|_{U_{ij}} \otimes_{\mathcal{O}_{V_{ij}}} \mathcal{O}_{V_{ij}}(n_j)$$

既に示した単射性から、 $n_i = n_j$ 、 $\mathcal{L}_i|_{U_{ij}} = \mathcal{L}_j|_{U_{ij}}$  となるので、 $n_i = n$  とでき、かつ  $\mathcal{L} \in \text{Pic } X$  が存在して  $\mathcal{L}|_{U_i} = \mathcal{L}_i$  である。従って、 $\mathcal{M} = \pi^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(n)$  となり、全射性が示された。

(b)  $X$  上で  $\varphi: \mathbf{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(\mathcal{E}')$  とする。 $\mathcal{E}'$  についても rank は 2 以上としてよいと思われるので、ここではそう仮定する。このとき、 $\varphi^* \mathcal{O}'(1)$  は invertible なので (Exercise 6.8(a))、 $\text{Pic } \mathbf{P}(\mathcal{E})$  に属し、既に示した (a) から  $X$  の invertible sheaf  $\mathcal{L}$  を用いて  $\varphi^* \mathcal{O}'(1) = \mathcal{O}(n) \otimes \pi^* \mathcal{L}$  となる。

$n = 1$  であることを示す。

( $\because$ ) Proposition 7.11 から

$$\mathcal{E}' = \pi'_* \mathcal{O}'(1) \stackrel{\$}{=} \pi_* \varphi^* \mathcal{O}'(1) = \pi_*(\mathcal{O}(n) \otimes \pi^* \mathcal{L}) \stackrel{\%}{=} \pi_* \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{L} = S^n(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{L} \quad (4)$$

なので、rank をとって  $r' = \binom{n+r-1}{r-1}$  を得る。ここで、 $\$, \%$  はそれぞれ下記性質 5、Exercise II.5.1(d) による。なお、 $n \geq 0$  となるのは既に示したとおりであるが、もし  $n = 0$  とすると  $r' = 1$  となってしまうので  $n \geq 1$  である。

$\binom{n+r-1}{r-1} = \frac{n+r-1}{r-1} \cdots \frac{n+1}{1}$  は  $n$  の増加関数なので、 $r = \binom{1+r-1}{r-1} \leq \binom{n+r-1}{r-1} = r'$  となり、同様にして  $r' \leq r$  が得られるので、 $r' = r$  である。すると再び  $r = r' = \binom{n+r-1}{r-1}$  から  $n = 1$  を得る。( $\therefore$  終)  
よって式 (4) より

$$\mathcal{E}' = \pi'_* \mathcal{O}'(1) = \pi_* \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{L} = \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$$

となる。

逆に  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$  とすると  $\pi^* \mathcal{E}' = \pi^* \mathcal{E} \otimes \pi^* \mathcal{L}$  となるが、Proposition 7.11(b) から  $\pi^* \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{O}(1)$  は全射であり、tensor は右完全なので

$$\pi^* \mathcal{E}' \twoheadrightarrow \mathcal{O}(1) \otimes \pi^* \mathcal{L} \in \text{Pic } X \times \mathbf{Z} = \text{Pic } \mathbf{P}(\mathcal{E})$$

が成り立つ。よって Proposition 7.12 から  $\varphi : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E}')$  となる morphism が一意に存在する (一意性は Proposition 7.12 の証明の中に示されている)。 $\mathcal{E} = \mathcal{E}' \otimes \mathcal{L}^{-1}$  から同様にして  $\varphi' : \mathbf{P}(\mathcal{E}') \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E})$  が得られる。

$Y = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ ,  $g = \pi$  として proposition 7.12 を適用すると、一意性から  $\varphi' \varphi = \text{id}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}$  が得られ、同様にして  $\varphi \varphi' = \text{id}_{\mathbf{P}(\mathcal{E}')}$  も得られるので、 $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \cong \mathbf{P}(\mathcal{E}')$  が成り立つ。

性質 5.  $\pi : X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\pi'} S$  のとき、functor として  $\pi_* \varphi^* = \pi'_*$  である。

(証明)  $\mathbf{P}(\mathcal{E}')$  上の任意の  $\mathcal{G}$  に対して、Exercise II.5.1 の解答内性質 1 から

$$\begin{aligned} \pi_* \varphi^* \mathcal{G} &= \mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}, \pi_* \varphi^* \mathcal{G}) = \mathcal{H}om(\pi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}, \varphi^* \mathcal{G}) \\ &= \mathcal{H}om((\varphi^{-1})^* \pi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}, (\varphi^{-1})^* \varphi^* \mathcal{G}) = \mathcal{H}om((\pi \varphi^{-1})^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}, \mathcal{G}) \\ &= \mathcal{H}om(\pi'^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}, \mathcal{G}) = \mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}, \pi'_* \mathcal{G}) = \pi'_* \mathcal{G} \end{aligned}$$

が成り立つ。(証明終)

## 2.7.10

(a)  $\mathbf{P}^n$ -bundle over  $X$  の定義が述べられている。

(b)  $\mathcal{E}$  が locally free sheaf of rank  $n+1$  のとき、 $P = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ ,  $\pi : P \rightarrow X$  に対して  $X = \{U_i\}_i$ ,  $V_i = \pi^{-1}U_i = \mathbf{P}_{U_i}^n$  とすると、 $U = \text{Spec } A \subseteq U_i \cap U_j$  に対する transition automorphism は Exercise II.5.18(a) で示したように、linear automorphism になる。よって、 $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  は projective  $n$ -space bundle となる。

(c)  $P$  の定義から  $\pi : P \rightarrow X$  に対し、 $X = \{U_i\}_i$ ,  $V_i = \pi^{-1}U_i = \mathbf{P}_{U_i}^n \subseteq P$  であり、 $P = X \times \mathbf{P}^n$  となる。

$\mathcal{L}_i = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_{U_i}^n}(1)$  とする。 $U_i \cap U_j$  内の任意の affine open  $U = \text{Spec } A$ ,  $V = \pi^{-1}(U)$  に対して、 $\mathcal{L}_i|_V(V) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_U^n}(1)(\mathbf{P}_U^n) = A[x_0, \dots, x_n]_1$  とかけ、同様に  $\mathcal{L}_j|_V(V) = A[x'_0, \dots, x'_n]_1$  とかける。

Transition automorphism の条件から  $A[x'_0, \dots, x'_n] \approx A[x_0, \dots, x_n]$  なので、貼り合わせにより  $P$  上 invertible sheaf  $\mathcal{L}$  を得る。

$\mathcal{E} = \pi_* \mathcal{L}$  とすると  $\mathcal{E}$  は  $\mathcal{O}_X$ -module であり、 $\mathcal{E}|_{U_i} = \pi_* \mathcal{L}_i = \pi_* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_{U_i}^n}(1)$  から

$$(\mathcal{E}|_{U_i})|_U = \pi_* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_{U_i}^n}(1)|_U = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_{U_i}^n}(1)|_{\pi^{-1}U} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_U^n}(1)|_{\pi^{-1}U} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_U^n}(1) = \mathcal{O}_U[x_0, \dots, x_n]_1$$

となるが (実際、 $\mathcal{E}|_{U_i}(U) = \pi_* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_{U_i}^n}(1)(U) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_U^n}(1)(\mathbf{P}_U^n) = A[x_0, \dots, x_n]_1$ )、これは  $\{x_l\}_l$  を基底とする rank  $n+1$  の free sheaf なので、 $\mathcal{E}$  は locally free sheaf of rank  $n+1$  である。

$\mathcal{E}$  から  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  を作成すると、 $\mathcal{E}$  が  $\mathcal{O}_X$ -module なので、 $\text{Sym}(\mathcal{E})$  は  $\mathcal{O}_X[x_0, \dots, x_n]$  となる。 $P$  も  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  もそれから構成されているので、等しくなるはずであるが、簡単に言えば、 $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  の projection morphism を  $\pi'$  とすると、 $\pi^{-1}(U)$  も  $\pi'^{-1}(U)$  も  $U \times \mathbf{P}^n$  なので

$$P = \pi^{-1}(X) = X \times \mathbf{P}^n = \pi'^{-1}(X) = \mathbf{P}(\mathcal{E})$$

よりそれらは等しい。

$X$  が regular ということは locally factorial まで拡張できる。実際、(b) では transition automorphism は linear automorphism になるということを利用して、 $\text{Pic } X$  が  $\mathcal{O}(1)$  で生成されることを用いている。しかし、 $\text{Pic}$  は  $\text{CaCl}$  から定義されており、基本となる Corollary 6.17 とその証明にある  $\text{Pic } X$  が  $\mathcal{O}(1)$  で生成されることは、 $\text{Cl}$  の公式に依存している。よってそれを  $\text{Pic}$  で使うには、Proposition 6.11 に述べられているように、locally factorial ならばよいので、regularity をそこまで緩めることは可能である。

(d)  $X$  上  $\mathbf{P}^n$ -bundle  $P$  に対して  $P \approx \mathbf{P}(\mathcal{E})$  となる  $\mathcal{E}/\sim$  を対応させる。ここで  $\sim$  は  $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}' \Leftrightarrow \mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{M}, \exists \mathcal{M} : X \text{ 上 invertible sheaf, となる同値関係}$ 。Exercise 7.9(b) と本問題 Exercise 7.10(b), (c) から、この対応は 1 対 1 である。

## 2.7.11

(a) Exercise II.5.13 より、任意の open  $U \subseteq X$  に対して

$$\mathbf{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{J}(U)^n = \mathbf{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{J}(U)^{dn}$$

が成り立つので、 $\tilde{X} = \mathbf{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{J}^n \rightarrow \mathbf{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{J}^{dn}$  を示せば十分である。

まず、 $\mathcal{J}$ : coherent なので  $\mathcal{J}^d$ : coherent,  $d > 0$  である (Proposition 5.2(b))。また  $\pi^{-1} \mathcal{J}^d = (\pi^{-1} \mathcal{J})^d$  であり (Exercise II.5.1 解答内性質 3)、 $\pi^{-1} \mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$  が invertible なので (Proposition 7.13(a))、

$$\pi^{-1} \mathcal{J}^d \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}} = (\pi^{-1} \mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}})^d$$

も invertible である (Proposition 6.12)。よって、Proposition 7.14 より  $\tilde{X} \rightarrow \text{Bl}_{\mathcal{J}^d}(X)$  が存在する (Bl は blowing-up を示す)。

以上により  $\tilde{X} = \mathbf{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^{dn}$  が示された。

(b) Invertible sheaf  $\mathcal{I}$  は coherent sheaf、coherent sheaf の (tensor) 積は coherent sheaf なので、 $\mathcal{I} \cdot \mathcal{I}$  は coherent sheaf である。

$\mathcal{I} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d$  とすると、Lemma 7.9 から

$$\mathcal{I} * \mathcal{I} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d \otimes \mathcal{I}^d = \bigoplus_{d \geq 0} (\mathcal{I} \cdot \mathcal{I})^d$$

$$\Rightarrow \mathbf{Proj} \mathcal{I} = \mathbf{Proj} \mathcal{I} * \mathcal{I}$$

ゆえ、 $\mathcal{I}$  における  $X$  の blowing-up と  $\mathcal{I} \cdot \mathcal{I}$  における  $X$  の blowing-up は等しい。

(c)  $U$  を、 $f^{-1}U = U$  を満たす極大 open set とすると<sup>6</sup>、 $f^{-1}V = V$  となる open  $V$  は  $V \subseteq U$  を満たす。

$X$  が regular なので、 $\mathcal{I}$  の生成元 ( $X$ : noetherian なので有限) の最大公約元が取れ、それによる Cariter divisor に対応する invertible sheaf を  $\mathcal{F}$  とする。

Theorem 7.17 において、(b) から  $\mathrm{Bl}_{\mathcal{I}'} X = \mathrm{Bl}_{\mathcal{I}} X = Z$  なので、 $f$  は  $\pi'$  でもあり、従って  $f^{-1}V' = V'$  が成り立ち ( $V' := X - \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}')$ )、 $V' \subseteq U \Rightarrow \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}') \supseteq X - U$  を得る。

$\pi^{-1}U = \mathbf{Proj} \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}(U)$  より  $\pi^{-1}U = \mathrm{Bl}_{\mathcal{I}(U)}(U)$  なので、Proposition 7.13(a) から、 $(\pi^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}})|_{\pi^{-1}U} = \pi^{-1}\mathcal{I}|_U \cdot \mathcal{O}_{\pi^{-1}U}$  は invertible である。

$\pi^{-1}U \approx U \Rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{O}_U) = \mathcal{O}_{\pi^{-1}U} \approx \mathcal{O}_U$  から<sup>7</sup>、 $\pi^{-1}(\mathcal{I}|_U) \approx \mathcal{I}|_U$  ゆえ  $(\pi^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}})|_{\pi^{-1}U} = \mathcal{I}|_U \cdot \mathcal{O}_U = \mathcal{I}|_U$  も invertible である。

よって (b) から  $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \cdot \mathcal{F}$  も  $U$  で invertible で、 $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}') \subseteq X - U$  が成り立つ。

以上、両者を合わせると、 $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}') = X - U$  が得られる。

## 2.7.12

$i_Y : Y \hookrightarrow X$  とする。 $\tilde{X}$  は  $\mathcal{I} := \mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z$  に関する blowing-up であり、 $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y$  なので (Proposition 5.9 の証明内)、 $Y$  における  $\mathcal{I}$  の inverse image ideal sheaf は  $\mathcal{I}^e = \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y = \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y = \mathcal{I}/\mathcal{I}_Y$  である。

よって

$$\tilde{Y} = \mathbf{Proj} \bigoplus_{d \geq 0} (\mathcal{I}/\mathcal{I}_Y)^d = \mathbf{Proj} \left( \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d / \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}_Y^d \right)$$

$$\tilde{Z} = \mathbf{Proj} \bigoplus_{d \geq 0} (\mathcal{I}/\mathcal{I}_Z)^d = \mathbf{Proj} \left( \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d / \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}_Z^d \right)$$

<sup>6</sup>Zorn の補題から、このような極大 open set は存在する。また、 $f^{-1}U_\lambda = U_\lambda \Rightarrow f^{-1}(\bigcup_\lambda U_\lambda) = \bigcup_\lambda U_\lambda$  より  $f^{-1}V = V \Rightarrow V \subseteq U$  である。

<sup>7</sup> $f : X \xrightarrow{\sim} Y$  のとき、 $\mathcal{O}_Y \rightarrow \pi_*\mathcal{O}_X \Rightarrow \pi^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$  であり、 $x, \pi x$  で両辺の stalk をとれば一致するので、 $\pi^{-1}\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$  となる。



となる。すると

$$\begin{aligned}
\tilde{Y} \cap \tilde{Z} &= \text{Proj} \left( \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d / \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}_Y^d \right) \cap \text{Proj} \left( \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d / \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}_Z^d \right) \\
&= V \left( \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}_Y^d \right) \cap V \left( \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}_Z^d \right) = V \left( \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}_Y^d + \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}_Z^d \right) \\
&= \text{Proj} \left( \bigoplus_{d \geq 0} (\mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z)^d / \left( \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}_Y^d + \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}_Z^d \right) \right) = \emptyset
\end{aligned}$$

が成り立つ。

### 2.7.13

(a)  $\mathbf{P}^1$  において、 $\{0\} = (0, 1)$ ,  $\{\infty\} = (1, 0)$  とする。下図式の  $C \rightarrow \text{Spec } k$  は projective ゆえ  $(C = \text{Proj } S/I \rightarrow \mathbf{P}^2, S = k[x, y, z], I = (y^2 - x^3 - x^2z))$  は、 $S \rightarrow S/I$  が全射なので、closed immersion)、proper、従って base change の  $C \times (\mathbf{P}^1 - \{\infty\}) \rightarrow \mathbf{P}^1 - \{\infty\} \approx \mathbf{A}^1$  も proper である。同様に  $C \times (\mathbf{P}^1 - \{0\}) \rightarrow \mathbf{P}^1 - \{0\}$  も proper である。

$$\begin{array}{ccc}
& C \times (\mathbf{P}^1 - \{\infty\}) & \\
\swarrow & & \searrow \\
C & & \mathbf{P}^1 - \{\infty\} \\
\searrow \text{proper} & & \swarrow \\
& \text{Spec } k &
\end{array}$$

$\mathbf{G}_m = \mathbf{A}^1 - 0 = \mathbf{P}^1 - \{0, \infty\} = \text{Spec } k[t, t^{-1}]$  に対し、

$$\varphi : C \times (\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}) \rightarrow C \times (\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}), \langle P_t, u \rangle \mapsto \langle P_{ut}, u \rangle$$

が定義できる。ここで、 $P \in C$  は Exercise II.6.7 で示したように、 $t$  で表せるのでそれを明示するために  $P_t$  と記している。 $t$  は max ideal  $(T - t) \subseteq k[T]$  に対応している。

Scheme glueing lemma Exercise II.2.12 において

$$X_0 := C \times (\mathbf{P}^1 - \{\infty\}), X_1 := C \times (\mathbf{P}^1 - \{0\})$$

$$U_{01} := C \times (\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}) \subseteq X_0, U_{10} := C \times (\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}) \subseteq X_1$$

$$\varphi_{01} = \varphi : U_{01} \rightarrow U_{10}, \langle P_t, u \rangle \mapsto \langle P_{ut}, u \rangle$$

$$\varphi_{10} = \varphi^{-1} : U_{10} \rightarrow U_{01}, \langle P_t, u \rangle \mapsto \langle P_{u^{-1}t}, u \rangle$$

とすれば scheme  $X$  と<sup>8</sup>、 $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}^1$  が定義できる。

<sup>8</sup> $\varphi = \text{id}$  ではないので、 $X = C \times \mathbf{P}^1$  とはならないことに注意。

この際、 $\pi_0 : U_{01} \xrightarrow{\varphi_{01}} U_{10} \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{P}^1 - \{0, \infty\} \approx \mathbf{G}_m$  が可換なので ( $\pi_0 = \pi_1 \varphi$ ,  $\langle P_t, u \rangle \mapsto \langle P_{ut}, u \rangle \mapsto u$  のこと)、 $X_0 \rightarrow \mathbf{P}^1 - \{\infty\}$  と  $X_1 \rightarrow \mathbf{P}^1 - \{0\}$  の貼り合わせは  $X \rightarrow \mathbf{P}^1$  となる。

$$\begin{array}{ccccc}
 U_{01} & \hookrightarrow & X_0 & & \\
 \uparrow \varphi_{01} & & \searrow \psi_0 & \searrow \pi_0 & \\
 & & & X & \xrightarrow{\pi} \mathbf{P}^1 \\
 \downarrow \varphi_{10} & & \nearrow \psi_1 & \nearrow \pi_1 & \\
 U_{10} & \hookrightarrow & X_1 & & 
 \end{array} \quad (5)$$

$X_0 \rightarrow \mathbf{P}^1 - \{\infty\}$ ,  $X_1 \rightarrow \mathbf{P}^1 - \{0\}$  は各々 proper だったので、Corollary 4.8(f) から  $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}^1$  も proper であり<sup>9</sup>、よって  $X$  は  $k$  上 complete である。

(b)  $C$  の normalization が  $\tilde{C} = \mathbf{P}^1$  となることは Exercise II.6.9 解答で示したが、すると整閉包の普遍的性質 (Exercise II.3.8 解答内) から

$$\widetilde{C \times \mathbf{A}^1} = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{A}^1 \quad (6)$$

となる。実際、下図式において、左図を整閉包  $\sigma : \mathbf{P}^1 \rightarrow C$  の U.P. とすると、右図のように  $f : Z \rightarrow C \times \mathbf{A}^1$  に対して整閉包  $\bar{\sigma} := \sigma \times 1 : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{A}^1 \rightarrow C \times \mathbf{A}^1$  を構成でき、また  $g$  の一意性は明らかである。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{P}^1 & \xrightarrow{\sigma} & C \\
 \swarrow \exists! g_1 & & \nearrow f_1 \\
 & Z & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{P}^1 \times \mathbf{A}^1 & \xrightarrow{\bar{\sigma} = \sigma \times 1} & C \times \mathbf{A}^1 \\
 \swarrow \exists! g = g_1 \times f_2 & & \nearrow f = f_1 \times f_2 \\
 & Z & 
 \end{array}$$

Exercise II.6.9(a) は  $X = C \times \mathbf{A}^1$  としても成り立つ。実際、その解答において snake lemma が用いられているが、その  $\ker \alpha = \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) = k^*$  が成立する理由は、 $X = C \times \mathbf{A}^1$  のカバリングを  $V = \text{Spec } k[x, y]/I \otimes k[u]$  として sheaf を分解して考えると、 $\mathcal{O}_V(V) = k[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, u] \approx k[t, u]^* = k^*$  が成り立つ。 $\tilde{X} = \mathbf{P}^1$  についても同様に  $\Gamma(W, \mathcal{O}_W^*) = k[t, u]^* = k^*$  となる ( $W := \text{Spec } k[t] \otimes k[u]$ )。後は Exercise II.6.9(a) の証明がそのまま使える。

そこで、 $X' = C \times \mathbf{A}^1$  として Exercise II.6.9(a) を適用すると

$$0 \rightarrow \Gamma(C \times \mathbf{A}^1, \bar{\sigma}_* \mathcal{O}_{\tilde{C} \times \mathbf{A}^1}^* / \mathcal{O}_{C \times \mathbf{A}^1}^*) \rightarrow \text{Pic}(C \times \mathbf{A}^1) \xrightarrow{\bar{\sigma}^*} \text{Pic}(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{A}^1) \rightarrow 0 \quad (7)$$

となる。

ここで、 $\infty$  は  $y = \infty$  とすることにより  $C$  を  $y^2 = x^3 + x^2$  とみなす。

一般に  $L \subseteq M$  のとき  $(M \otimes N)/(L \otimes N) = M/L \otimes N$  なので<sup>10</sup>、これを用いると  $C$  の部分と  $\mathbf{A}^1$  (または  $\mathbf{A}^1 - 0$ ) の部分に分けることができる。すなわち、

$$\bar{\sigma}_* \mathcal{O}_{\tilde{C} \times \mathbf{A}^1}^* / \mathcal{O}_{C \times \mathbf{A}^1}^* = \sigma_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}^* / \mathcal{O}_C^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}^*$$

<sup>9</sup>  $X_0 \rightarrow \mathbf{P}^1 - \{\infty\}$ ,  $X_1 \rightarrow \mathbf{P}^1 - \{0\}$  はともに projective であるが、projective 性については Exercise II.4.8(f) は成立しても Corollary 4.8(f) が成立するとは限らない。

<sup>10</sup>  $m \otimes n + L \otimes N \in (m + L) \otimes N, (m + L) \otimes n = m \otimes n + L \otimes n \in M \otimes N + L \otimes N$

となるので (stalk を取れば等しく、また今述べたことから open  $U$  上で  $\bar{\sigma}_* \mathcal{O}_{\bar{C} \times \mathbf{A}^1}^* / \mathcal{O}_{C \times \mathbf{A}^1}^* \rightarrow \sigma_* \mathcal{O}_{\bar{C}}^* / \mathcal{O}_C^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}^*$ )、

$$(\bar{\sigma}_* \mathcal{O}_{\bar{C} \times \mathbf{A}^1}^* / \mathcal{O}_{C \times \mathbf{A}^1}^*)|_{P_0 \times \mathbf{A}^1} = (\sigma_* \mathcal{O}_{\bar{C}}^* / \mathcal{O}_C^*)|_{P_0} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}^*|_{\mathbf{A}^1}$$

$$\stackrel{a}{=} \widetilde{\mathcal{O}_{P_0}}^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}^* \stackrel{b}{=} \mathbf{G}_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}^* = \mathbf{G}_m \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}^*$$

であり ( $\stackrel{a}{=}$  は Exercise II.6.9(a)、 $\stackrel{b}{=}$  は Exercise II.6.9(b) の  $\widetilde{\mathcal{O}_{P_0}}^* / \mathcal{O}_{P_0}^* = \mathbf{G}_m$ )

$$(\bar{\sigma}_* \mathcal{O}_{\bar{C} \times \mathbf{A}^1}^* / \mathcal{O}_{C \times \mathbf{A}^1}^*)(P_0 \times \mathbf{A}^1) = \mathbf{G}_m \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}^*(\mathbf{A}^1) = \mathbf{G}_m k[u]^* = \mathbf{G}_m$$

となる。

Proposition 6.6 と Proposition 6.4(c) を用いれば、 $\text{Pic}(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{A}^1) = \mathbf{Z}$  であり、式 (7) は

$$0 \rightarrow \mathbf{G}_m \rightarrow \text{Pic}(C \times \mathbf{A}^1) \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

となる。

この完全系列は分裂している。実際、

$$\alpha : \mathbf{Z} \rightarrow \text{Pic}(C \times \mathbf{A}^1), 1 \mapsto \mathcal{O}_{C \times \mathbf{A}^1}(1)$$

とすると、linear system として  $(t, u) = (\bar{\sigma}^* x, \bar{\sigma}^* y, \bar{\sigma}^* u)$  より、 $\bar{\sigma}^*(\mathcal{O}_{C \times \mathbf{A}^1}(1))$  は生成元となるので、 $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1 \times \mathbf{A}^1}(1) = \bar{\sigma}^*(\mathcal{O}_{C \times \mathbf{A}^1}(1))$ 、 $\bar{\sigma}^* \alpha = 1_{\mathbf{Z}}$  である。

よって

$$\text{Pic}(C \times \mathbf{A}^1) = \mathbf{G}_m \times \mathbf{Z}$$

が得られる。

さて、 $\text{Pic}(C \times \mathbf{A}^1) = \mathbf{G}_m \times \mathbf{Z} \ni (t, n)$ ,  $t \in \mathbf{G}_m$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  としよう。このときの  $n$  は  $\text{Pic}(C \times \mathbf{A}^1) \ni \mathcal{L}(D)$  の  $\deg D$  である (Proposition 6.9(c))。Exercise II.6.7 から  $P_{ut'} = P_{t'} + P_u - P_0$  なので、 $\text{Pic}(C \times \mathbf{A}^1) \ni \mathcal{L}(D)$ ,  $D = \sum_i n_i < P_{t_i}, u_i >$  のとき、 $D = < P_{\Pi_i t_i^{n_i}} + (n-1)P_0, \Pi_i u_i^{n_i} >$ ,  $n = \deg D = \sum_i n_i$  である (curve 上では prime divisor の次数は 1)。

このとき、 $0 \rightarrow \mathbf{G}_m \rightarrow \text{Pic}(C \times \mathbf{A}^1) \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0$  においては  $t \in \mathbf{G}_m$  は  $\Pi_i t_i^{n_i}$  に対応している。

$\text{Pic}(C \times (\mathbf{A}^1 - 0))$  に関しては、 $X' = C \times (\mathbf{A}^1 - 0)$  とした式 (7) に対応して

$$0 \rightarrow \Gamma(X', \bar{\sigma}^* \mathcal{O}_{X'}^* / \mathcal{O}_{X'}^*) \rightarrow \text{Pic}(C \times (\mathbf{A}^1 - 0)) \xrightarrow{\bar{\sigma}^*} \text{Pic}(\mathbf{P}^1 \times (\mathbf{A}^1 - 0)) \rightarrow 0$$

が成り立つ。

なお、 $C \times (\mathbf{A}^1 - 0)$  の整閉包は  $\mathbf{P}^1 \times (\mathbf{A}^1 - 0)$  で (式 (6) と同様、 $k[u, u^{-1}]$  は整閉)、Exercise II.6.1 から  $\text{Pic}(\mathbf{P}^1 \times (\mathbf{A}^1 - 0)) = \text{Pic}(\mathbf{A}^1 - 0) \times \mathbf{Z}$  であり、 $k[u, u^{-1}]$  は UFD ゆえ  $\text{CL}(\mathbf{A}^1 - 0) = \text{CL}(\text{Spec } k[u, u^{-1}]) = 0$  なので (Proposition 6.2)、 $\text{Pic}(\mathbf{P}^1 \times (\mathbf{A}^1 - 0)) = 1 \times \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$  となる。

$C \times (\mathbf{A}^1 - 0)$  のときの  $(\overline{\sigma'}^* \mathcal{O}_{\tilde{C} \times (\mathbf{A}^1 - 0)}^* / \mathcal{O}_{C \times (\mathbf{A}^1 - 0)}^*)(C \times (\mathbf{A}^1 - 0))$  の部分も同様に  $(\mathbf{A}^1 - 0 = \text{Spec } k[u, u^{-1}])$

$$(\overline{\sigma'}^* \mathcal{O}_{\tilde{C} \times (\mathbf{A}^1 - 0)}^* / \mathcal{O}_{C \times (\mathbf{A}^1 - 0)}^*)(C \times (\mathbf{A}^1 - 0)) = \mathbf{G}_m k[u, u^{-1}]^* = \mathbf{G}_m \times \mathbf{Z} \quad (8)$$

なので、上完全系列は

$$0 \rightarrow \mathbf{G}_m \times \mathbf{Z} \rightarrow \text{Pic}(C \times (\mathbf{A}^1 - 0)) \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

となる。これも同様に分裂するので

$$\text{Pic}(C \times (\mathbf{A}^1 - 0)) = \mathbf{G}_m \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$$

が成り立つ。

(c) 制限写像  $\text{Pic}(C \times \mathbf{A}^1) \rightarrow \text{Pic}(C \times (\mathbf{A}^1 - 0))$  を、それぞれの完全系列に施すと

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{G}_m & \longrightarrow & \text{Pic}(C \times \mathbf{A}^1) & \longrightarrow & \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{G}_m \times \mathbf{Z} & \longrightarrow & \text{Pic}(C \times (\mathbf{A}^1 - 0)) & \longrightarrow & \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

を得る。左の列  $\mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{G}_m \times \mathbf{Z}$  では  $t = tu^0 \in \mathbf{G}_m$  に相当していたので、 $t \mapsto \langle t, 0 \rangle$  となる。中央の列の元は両脇の元  $\langle t, 0 \rangle$  と  $n$  を合わせたものとなり、 $\text{Pic}(C \times \mathbf{A}^1) \rightarrow \text{Pic}(C \times (\mathbf{A}^1 - 0))$ ,  $\langle t, 0 \rangle \mapsto \langle t, 0, n \rangle$  となる。

完全系列

$$0 \rightarrow \mathbf{G}_m \times \mathbf{Z} \rightarrow \text{Pic}(C \times (\mathbf{A}^1 - 0)) \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0 \quad (9)$$

において、 $\mathbf{G}_m \times \mathbf{Z} \ni \langle t, d \rangle$ ,  $\mathbf{Z} \ni n$ 、すなわち  $\text{Pic}(C \times (\mathbf{A}^1 - 0)) \ni \mathcal{L}(D) = \langle t, d, n \rangle$  とする。

$\mathbf{G}_m \times \mathbf{Z} \ni \langle t, d \rangle$  は式 (8) からきているので、 $\mathbf{G}_m \times \mathbf{Z}$  の元  $\langle t, d \rangle$  は正確には  $tu^d$  である。

ここで上記完全系列 (9) に  $\varphi$  を作用させる。これは  $\varphi \langle P_t, U \rangle = \varphi \langle P_{\Pi_i t_i^{n_i} + (n-1)P_0}, \Pi_i u_i^{n_i} \rangle$  より  $\varphi_{u_i}$  の形の作用を  $n$  回実施するということとなる。一回につき  $tu^d \mapsto tu^{d+1}$  と変化させるので ( $u_i$  をまとめて  $u$  と記している)、全体では  $tu^d \mapsto tu^{d+n}$  となる。

よって  $\varphi$  によって、 $\mathbf{G}_m \times \mathbf{Z} \ni \langle t, d \rangle \mapsto \langle t, d+n \rangle$ ,  $\text{Pic}(C \times (\mathbf{A}^1 - 0)) \ni \langle t, d, n \rangle \mapsto \langle t, d+n, n \rangle$  と写る。

(d)  $X$  は  $C \times (\mathbf{P}^1 - \{0\})$  と  $C \times (\mathbf{P}^1 - \{\infty\})$  を  $\varphi : C \times (\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}) \xrightarrow{\sim} C \times (\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\})$  に沿って貼り付けた scheme なので、図式 (5) の記号を用いて

次の可換図が得られる。

$$\begin{array}{ccc}
& \text{Pic}(C \times (\mathbf{P}^1 - 0)) & \longrightarrow \text{Pic } C \times (\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}) \\
\text{Pic } X & \begin{array}{c} \nearrow \psi_1^* \\ \searrow \psi_0^* \end{array} & \downarrow \varphi \\
& \text{Pic}(C \times (\mathbf{P}^1 - \infty)) & \longrightarrow \text{Pic } C \times (\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\})
\end{array}$$

$\text{Pic } X$  の元に対して、上のルートでは  $\mathcal{L} \mapsto (t, 0, n) \mapsto (t, 0, n) \in \text{Pic } C \times (\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}) = \text{Pic } C \times (\mathbf{A}^1 - 0)$  となり、さらに  $\varphi$  によって  $(t, 0, n) \mapsto (t, n, n)$  と変化する。一方、下のルートでは  $\mathcal{L} \mapsto (t', n') \mapsto (t', 0, n') \in \text{Pic } C \times (\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\})$  となる。それらが等しいので、 $(t', 0, n') = (t, n, n) \Rightarrow t = t', n = n' = 0$  を得る。

よって  $\text{Pic } X \ni \mathcal{L} \mapsto (t, 0) \in \text{Pic}(C \times (\mathbf{P}^1 - \infty)) = \text{Pic}(C \times \mathbf{A}^1) = \text{Pic } C$  より、 $\text{Pic } X$  の  $\text{Pic } C$  への像は次数 0 の divisor からなっている。

さて、 $X$  が  $k$  上 projective と仮定する。 $C \rightarrow X \rightarrow \mathbf{P}^r$  から

$$\text{Pic } \mathbf{P}^r \rightarrow \text{Pic } X \rightarrow \text{Pic } C$$

が得られる。Exercise II.6.2(d) より、 $\mathbf{P}^r$  の divisor の写った先での次数は行き先 scheme の次数倍なので、例えば  $\mathbf{P}^r$  の次数 1 の divisor の像の次数は  $1 \cdot \deg C = 3$  となる。ところが、すでに述べたように、 $\text{Pic } X \rightarrow \text{Pic } C$  を通過する divisor の次数は 0 となってしまうので、矛盾する。

よって  $X$  は projective over  $k$  ではないし、 $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}^1$  も projective ではない。

## 2.7.14

(a)  $X = \mathbf{P}^1$ ,  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X(-1)^{\oplus r}$ ,  $r > 1$  とすると、 $X$  は noetherian で、 $\mathcal{E}$  は invertible なので locally free of rank  $r$  であり、また有限生成  $\mathcal{O}_X$ -module なので coherent である。

$P := \mathbf{P}(\mathcal{E}) = \mathbf{Proj} \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{E}^{\otimes d}$  としたとき、 $\mathcal{O}_P(1)$  の global section  $\Gamma(\pi^{-1}X, \mathcal{O}_P(1))$  は  $\pi^{-1}X = \mathbf{Proj} \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{E}(X)$  の 1 次部分なので  $\mathcal{E}(X) = \mathcal{O}_X(-1)(X) = 0$ 、すなわち  $\Gamma(\pi^{-1}X, \mathcal{O}_P(1)) = 0$  である<sup>11</sup>。

このとき、もし  $\mathcal{O}_P(1)$  が  $X$  に関して very ample だとすると、 $i : P \hookrightarrow \mathbf{P}_X^r$  と、 $\mathcal{O}_P(1)$  を生成する global section  $s_0, \dots, s_r$  が存在して  $s_j = i^*x_j$  を満たすことになるが、 $\mathcal{O}_P(1)$  の global section は 0 なので  $r = 0$ 、すなわち  $P \hookrightarrow \mathbf{P}_X^0$  となってしまう、これはあり得ない。よって  $\mathcal{O}_P(1)$  は  $X$  に関して very ample ではない。

[注意]  $X \rightarrow Y$  の場合には、Theorem 7.6 は下記の性質 7 に示すように  $(\Rightarrow)$  は拡張できるが、 $(\Leftarrow)$  について証明したわけではないので、 $\mathcal{O}_P(1)$  が ample でないからといって  $X$  に関して very ample でないとは言えない。

<sup>11</sup>一般に  $X = \text{Proj } S = \text{Proj} \bigoplus_d S_d$  のとき、 $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(1)) = \widetilde{S(1)}(X)|_0 = S_1$

(b) Ample の定義 (Definition, p.153) では、 $X$  が noetherian ということが前提となっているので、ここでも  $X$  は noetherian とする。

Proposition 7.10(b) から  $\mathcal{O}_P(1) \otimes \pi^* \mathcal{L}^m$ ,  $\exists m > 0$  は  $X$  に関して  $P$  上 very ample であり、また、Exercise II.7.5(e) から<sup>12</sup>、ある正整数  $n_0$  に対し、 $\mathcal{L}^n$ ,  $\forall n \geq n_0$  は  $Y$  に関して  $X$  上 very ample である。

よって、Exercise II.5.12(b) より

$$(\mathcal{O}_P(1) \otimes \pi^* \mathcal{L}^m) \otimes \pi^* \mathcal{L}^n = \mathcal{O}_P(1) \otimes \pi^* \mathcal{L}^{m+n}, \forall n \geq n_0$$

すなわち

$$\mathcal{O}_P(1) \otimes \pi^* \mathcal{L}^n, \forall n \geq N = m + n_0$$

は  $Y$  に関して  $P$  上 very ample となる。

性質 6. (一般化 Theorem 7.1)

$f: X \rightarrow Y$  とする。

(a) Morphism  $\varphi: X \rightarrow \mathbf{P}_Y^n = Y \times \text{Proj } \mathbf{Z}[x_0, \dots, x_n]$  が存在すると、 $X$  上の sheaf  $\mathcal{L} := \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^n}(1)$  は invertible であり、 $\mathcal{L}$  は  $s^i = \varphi^* x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  で ggs される。

(b)  $X$  上 invertible sheaf  $\mathcal{L}$  が  $s^i \in \mathcal{L}_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  で ggs されるならば、 $\varphi: X \rightarrow \mathbf{P}_Y^n$  が一意的に存在して、 $\mathcal{L} := \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^n}(1)$ ,  $s^i = \varphi^* x_i$  を満たす。

(証明) (a)  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^n}(1)$  が invertible なので  $\mathcal{L} := \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^n}(1)$  も invertible であり<sup>13</sup>、Theorem 7.1(a) の証明はそのまま成立する。

(b)  $s^i \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ ,  $i = 0, \dots, n$  が  $\mathcal{L}$  を ggs するとする。 $X_i := \{P \in X | s_P^i \notin \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P\}$  とおく。

$Y$  の open affine covering の一つを  $V = \text{Spec } A$  とし、 $U = f^{-1}V$ ,  $X'_i = X_i \cap U$  とする。このとき、 $s^i|_U \in \Gamma(U, \mathcal{L}|_U)$  は  $\mathcal{L}|_U$  を ggs するので、Theorem 7.1(b) から  $\varphi_U: U \rightarrow \mathbf{P}_V^n$  が一意的に存在して、 $\mathcal{L}|_U := \varphi_U^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_V^n}(1)$ ,  $s^i|_U = \varphi_U^* x_i$  を満たす。

この際、 $\varphi_U: U \rightarrow \mathbf{P}_V^n$  は、 $U_i = U \cap X_i = \{P \in U | s_P^i \notin \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P\}$  としたとき

$$A[y_0, \dots, y_n] \rightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i}), y_j \mapsto s^j|_U / s^i|_U, y_j = x_j / x_i$$

$$\Rightarrow U_i \rightarrow \mathbf{P}_{V_i}^n, V_i = \text{Spec } A[y_0, \dots, y_n]$$

から貼り合わせで得られた  $s^i, s^j|_U$  の貼り合わせが global section  $s^j$  ゆえ、さらに  $\varphi_U: U \rightarrow \mathbf{P}_V^n$  から  $\varphi: X \rightarrow \mathbf{P}_Y^n$  へのもう一段の貼り合わせが可能となり、 $s^i = \varphi^* x_i$  も得られ、 $\mathcal{L} = \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^n}(1)$  が成り立つ。(証明終)

性質 7. (一般化 Theorem 7.6( $\Rightarrow$ ))

$f: X \rightarrow Y$  が finite type、 $\mathcal{L}$  が invertible sheaf とする。このとき、

$$\mathcal{L} : \text{ample} \Rightarrow \mathcal{L}^{\otimes m} : \text{very ample over } Y, \exists m > 0$$

<sup>12</sup> この Exercise II.7.5(e) が  $f: X \rightarrow Y$  の場合でも成立するのは、拡張版 Theorem 7.1(次の性質 6) および拡張版 Theorem 7.6( $\Rightarrow$ )(次の性質 7) が成立するからである。

<sup>13</sup> 一般に  $f: X \rightarrow Y$  で、 $\mathcal{F}$  が  $Y$  上 invertible sheaf ならば  $f^* \mathcal{F}$  も invertible sheaf である。なぜなら、 $\mathcal{F}|_V = \mathcal{O}_V$ ,  $U := f^{-1}V$  のとき、 $(f^* \mathcal{F})|_U = \bar{f}^* \mathcal{F}|_V = \bar{f}^* \mathcal{O}_V = \bar{f}^{-1} \mathcal{O}_{V \otimes_{\bar{f}^{-1} \mathcal{O}_V} \mathcal{O}_U} = \mathcal{O}_U$

(証明)  $f : X \rightarrow Y$  において、 $Y$  の affine open covering をとって  $Y \supseteq V_l = \operatorname{Spec} A_l$  を考えると、Theorem 7.6 の  $(\Rightarrow)$  部分の証明はそのまま使える。この際、 $V_l$  から作られた  $\{b_{l,i,j}, c_{l,i,j}\}_{l,i,j}$  を全体として捉え、 $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}_Y^N$  を拡張版 Theorem 7.1(性質 6) を利用してテキスト証明と同様に構成すればよい。(証明終)

[注意] Theorem 7.6( $\Leftarrow$ ) は証明できてない。実際、こちらでは Serre の定理 5.17 も拡張する必要があり、そもそも  $Y$  が noetherian であることが必要となる。

## References

- [1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald: Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, 1963