2 Schemes

2.6 Divisors

2.6.1

Scheme X が条件 (*)、すなわち noetherian integral separated scheme で、codim $1 \circ \mathcal{O}_x$ が regular であるとする。このとき $X \times \mathbf{P}^n$ も (*) を満たすことを示す。

(Noetherian) X は有限個の $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, A_i : noetherian ring でカバーでき (Def. p.83)、 \mathbf{P}^n は $D_+(x_j) = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x_0, \cdots, x_n]_{(x_j)}$, $j = 0, \cdots, n$ でカバーされるので、 $X \times \mathbf{P}^n$ は $\operatorname{Spec} A_i[x_0/x_i, \cdots, x_n/x_i]$ でカバーできる。

るので、 $X \times \mathbf{P}^n$ は Spec $A_i[x_0/x_j, \cdots, x_n/x_j]$ でカバーできる。 A_i は noetherian ゆえ $A_i[x_0/x_j, \cdots, x_n/x_j]$ も noetherian であり ([1], Corollary 7.6)、従って $X \times \mathbf{P}^n$ は noetherian となる。

(Integral) X, $\mathbf{P}^n \mathcal{O}$ open affine covering $\mathcal{E} U_i = \operatorname{Spec} A_i$, $D_+(x_i) \geq \mathcal{F} \leq \mathcal{E}$

$$U_i \times D_+(x_j) = \operatorname{Spec} A_i[x_0/x_j, \cdots, x_n/x_j]$$

は integral なので、次の性質 1 より、 $X \times \mathbf{P}^n$ は integral である。

(Separated) X, \mathbf{P}^n は separated なので (Spec \mathbb{Z} 上)、 $X \times_{\mathbb{Z}} \mathbf{P}^n$ も separated である (Corollary 4.6, (d))。

(Regular in codimension 1) これは local な性質なので、 $X \times \mathbf{P}^n$ をカバーする開集合 $X \times \mathbf{A}^n$ がそれを満たせばよい。Fiber product は結合律を満たし (解答 Exercise II.4.4 の性質 3 に示した)、 $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{n-1} \times \mathbf{A}^1$ なので¹ Proposition 6.6 を用いれば、数学的帰納法より成立する。

次に $Cl(X \times \mathbf{P}^n) \cong Cl(X) \times \mathbb{Z}$ を証明する。

まず、 $q: X \times \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ を projection morphism とすると、 $\eta_0 = (x_0)$ に対し、 $Z := q^{-1}(\{\eta_0\}^-) = X \times \{\eta_0\}^-$ は既約であり、codimension が 1 であることを示す²。

$$\{\eta_0\}^- = V((x_0)) = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]/(x_0) = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$$

= $\bigcup_j D^0_+(x_j), \ D^0_+(x_j) := \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x_1/x_j, \dots, x_n/x_j]$

より

$$X \times \{\eta_0\}^- = \bigcup_j (X \times D^0_+(x_j))$$
 (1)

であるが、X の open covering を $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ とすると、

$$U_i \times D^0_+(x_j) = \operatorname{Spec} A_i[x_1/x_j, \cdots, x_n/x_j]$$

 $^{^{1}}$ 一方 $\mathbf{P}^{n} = \mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{1}$ とは限らない。Exercise II.5.11

 $^{^2}$ p.88 では inverse image $p_1^{-1}(U)=U\times Y$ を示すときに U を open としているが、証明 を追えば分かるように、U は closed subscheme でも成立する。あるいは、The Stacks project, Definition 26.17.7 より、 $f:X\to Y$ のとき、 $Z\subseteq Y$ に対し $f^{-1}(Z)=Z\times_Y X$ なので、 $p^{-1}(Z)=Z\times_X (X\times_S Y)=Z\times_S Y$ 。

は integral なので、性質 1 から $Z = X \times \{\eta_0\}^-$ は既約となる。

 $X \times \mathbf{P}^n$ の非空な open として Spec $A_i[x_0/x_j, \cdots, x_n/x_j]$ が取れるので、 $\dim(X \times \mathbf{P}^n) = \dim X + n$ である。一方、 $Z = q^{-1}(\{\eta_0\}^-) = X \times \{\eta_0\}^-$ の非空な open として $U_i \times D^0_+(x_j) = \operatorname{Spec} A_i[x_1/x_j, \cdots, x_n/x_j]$ が取れるので (式 (1))、 $\dim Z = \dim X + n - 1$ であり、 $\operatorname{codim} Z = 1$ となる。

Proposition 6.5(c) から $\mathbb{Z} \to \operatorname{Cl} X \times \mathbf{P}^n \to \operatorname{Cl} (X \times \mathbf{P}^n - Z) \to 0$ が成立するが、 $X \times \mathbf{P}^n - Z = q^{-1}(V((x_0))^c) = X \times D_+(x_0) = X \times \mathbf{A}^n$ であり、Proposition 6.6 を用いれば $\operatorname{Cl}(X \times \mathbf{A}^n) = \operatorname{Cl} X$ となるので

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \operatorname{Cl}(X \times \mathbf{P}^n) \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Cl}X \to 0$$

を得る。

ここで、 $i: \mathbb{Z} \to \mathrm{Cl}(X \times \mathbf{P}^n)$ が単射であることを示す。

 $D=dZ=(f),\ f\in K(X imes {f P}^n)$ 、すなわち $v_Z(f)=d\neq 0,\ v_Y(f)=0,\ \forall Y\neq Z$ と仮定する。

X が既約なので \mathcal{K} は constant sheaf、ゆえに $\mathcal{K}(U) = K = K(X)$ で

$$K(X \times \mathbf{P}^n) = \operatorname{Frac}\left(A_i[x_0/x_j, \cdots, x_n/x_j]\right) = K[x_0, \cdots, x_n]_{((0))}$$

であり、これは $K(x_0,\cdots,x_n)$ において、0 次の斉次有理式からなる部分集合に等しい。従って、 $f=(x_0^rg)/h,x_0$ $\not |g,h,\ gcd(g,h)=1,\ r+\deg g=\deg h$ とかける。ここで、 \deg は x_0,\cdots,x_n に関するものである。

 $Z=\{\eta\}^-\subseteq X imes \mathbf{P}^n$ とすると、ある i,j に対し $\eta\in U:=U_i imes D_+(x_j)=\mathrm{Spec}\,A_i[x_0,\cdots,x_n]_{(x_j)},\ U_i=\mathrm{Spec}\,A_i\subseteq X$ であり、 $S=A_i[x_0,\cdots,x_n]$ とすると $S_{(x_j)}$ において、 $\eta=\mathfrak{p}_{(x_j)}=(x_0)_{(x_j)}$ ゆえ (\mathfrak{p} は S \mathcal{O} prime ideal)

$$\mathcal{O}_{X \times \mathbf{P}^n, \eta} = \mathcal{O}_{U, \eta} = (S_{(x_j)})_{\mathfrak{p}_{(x_j)}} = S_{(\mathfrak{p})}$$

となる。

その \max ideal は $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}_{(\mathfrak{p})}=(x_0)_{((x_0))}$ なので、 $f=(x_0^rg)/h$ より $v_{Z\cap U}(f)=r$ である。既に述べたように $v_Z(f)=v_{Z\cap U}(f)$ から、r=d、すなわち

$$f = (x_0^d g)/h, x_0 \not | g, h, gcd(g, h) = 1, d + \deg g = \deg h$$

を得る。 $d \neq 0$ ゆえ、g,h のいずれかは既約成分を持ち、対応する prime divisor を Y とすると、 $v_Y(f) \neq 0$ となって、仮定に反する。よって、i は単射であり、完全系列

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \operatorname{Cl}(X \times \mathbf{P}^n) \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Cl}X \to 0 \tag{2}$$

が得られる。

次に、この完全系列 (2) が分裂していることを示す。 $U:=X \times \mathbf{P}^n - Z = X \times \mathbf{A}^n$ とおくと

$$\varphi: \operatorname{Cl}(X \times \mathbf{P}^n) \to \operatorname{Cl} U, \ V \mapsto V \cap U$$

ここで、Y を X の prime divisor とすると、既に述べたように $Y \times \mathbf{P}^n$ は $X \times \mathbf{P}^n$ の prime divisor となり、性質 2 から

$$Y \times \mathbf{P}^n \mapsto (Y \times \mathbf{P}^n) \cap (X \times \mathbf{A}^n) = Y \times \mathbf{A}^n$$

 $Cl(X \times \mathbf{A}^n) \approx ClX$ の対応により Y が $Y \times \mathbf{A}^n$ に対応しているので、

$$\varphi: Y \times \mathbf{P}^n \mapsto Y$$

ここで、

$$\delta: \operatorname{Cl} X \to \operatorname{Cl} (X \times \mathbf{P}^n), Y \to Y \times \mathbf{P}^n$$

とおくと、 $\varphi \delta = \mathrm{id}_{\mathrm{Cl}\,X}$ なので、完全系列 (2) は分裂している。 以上により、 $\mathrm{Cl}(X \times \mathbf{P}^n) = \mathrm{Cl}\,X \times \mathbb{Z}$ が成立する。

性質 1. 既約 scheme X, Y の open affine covering を $U_i = \operatorname{Spec} A_i, V_j = \operatorname{Spec} B_j$ とするとき、nilradical $\mathfrak{N}(A_i \otimes B_j)$ が prime ideal ならば $X \times Y$ は既約である。 さらに $A_i \otimes B_j$ が整域ならば $X \times Y$ は integral である。

(証明) (i) X が affine scheme の場合 $X = \operatorname{Spec} A, \ \mathfrak{N}(A \otimes B_j)$ が prime ideal とする。

$$X \times Y = X \times \bigcup_{j} V_{j} = \bigcup_{j} (X \times V_{j}) = \bigcup_{j} \operatorname{Spec} (A \otimes B_{j})$$

Exercise II.3.15 の解答内の性質 8 を用いて既約性を示す。 V_j が open なので $X \times V_j$ は open であり、 $X \times V_j = \operatorname{Spec}(A \otimes B_j)$ は仮定より $\mathfrak{N}(A \otimes B_j)$ が prime ideal なので既約である (Example 3.0.1)。

Y が既約なので $V_j \cap V_k \neq \emptyset$ から ι : Spec $B_{jk} \hookrightarrow V_j \cap V_k$ となる B_{jk} が存在し (Exercise II.3.1 の性質 1)、Spec $B_{jk} \neq \emptyset$ である。よって、

$$1 \times \iota : \operatorname{Spec} A \times \operatorname{Spec} B_{ik} \to \operatorname{Spec} A \times (\operatorname{Spec} B_i \cap \operatorname{Spec} B_k)$$
 (3)

において $\operatorname{Spec} A \times \operatorname{Spec} B_{jk} = \operatorname{Spec} (A \otimes B_{jk}) \neq \emptyset$ から $\operatorname{Spec} A \times (\operatorname{Spec} B_j \cap \operatorname{Spec} B_k) \neq \emptyset$ となるので、

$$(X \times V_i) \cap (X \times V_k) = \operatorname{Spec} A \times (\operatorname{Spec} B_i \cap \operatorname{Spec} B_k) \neq \emptyset$$
 (4)

である。よって $X \times Y$ は既約となる。

(ii) X が一般の scheme の場合

 $X \times Y = (\bigcup_i U_i) \times Y = \bigcup_i (U_i \times Y)$ において、 $U_i \times Y$ は open、かつ (i) より既約である。また $V_j = \operatorname{Spec} B_j \overset{\iota'}{\hookrightarrow} Y$ とすると、(i) より $X \times V_j$ は既約ゆえ $(U_i \times V_j) \cap (U_k \times V_j) \neq \varnothing$ である。すると式 (3) と同様に

$$1 \times \iota' : (U_i \cap U_k) \times \operatorname{Spec} B_i \to (U_i \cap U_k) \times Y$$

が存在するので、 $(U_i \times Y) \cap (U_k \times Y) \neq \emptyset$ を得る。従って、Exercise II.3.15 の 性質 8 から $X \times Y$ は既約である。

さらに $A_i \otimes B_j$ が整域ならば $U_i \times V_j$ は integral、よって既約性と合わせて $X \times Y$ は integral となる。(証明終)

性質 **2.** Scheme 系列 $V \hookrightarrow X \stackrel{\delta}{\to} S$, $W \hookrightarrow Y \stackrel{\sigma}{\to} S$ に対し

(1)
$$V \times_S W = (V \times_S Y) \cap (X \times_S W) = p^{-1}V \cap q^{-1}W$$

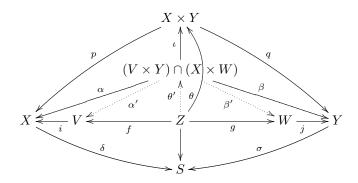
が成り立つ。

さらに開集合 $U \subseteq S$ に対し、 $\delta(V) \subseteq U$, $\sigma(W) \subseteq U$ ならば

(2)
$$V \times_U W = V \times_S W$$

である (Stack Project, Lemma 26.17.3)。

(証明) (1) Fiber product の U.P. を用いて証明する。



上図において、 ι, i, j は実際は inclusion (\subseteq) である。

$$p\theta = if, q\theta = jg$$

より $p\theta(Z)=f(Z)\subseteq V\Rightarrow \theta(Z)\subseteq p^{-1}(V)=V\times Y$ 、同様に $\theta(Z)\subseteq X\times W$ なので

$$\theta(Z) \subseteq (V \times Y) \cap (X \times W)$$

従って θ は実質 $\theta': Z \to (V \times Y) \cap (X \times W)$ である。

$$\alpha:=p\iota=p|_{(V\times Y)\cap(X\times W)},\;\beta:=q\iota=q|_{(V\times Y)\cap(X\times W)}$$
 とおくと

$$\alpha((V \times Y) \cap (X \times W)) = p((V \times Y) \cap (X \times W)) \subseteq p(V \times Y) \subseteq V$$

$$\Rightarrow \alpha((V \times Y) \cap (X \times W)) \subseteq V$$

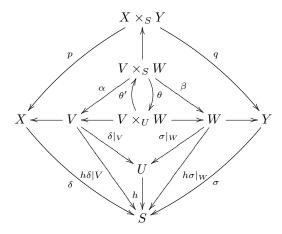
なので、 α は実質 $\alpha': (V \times Y) \cap (X \times W) \rightarrow V$ に等しい。

よって、 $\alpha\theta'=p\iota\theta'=p\theta=if$ から $\alpha'\theta'=f$ となり、同様にして $\beta'\theta'=g$ を得る。

 θ' の他に $\delta: Z \to (V \times Y) \cap (X \times W)$ が存在して、 $\alpha' \delta = f$, $\beta' \delta = g$ を満たしたとする。すると、 $\alpha \delta = if \Rightarrow p\iota \delta = if$, $\beta \delta = jg \Rightarrow q\iota \delta = jg$ となり、 θ の一意性から $\iota \delta = \iota \theta'$ 、よって $\delta = \theta'$ となる。

従って、fiber product の U.P. から $V \times_S W = (V \times_S Y) \cap (X \times_S W)$ が成立する。

(2) 下図式において $h: U \to S$ は inclusion である。



 $V \times_S W$ の universal property から θ' が存在する。一方、 $V \times_S W$ の構成から $h\delta|_{V}\alpha = h\sigma|_{V}\beta$ なので、h の単射性より $\delta|_{V}\alpha = \sigma|_{V}\beta$ となり、今度は $V \times_U W$ の universal property から θ が存在する。

すると fiber product の universal property における morphism の一意性から $\theta\theta'=\mathrm{id}_{V\times_U W},\, \theta'\theta=\mathrm{id}_{V\times_S W}$ となるので、 $V\times_U W=V\times_S W$ が得られる。(証明終)

2.6.2

Variety は既約であり、noetherian, reduced, separated は明らかなので、X は (*) を満たす。

(a) \mathbf{P}_k^n の prime divisor は codim 1 の既約閉なので Exercise I.2.8 より irreducible hypersurface であり、 $V=V((f)),\ f\in S=k[x_0,\cdots,x_n],\ f$: irreducible homogeneous polynomial で与えられる。

 $V\cap X$ の既約成分を $\{Y_i\}$ とすると、 Y_i は X の prime divisor である。 Y_i に対し、 $Y_i\cap U\neq\varnothing$ となる \mathbf{P}_k^n の open covering の一つが存在するので、それを U_i とおく。以下、ここでは $U_i=D_+(x_i)$ とする。

V=V((f)) とすると $V\cap U_i=V((f)_{(x_i)})$ である。なぜなら $V((f))=\operatorname{Proj} S/(f)$ より、 $V\cap U_i$ はV における $D_+(x_i)$ 、即ち $D_+^V(x_i)=\operatorname{Spec} (S/(f))_{(x_i)}=\operatorname{Spec} (S_{(x_i)}/(f)_{(x_i)}=V((f)_{(x_i)})$ だからである。ここで $f_i=f(x_0/x_i,\cdots,x_n/x_i)=f/x_i^{\deg f}$ とおくと $V\cap U_i=V((f_i)),\ f_i\in K(U_i)=K(\mathbf{P}_k^n)=k[x_0,\cdots,x_n]_{((0))}$ となる。

このとき、 $\overline{f_i}=f_i|_{X\cap U_i}$ とすると 3 、 $Y_i\cap U_i$ が $X\cap U_i$ の prime divisor ゆえ $v_{Y_i\cap U_i}(\overline{f_i})$ が存在する。

 $^{^3}$ 一般に、Z に対応する prime ideal を I_Z , $S(Z)=S/I_Z$ とおく。 $Z\stackrel{\iota}{\circ} \mathbf{P}^n_k$ から $Z=\{\eta\}^-$ と すると $(\eta$ は I_Z に対応)、 $i^\#_\eta:\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n_k,i(\eta)}=S_{(\eta)} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{Z,\eta}=S(Z)_{(\eta)}=(S/I_Z)_{(\eta)}=K(Z)$ が存在し (Exercise 2.18(c))、その拡張として $\varphi:K(\mathbf{P}^n_k)\twoheadrightarrow K(Z)$ が得られる。 $f\in K(\mathbf{P}^n_k)$ のとき、 $f|_Z$ は $\varphi(f)$ のことである。実際、 $z\in Z$ は S/I_Z の prime ideal なので $z\supseteq \eta$ であり、よって f を Z

ここで、もし U_i の他に $Y_i \cap U_j \neq \varnothing$ とする。 $Y_i = \{\zeta\}^-$ のとき、 $\zeta \in Y_i \cap U_i$ 、 $\zeta \in Y_i \cap U_j$ より $\mathcal{O}_{Y_i \cap U_i, \zeta} = \mathcal{O}_{Y_i \cap U_j, \zeta} = \mathcal{O}_{X,\zeta}$ となるので、これらの max ideal \mathfrak{m} は一致する。よって $f_i = f/x_i^{\deg f} \in \mathfrak{m}^r \Leftrightarrow f/x_j^{\deg f} \in \mathfrak{m}^r$ から $v_{Y_i \cap U_i}(\overline{f_i}) = v_{Y_i \cap U_j}(\overline{f_j})$ が得られる。 $\overline{f_j} \in K(X \cap U_i) = K(X)$ なので、 $v_{Y_i \cap U_j}(\overline{f_j}) = v_{Y_i}(\overline{f_j}) = n_i$ となる。よって

$$\varphi: \operatorname{Div} \mathbf{P}_k^n \to \operatorname{Div} X, \ V \mapsto V.X$$

が定義できる。

(b) $D=(f),\;f\in K(\mathbf{P}^n_k)$ に対し、 $f=\prod_l f_l^{n_l},\;f_l\in k[x_0,\cdots,x_n]$ とする。 $D=\sum_l n_l V_l,\;V_l=V(f_l)$ から $D.X=\sum_l n_l (V_l.X)$ である。

Xの prime divisor を $\{Z_j\}$ とし、 $f_l^i=f_l/x_i^{\deg f_l}$, for $Z_j\cap U_i\neq\varnothing$, $\exists U_i=D_+(x_i)$ とおくと、 $V_l\cap U_i=V(f_l^i)$ である。(a) で示したように、 $Z_j\cap U_i\neq\varnothing$ ならどのiでもよい。ここで選ばれるiはlに依存するので、その f_l^i をあらためて f_l とおく $(\deg f_l=0)$ 。すると

$$V_l.X = \sum_{j} v_{Z_j}(\overline{f_l})Z_j$$

となる。実際、 $V_l\cap X$ の既約成分は X の prime divisor であり ((a) で示した)、それ以外の X の prime divisor Z_j では $v_{Z_j}(\overline{f_l})=0$ となる。なぜなら、もし $v_{Z_j}(\overline{f_l})>0$ とすると、 $Z_j\cap U_i\neq 0$ となる U_i に対して、 $v_{Z_j}(\overline{f_l})=v_{Z_j\cap U_i}(\overline{f_l})$ より、 U_i において Z_j に対応する prime ideal を \mathfrak{p}_j とすると、 $\overline{f_l}\in\mathfrak{p}_j\Rightarrow V_l\cap U_i|_{X\cap U_i}=V(\overline{f_l})\supseteq V(\mathfrak{p}_j)=Z_j\cap U_i$ となり、 Z_j の仮定に反するからである。

$$D.X = \sum_{l} n_{l} \sum_{j} v_{Z_{j}}(\overline{f_{l}}) Z_{j} = \sum_{j} v_{Z_{j}}(\prod_{l} \overline{f_{l}}^{n_{l}}) Z_{j}$$

となるが、 $f'=\prod_l\overline{f_l}^{n_l}$ とすると $\deg f'=0\Rightarrow f'\in K(\mathbf{P}^n_k)$ より D.X=(f') である。

(c) $S/(I_X+I_V)=(S/I_X)/((I_X+I_V)/I_X)=S(X)/(I_V/(I_V\cap I_X))$ なので、 閉集合 Y_j に対応する S の prime ideal を \mathfrak{p}_j とすると、

$$S/(I_X+I_V)_{(\mathfrak{p}_j)}=(S(X))_{(\mathfrak{p}_j)}/(I_V/(I_V\cap I_X))_{(\mathfrak{p}_j)}=S(X)_{(\mathfrak{p}_j)}/(\overline{f}_i)_{(\mathfrak{p}_j)}=\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}_j}/(\overline{f}_i)_{(\mathfrak{p}_j)}$$

が成り立つ。ここで、 $I_V=(f)$ であり、脚注 3 から $I_V/(I_V\cap I_X)=(\overline{f})$ なので、 $\mathfrak{p}_j\in Y_j\cap U_i\neq\varnothing$ とすると、 \mathfrak{p}_j で localize することにより、 $(I_V/(I_V\cap I_X))_{(\mathfrak{p}_j)}=(\overline{f})_{(\mathfrak{p}_j)}=((\overline{f})_{(\mathfrak{p}_j)}=(\overline{f})_{(\mathfrak{p}_j)}$ となることを用いた。

 $i(X,V;Y_j) = \operatorname{length} S/(I_X + I_V)_{(\mathfrak{p}_j)} = \operatorname{length} \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}_j}/(\overline{f}_i)_{(\mathfrak{p}_j)}$ であるが、 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}_j}$ は次元1の regular なので、その ideal は max ideal $\mathfrak{m}_j = \mathfrak{p}_{j(\mathfrak{p}_j)}$ の冪乗となる ([1],

に制限するということは $z\supseteq\eta$ なる z のみを扱うということなので、 $\varphi(f)$ に等しい。なお、 $i(\eta)$ は S/I_X の prime ideal である η に対する S の prime ideal であり、それは η なので $i(\eta)=\eta$ となる。

Proposition 9.2, (v))。従って、その長さは $\mathfrak{m}_j^0 \supsetneq \mathfrak{m}_j^1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{m}_j^r = (\overline{f}_i)$ となる r、すなわち $v_{Y_i}(\overline{f_i})$ に等しい 4 。

 $D=\sum_l n_l V_l,\ V_l=V(f_l),\ f_l\in k[x_0,\cdots,x_n]$ とする。すでに示したことから $V_l.X=\sum_j i(X,V_l;Y_j)Y_j$ なので、Theorem I.7.7 より

$$\deg V_l.X = \sum_j i(X, V_l; Y_j) \deg Y_j = \deg X \cdot \deg V_l$$

となる。従って

$$\deg D.X = \sum_{l} n_l \deg V_l.X = \sum_{l} n_l \deg V_l \cdot \deg X = \deg D \cdot \deg X \qquad (5)$$

が成り立つ。

(d)
$$D=(g), g \in K(X)$$
 とする。Closed immersion $i:X\hookrightarrow \mathbf{P}^n_k$ に対する
$$i_x^\#:\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n_x,i(x)}=S_{(\mathfrak{p}_x)}\twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x}=(S/I_X)_{(\mathfrak{p}_x)}=S(X)_{(\mathfrak{p}_x)}$$

は全射であり、 $\varphi:K(\mathbf{P}^n_k) \twoheadrightarrow K(X)$ も全射となる。よって $g=g_1/g_0 \in K(X),\ g_0,g_1 \in S(X)$ に対して、 $\varphi(f)=g$ となる $f=f_1/f_0 \in K(\mathbf{P}^n_k),\ f_0,f_1 \in S$ が存在する。

 φ は環準同型なので、f と g の既約多項式分解が対応する。すなわち $f=\prod_l f_l^{n_l}$ とすると g の既約多項式分解は $g=\prod_l g_l^{n_l},\ g_l=\varphi(f_l)$ となる。実際、 $g_l=g_1g_2$ とすると、全射性から f_l も可約となってしまう。

(a) で示したように、 f_l の X への像が $\overline{f_l}$ なので、 $\overline{f_l}=g_l$ である。よって (b)から

$$(f).X = \sum_{l} n_{l} \sum_{j} v_{Z_{j}}(\overline{f_{l}}) Z_{j} = \sum_{j} v_{Z_{j}}(\prod_{l} g_{l}^{n_{l}}) Z_{j} = \sum_{j} v_{Z_{j}}(g) Z_{j} = (g) = D$$

が得られる。すると (c) と Proposition 6.4 から

$$\deg D = \deg((f).X) = \deg(f) \cdot \deg X = 0$$

となる。

 $\psi: \mathrm{Cl}\,\mathbf{P}^n_k o \mathrm{Cl}\,X,\ D\mapsto D.X$ とすると、式 (5) は $\deg\circ\psi=(\deg X)\deg$ なのでテキストの可換図式そのものである。

Proposition 6.4(c) から $\deg:\operatorname{Cl}\mathbf{P}^n_k\to\mathbb{Z}$ は単射であり、Proposition I.7.6(a) より $\deg X\neq 0$ 、よって $(\deg X)\deg:\operatorname{Cl}\mathbf{P}^n_k\to\mathbb{Z}$ も単射、すると $\deg\circ\psi:\operatorname{Cl}\mathbf{P}^n_k\to\mathbb{Z}$ が単射となり、 $\psi:\operatorname{Cl}\mathbf{P}^n_k\to\operatorname{Cl}X$ は単射である。

2.6.3

(a)
$$P = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbf{P}^{n+1}$$
 とすると、 π は
 $\pi : \mathbf{P}^{n+1} - P \to \mathbf{P}^n, (a_0, \dots, a_n, a_{n+1}) \mapsto (a_0, \dots, a_n)$

 $^{^4\}mathfrak{m}_j=\mathfrak{p}_{j_{\left(\mathfrak{p}_i\right)}}$ であるが、実質 $\mathfrak{m}_j=\mathfrak{p}_j$ なので $\mathfrak{m}_j^r=(\overline{f}_i)$ としてよい。

で与えられる。 \mathbf{P}^n のカバー $V_i = D_+(x_i) \approx \mathbf{A}^n$ に対し、 $U_i = V \cap V_i$ とおくと

$$\pi^{-1}(U_i) = \{(a_0, \cdots, a_n, a_{n+1}) | (a_0, \cdots, a_n) \in U_i, \forall a_{n+1} \in k \}$$

$$\approx \mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^1 = \mathbf{A}^n \times_k \mathbf{A}^1 \approx U_i \times_k \mathbf{A}^1$$

となり、

$$\pi^{-1}(V) = V \times_k \mathbf{A}^1 \tag{6}$$

を得る。

X は k 上ゆえ、 $X \supseteq \operatorname{Spec} A$ とすると $A \otimes_k k[t] = A[t] = A \otimes \mathbb{Z}[t]$ なので、 $X \times \mathbf{A}^1 = X \times_k \mathbf{A_k}^1$ であり、Proposition 6.6 が使えて

$$\operatorname{Cl} V \stackrel{\sim}{=} \operatorname{Cl} (V \times \mathbf{A}^1) = \operatorname{Cl} (\pi^{-1}(V)) = \operatorname{Cl} (\overline{X} - P)$$
 (7)

が成立する。ここで、 $\dim \overline{X} \geq \dim(U_i \times \mathbf{A}^1) = n+1 \geq 2$ より $\operatorname{codim}(P, \overline{X}) \geq 2$ なので、Proposition 6.5(b) から $\operatorname{Cl}(\overline{X} - P) = \operatorname{Cl} \overline{X}$ ゆえ

$$\operatorname{Cl} V \cong \operatorname{Cl} \overline{X}$$

となる。

なお、V は (*) を満たしているので、式 (7) から $\overline{X}-P$ も (*) を満たす。このとき \overline{X} は regular in codim 1 である。なぜなら、 $x \neq P$ なら $O_{\overline{X},x} = O_{\overline{X}-P,x}$ より regular in codim 1 であり、x = P のときは、 $O_{\overline{X},x} = O_{\mathbf{P}^{n+1},P} = S_{((x_{n+1}))} \approx k[x_0,\cdots,x_n]$ は整閉ゆえ、 \overline{X} も regular in codim 1 となる。その他の条件は明らかなので、 \overline{X} は (*) を満たす。

すると、 $X=\mathbf{A}^{n+1}\cap\overline{X}$ から X は integral であり (noetherian, separated は明らか)、 $\mathcal{O}_{X,x}=\mathcal{O}_{\overline{X},x}$ から regular in codim 1 なので、X も (*) を満たす。X-P も同様である。

(b) \mathbf{P}^n において $V=Z_n(\mathfrak{p})$ とする $(Z_n(\cdot)$ は \mathbf{P}^n における $Z(\cdot)$ のことで、以下では \mathbf{P}^{n+1} における場合は $Z(\cdot)$ と記す)。ここで \mathfrak{p} は $k[x_0,\cdots,x_n]$ の斉次 prime ideal である。このとき、 $V\subseteq \overline{X}$ となる V は $V'=Z((\mathfrak{p}^e,x_{n+1})$ のことであり、 \mathbf{P}^{n+1} では $\{(a_0,\cdots,a_n,0)|(a_0,\cdots,a_n)\in V\}$ のことである。 $H_{n+1}=Z(\underline{x_{n+1}})$ とすると、 $\overline{X}=Z(\mathfrak{p})$ なので $H_{n+1}\cap \overline{X}=Z((\mathfrak{p}^e,x_{n+1})=V'$

 $H_{n+1} = Z(x_{n+1})$ とすると、 $X = Z(\mathfrak{p})$ なので $H_{n+1} \cap X = Z((\mathfrak{p}^e, x_{n+1}) = V'$ であり、 $H_{n+1}.\overline{X} = V'$ となる。なぜなら hyperplane $H_{n+1} = (x_{n+1})$ に対しては $v_{V'}(x_{n+1}) = 1$ にしかなり得ないからである。

 $H=Z_n(g),\;g$:斉次 1 次式 のとき $H'.\overline{X}=\pi^*(V.H),\;H':=\pi^{-1}(H)=Z(g)$ が成り立つ。

(::) $V\cap H=\bigcup_i Y_i$ を既約成分分解とすると、 Y_i は prime divisor である (Exercise $6.2(\mathbf{a}))_\circ$

$$V.H = \sum_{i} n_i Y_i, \ n_i = v_{Y_i}(\overline{g}_i), \ g_i = g/x_i^{\deg g}, \ \overline{g}_i = g_i|_{V \cap V_i}$$

$$\pi^*(V.H) = \sum_i n_i \pi^{-1}(Y_i)$$

ここで g_i は V_i で local に H を表す equation である。 一方 $H' := \pi^{-1}(H) \not\ni P$ ゆえ

$$\overline{X} \cap H' = (\overline{X} - P) \cap H' = \pi^{-1}(V) \cap \pi^{-1}(H) = \pi^{-1}(V \cap H)$$

$$=\pi^{-1}(\bigcup_{i} Y_i) = \bigcup_{i} Z_i, \ Z_i = \pi^{-1}(Y_i)$$

よって $\overline{X}\cap H'=\bigcup_i Z_i$ となる。 $Z_i=\pi^{-1}(Y_i)$ は \overline{X} の prime divisor であり、H'=Z(g) から

$$\overline{X}.H' = \sum_{i} l_i Z_i, \ l_i = v_{Z_i}(\overline{g}_i)$$

ここで g_i は local に H' を表すものにもなっている。 $\pi: Z_i \rightarrow Y_i$ は全射だから、 $Z_i = \{\eta\}^-$ とすると、

$$Y_i = \pi(Z_i) = \pi(\{\eta\}^-) \subseteq \{\pi(\eta)\}^-$$

より $\pi(\eta)$ は生成元であり、 $\mathcal{O}_{V,\pi(\eta)}\hookrightarrow\mathcal{O}_{\overline{X},\eta}$ は単射、local homomorphism 性からそれらの max ideal は対応する。従って、 $n_i=v_{Y_i}(\overline{g}_i)=v_{Z_i}(\overline{g}_i)=l_i$ が得られる。

以上により
$$H'.\overline{X} = \pi^*(V.H)$$
 が成り立つ。((::) 終)

 $H'-H_{n+1}=(g/x_{n+1})$ は principal なので $\overline{X}.(H'-H_{n+1})=\overline{X}.H'-\overline{X}.H_{n+1}=\pi^*(V.H)-V'$ も principal であり (Exercise II.6.2(b))、 $\operatorname{Cl}\overline{X}$ において

$$\pi^*(V.H) = V'$$

が成り立つ。

Proposition 6.5(c) より exact 系列

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \operatorname{Cl} \overline{X} \to \operatorname{Cl}(\overline{X} - V) \to 0, \ 1 \xrightarrow{\iota} V'$$

が得られる。ここで ι は単射である。なぜなら、もし nV が principal とするとその deg は 0 となるので (Corollary 6.10)、deg nV=n deg V=0 となるが、Proposition I.7.6(a) より deg $V\neq 0$ なので n=0 だからである。

$$\overline{X} = \pi^{-1}(V) \cup P = \{(a_0, \dots, a_n, a_{n+1}) | (a_0, \dots, a_n) \in V, a_{n+1} \in k\} \cup P$$

$$\overline{X} - V' = \{(a_0, \dots, a_n, a_{n+1}) | (a_0, \dots, a_n) \in V, \ a_{n+1} \neq 0 \in k\} \cup P$$

 $\{(a_0,\cdots,a_n)\}$ は \mathbf{A}^{n+1} を \mathbf{P}^{n+1} の $D_+(x_{n+1})$ とみなしたときの (n+1 成分は非零)、0 を含めた $Z^A(\mathfrak{p})=C(V)=X$ に等しい $(Z^A(\cdot)$ は \mathbf{A}^{n+1} での $Z(\cdot)$ のこと)。以上から上記 exact 系列は

$$0 \to \mathbb{Z} \stackrel{\iota}{\hookrightarrow} Cl \overline{X} \to Cl X \to 0, 1 \stackrel{\iota}{\mapsto} V'$$

となる。ここで $\operatorname{Cl} \overline{X} \approx \operatorname{Cl} (\overline{X} - P)$ (Proposition 6.5(b)) と $\pi^*: \operatorname{Cl} V \overset{\sim}{\to} \operatorname{Cl} (\overline{X} - P)$ ((a) で示した) から $\operatorname{Cl} V \approx \operatorname{Cl} \overline{X}$ が得られるが、すでに述べたように $\pi^*(V.H)$ と V' は linearly equivalent なので、 $\operatorname{Cl} \overline{X}$ における V' は $\operatorname{Cl} V$ における V.H に相当する。なお、Proposition 6.5(b) の証明にあるように $\operatorname{Cl} \overline{X}$ と $\operatorname{Cl} (\overline{X} - P)$ は同じなので、 $\pi^*(V.H)$ は $\operatorname{Cl} \overline{X}$ の元と考えてよい。以上により exact 系列

$$0 \to \mathbb{Z} \stackrel{\iota}{\hookrightarrow} \operatorname{Cl} V \stackrel{\delta}{\to} \operatorname{Cl} X \to 0, \ 1 \stackrel{\iota}{\mapsto} V.H \tag{8}$$

が得られる。

この式を書き直すと

$$0 \to \mathbb{Z} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \operatorname{Cl} V \overset{\pi^*}{\approx} \operatorname{Cl} (\overline{X} - P) \to \operatorname{Cl} X \to 0, \ 1 \overset{\iota}{\mapsto} V.H$$

となるが、 $\mathrm{Cl}(\overline{X}-P)=\mathrm{Cl}\,\overline{X}$ であり、また $\mathrm{Cl}(\overline{X}-V)=\mathrm{Cl}(\overline{X}-V-P)=\mathrm{Cl}(X-P)$ より

$$\operatorname{Cl}(\overline{X} - P) = \operatorname{Cl}(\overline{X} \xrightarrow{\beta} \operatorname{Cl}(\overline{X} - V) = \operatorname{Cl}(\overline{X} - V - P) = \operatorname{Cl}(X - P) \stackrel{\gamma}{\approx} \operatorname{Cl}(X - P)$$

を得る。ここで

$$\beta: \operatorname{Cl}(\overline{X} - P) \to \operatorname{Cl}(X - P) \Leftarrow \operatorname{restriction} \text{ to } X - P$$

$$\gamma: \operatorname{Cl}(X-P) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Cl} X \Leftarrow \operatorname{inclusion in} X$$

とみれば、 $\delta = \gamma \beta \pi^*$ となる。

(c) S(V): ufd とする。

このとき S(V) は整閉ゆえ ([1], p.63 上)、projectively normal である。また、X を \mathbf{A}^{n+1} における affine variety とみなすと、そこでも S(V) は ufd なので、Proposition 6.2 より $\operatorname{Cl} X=0$ が得られる。よって式 (8) は

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \operatorname{Cl} V \to 0, \ 1 \xrightarrow{\iota} V.H$$

となり、 ι は isomorphism である。さらに im $\iota=\mathrm{Cl}\,V$ なので、 $\mathrm{Cl}\,V$ は $\mathbb{Z}\, \pm V.H$ で生成される。

逆を証明する。

$$0 \to \mathbb{Z} \stackrel{\alpha}{\hookrightarrow} \operatorname{Cl} V \to \operatorname{Cl} X \to 0$$

において α が isomorphism なので $\operatorname{Cl} X = 0$ である。また、V が projectively normal なので S(V) は整閉、よって $S(V)_x = \mathcal{O}_x, \ x \in V$ も整閉となり $X = \operatorname{Spec} S(V)$ は normal である。従って Proposition 6.2 から、S(V) は ufd である。

(d) \mathbf{P}^n における V の homogeneous coordinate ring を S(V) = S/I としたとき、S(V) は \mathbf{A}^{n+1} における X の coordinate ring と見られる。

$$\alpha: S(V) \to S(V)_{\mathfrak{m}}, \ \mathfrak{m} = (x_0, \cdots, x_n) \sim P = (0, \cdots, 0)$$

高さ 1 の prime ideal \mathfrak{p} は α により

$$\mathfrak{p} o egin{cases} \mathfrak{p} \; ; & \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m} \ (1); & \mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{m} \end{cases}$$

と写り、 $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ の場合、高さは1のままである。

$$\beta: \operatorname{Spec} \mathcal{O}_P \to X, \ \alpha = \beta^{\#}(X)$$

$$\beta^* : \operatorname{Cl} X \to \operatorname{Cl}(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_P)$$

$$Y \mapsto \beta^{-1}(Y)$$

が定義できることを示す。まず、

$$\beta^* : \operatorname{Div} X \to \operatorname{Div}(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_P)$$

が成り立つのは (便宜上同じ記号 β^* を用いる)、prime divisor $Y=Z(\mathfrak{p})\ni 0$ なら $\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{m}$ なので $(Y\ni 0\Leftrightarrow \mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{m})$ 、

$$\beta^{-1}(Y) \stackrel{Prop.2.3}{=} Z(\alpha(\mathfrak{p})) = Z(\mathfrak{p}) = Y$$

は closed, integral, codim 1 であり、また $Y \not \ni 0$ なら

$$\beta^{-1}(Y) = Z(\alpha(\mathfrak{p})) = Z(S(V)_{\mathfrak{m}}) = \emptyset$$

だからである。

Principal divisor が principal divisor に写るのは、次の通り。

$$\beta^*((f)) = \sum_i v_{Y_i}(f)\beta^{-1}(Y_i) = \sum_{Y_i \ni 0} v_{Y_i}(f)Y_i, \ f \in K(X) = K(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_P)$$

において、 $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_P$ の prime divisor Y は $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ に対応しており、それは X に おける prime divisor $Y_i \ni 0$ と一対一対応している。よって、 $\sum_{Y_i \ni 0} v_{Y_i}(f)Y_i = \sum_Y v_Y(f)Y = (f) \in \operatorname{Div}(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_P)$ が成り立つ。またこの一対一対応から、 $\beta^*|_{\mathcal{D}}$ は全単射である。ここで $\mathcal{D} \subseteq \operatorname{Div} X$ は $\{Y|Y \ni 0\}$ から生成される部分集合である。

従って、 $Y \not\ni 0$ となる X の prime divisor は principal divisor であることを示せば証明は終わる。

 \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m} とすると、非零定数項を持つ既約多項式 $f \in \mathfrak{p}$ が存在する。S(V) = S/I とすると I: prime ideal, $I \subset \mathfrak{m}$ に対し $f \not\in I$ ゆえ、 $fg \in I \Rightarrow g \in I$ から、この f は非零因子であり、非冪零元でもある。よって、クルルの単項イデアル定理より height((f)) = 1 となる。 $(f) \subseteq \mathfrak{p}$, height(\mathfrak{p}) = 1 から $\mathfrak{p} = (f)$ 、よって divisor として Y = (f)、principal divisor である 5 。

 $^{{}^5}v_Y(f)=1$ は明らか。 $v_Z(f)\neq 0$ のとき $v_Z(f)>0$ と仮定してよく、 $f\in\eta,\ Z=\{\eta\}^-\Rightarrow (f)\subseteq\eta\Rightarrow Z((f))\supseteq Z$ から、両者の dim が等しいので、Z=Y となる。

2.6.4

 $B=k[x_1,\cdots,x_n],\ C=k(x_1,\cdots,x_n)$ とおくと、 $A=B[z]/I,\ K=\operatorname{Frac}(A)$ = $C[z]/I,\ I=(z^2-f)$ となる。 $\stackrel{\$}{=}$ は、K において $\frac{1}{g_0+g_1z}=\frac{g_0-g_1z}{g_0^2-g_1^2f}$ が成り立つことによる。

Kの自己同型 $\sigma: z \mapsto -z$ の固定体は C であり、また K は C 上有限拡大体なので、C の正規拡大体 (Galois 拡大体) となる。

Kの元を $\alpha = g + hz$, $g,h \in C$ とすると、 $(\alpha - g)^2 = h^2z^2 = h^2f$ から α は

$$F(X) = X^2 - 2gX + g^2 - h^2 f$$

の解である。 α の最小多項式が 1 次式ではあり得ないので、F(X) は最小多項式となる。

 $\overline{\alpha}=g-hz$ と定義すると、これは F(X) の共役解となり、解と係数の関係から $\alpha+\overline{\alpha}=2g,\ \alpha\overline{\alpha}=g^2-h^2f$ を得る。

このとき、次式が成立する。

 α : integral over $B \stackrel{\%}{\Leftrightarrow} g, h \in B \Leftrightarrow \alpha \in A$

 $(\cdot \cdot)$ (%) α が B 上整なので、その共役 $\overline{\alpha}$ も B 上整である。よって $\alpha+\overline{\alpha}=2g,\ \alpha\overline{\alpha}=g^2-h^2f$ も B 上整となる ([1], Corollary 5.3)。 $g,h\in C\Rightarrow 2g,g^2-h^2f\in C$ で、B は整閉 (C において整閉) ゆえ、 $g,g^2-h^2f\in B\Rightarrow h^2f\in B$ が得られる。

 $h=\beta/\gamma,\ \gcd(\beta,\gamma)=1,\ \beta,\gamma\in B$ において $\gamma\not\in k$ とすると、 $\beta^2f/\gamma^2\in B$ から f は γ^2 で割り切れてしまい、f の仮定に反する。よって $\gamma\in k\Rightarrow h\in B$ である。(拳) は明らか。

従って $A = \tilde{B}(K)$ における B の整閉包) である。(: 終)

 \tilde{B} は整閉なので ([1], Corollary 5.5)、A も整閉となる。

2.6.5

(a) $r \ge 2$ のとき、Exercise I.5.12(b) から $f = -x_1^2 - \dots - x_r^2$ は既約多項式、よって square free である。Exercise 6.4 より

$$A = k[x_0, x_1, \dots, x_r]/(x_0^2 - f) = k[x_0, x_1, \dots, x_r]/(x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_r^2)$$

は整閉なので、local 性から $\mathcal{O}_x = A_x$ も整閉である。従って、 $X = \operatorname{Spec} A$ は normal となり (*) を満たす。また X に対応する $V \subseteq \mathbf{P}^n$ も (*) を満たす $(A_x$ が 整閉だから)。

(b) k は代数的閉体とする。 $x_0^2+x_1^2+\cdots+x_r^2=0$ において、 $u=ix_0+x_1,\ v=ix_0-x_1$ とおけば $uv=-x_0^2-x_1^2$ となるので、そこで改めて u,v を x_0,x_1 とおけば

$$x_0 x_1 = x_2^2 + \dots + x_r^2 \tag{9}$$

となる。

- (1) r=2: $X'=\operatorname{Spec} k[x_0,x_1,x_2]/I,\ I=(x_0x_1-x_2^2)$ とすると、Example 6.5.2 から $\operatorname{Cl} X'\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。ここで、 $X'\times_k \mathbf{A}^{n-2}=\operatorname{Spec} (k[x_0,x_1,x_2]/I\otimes k[x_3,\cdots,x_n])=\operatorname{Spec} k[x_0,x_1,\cdots,x_n]/I=X$ から、Proposition 6.6 より $\operatorname{Cl} X=\operatorname{Cl} X'=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を得る。
- (2) r=3: $x_0x_1=x_2^2+x_3^2$ において x_2,x_3 に対しても式 (9) と同様な変換を施すと、 $x_0x_1=x_2x_3$ は \mathbf{P}^3 の quadric surface V を与える。

その cone を X' とすると (Exercise II.6.3)、それは \mathbf{A}^4 における quadric surface となり、対応する多項式は同じ $x_0x_1=x_2x_3$ である。

Example 6.6.1 から $ClV = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ であり、Exercise II.6.3(b) の式 (8) は

$$0 \to \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \operatorname{Cl} X' \to 0$$

となる。従って準同型定理から $\operatorname{Cl} X' = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ を得る。

前記 (1) で述べたように $\operatorname{Cl} X = \operatorname{Cl} X'$ なので、 $\operatorname{Cl} X = \mathbb{Z}$ である。

(3) $r \geq 4$: X における $V(x_0)$ を $Z = V^X(x_0) = V(x_0) \cap X = V(x_0, x_0x_1 + x_2^2 + \cdots + x_r^2)$ とすると Z は integral である。なぜなら、

$$k[x_0, x_1, \cdots, x_n]/(x_0, x_0x_1 + x_2^2 + \cdots + x_r^2) = k[x_1, \cdots, x_n]/(x_2^2 + \cdots + x_r^2)$$

において、 $x_2^2 + \cdots + x_r^2$ が既約多項式だからである (Exercise I.5.12(b))。

よって Z は prime divisor である。また Z は principal divisor となるが、それは脚注 (5) による。

Proposition 6.5(c) から

$$\mathbb{Z} \stackrel{\alpha}{\to} \operatorname{Cl} X \to \operatorname{Cl} (X - Z) \to 0, \ \alpha : 1 \mapsto 1 \cdot Z$$

が成立するが、Z が principal divisor なので、 $\alpha=0$ である。ここで、 $\operatorname{Cl}(X-Z)=0$ が成り立つ。

$$(:) X - Z = V^X(x_0)^c = D(x_0) = \operatorname{Spec} A_{x_0} \ \sharp \ \emptyset$$

$$A_{x_0} = k[x_0, x_1, \cdots, x_n]_{x_0} / (x_0 x_1 + x_2^2 + \cdots + x_r^2)_{x_0}$$

$$= k[x_0, x_0^{-1}, x_1, \cdots, x_n]/(x_1 + (x_2^2 + \cdots + x_r^2)/x_0)$$

$$\approx k[x_0, x_0^{-1}, x_2, \cdots, x_n]$$

となるが、 $k[x_0,x_0^{-1},x_2,\cdots,x_n]$ は ufd なので、Proposition 6.2 より $\operatorname{Cl}(X-Z)=0$ である。 (: 終)

以上により α が全射となるので、ClX = 0を得る。

(c)

(1) r=2: $Q=V((g)),\ g=x_0x_1-x_2^2$ とおくと、(b)(1) の $\mathrm{Cl}\,X=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ から、式 (8) は

$$0 \to \mathbb{Z} \stackrel{\iota}{\hookrightarrow} \operatorname{Cl} Q \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0, \ 1 \stackrel{\iota}{\mapsto} Q.H \tag{10}$$

となる。

ネーター空間の既約成分は有限個なので ([1], Exercise 6.7)、 $\operatorname{Cl} Q$ は有限型であり、よって有限型加法群の構造定理から $\operatorname{Cl} Q = \mathbb{Z}^s \oplus T$, T: torsion、と書けるが ([4], 第 4 章定理 15)、ここでは s=1 である。

実際、次の完全系列

$$0 \to \mathbb{Z} \stackrel{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{Z}^s \oplus T \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

の右側から ② を tensor すると、tensor は右完全なので

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^s \oplus (T \otimes \mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} \to 0$$

を得るが、 $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Q}$ の任意の元は $a\otimes b=la\otimes b/l$ となるので、 $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Q}=0$ 、よって $T\otimes\mathbb{Q}=0$ 、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Q}=0$ から 6 、

$$\mathbb{O} \to \mathbb{O}^s \to 0$$

が成立する。一方、体からの morphism は常に injective なので、 $\mathbb{Q} \approx \mathbb{Q}^s$ 、よって s=1 となる ([1], Exercise 2.11)。

$$0 \to \mathbb{Z} \stackrel{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \oplus T \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0, \ 1 \stackrel{\iota}{\mapsto} Q.H \tag{11}$$

 $H=V((x_2))$ とすると、 $Q\cap H=Y_0\cup Y_1,\ Y_i=V((x_i,x_2)), i=0,1$ であり、 $v_{Y_i}(x_2')=1$ より $Q.H=Y_0+Y_1$ となる $(x_2'$ は x_2 を $Y_i\cap U\neq\varnothing$ となる U で制限したもの)。

 $Y_1=V((x_1,x_2))$ より $v_{Y_1}(x_1/x_0)=1$ であり、同様に $v_{Y_0}(x_1/x_0)=-1$ となるから $(x_1/x_0)=\sum_i v_{Y_i}(x_1/x_0)Y_i=Y_1-Y_0\Rightarrow Y_1\sim Y_0$ であり、 $Q.H=Y_0+Y_1=Y_0+Y_0=2Y_0=2Y_1$ を得る。

式 (11) の右から $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, (p: 素数) を tensor すると、 $p \neq 2$ のとき、[1], Exercise 2.1 から

$$\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \oplus (T \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \stackrel{\iota'}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus (T \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to 0$$

より ι' は全射となる。一方、 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は体なので ι' は単射でもある。よって、 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus (T \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ から $T \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 0$ を得る。

T は $\mathbb{Z}/q^e\mathbb{Z}$, e>0 の形の集まりなので ([4], 第 4 章定理 15)、T に $\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$ があれば、[1], Exercise 2.2 より

$$(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}) \otimes (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/(p^e(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/0 = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$
(12)

となり、 $T \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は非零になってしまう。

従って、T が非零とすれば、 $\mathbb{Z}/2^e\mathbb{Z}$ のみが存在しており、このとき式 (11) に右から $\otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ をとると、式 (12) と同様 $(\mathbb{Z}/2^e\mathbb{Z})\otimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ なので、次の exact 系列を得る。

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\iota"} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

式 (11) において、 $1\mapsto Q.H=2Y_0$ であったが、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と tensor を取ると 0 となるので、 $\mathrm{im}\iota^n=0$ である。すると、 $\ker\sigma=0$ から σ は単射となり、全射でもあるので、同型になる:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \stackrel{\sigma}{\approx} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

 $^{^6 {\}rm torsion} \; T$ の元は有限位数を持つので $(la=0,\; \exists l \neq 0),\; T \otimes \mathbb{Q} = 0$ である。

これは矛盾なので、T=0であり、 $ClQ=\mathbb{Z}$ を得る。

下図式に示す通り、左下の \mathbb{Z} から右下 \mathbb{Z} への写像は下の写像に等しいので、 $1 \approx H \mapsto Q.H \approx 2$ となり、単位元 (\mathbb{Z} の単位元 1 に対応する ClQ の単位元) の 2 倍になっている。 $Q.H = 2Y_0$ だったので、ClQ の単位元は $Y_0 (= Y_1)$ である。

$$\begin{array}{c} \operatorname{Cl} \mathbf{P^n} \xrightarrow[H \to Q.H]{} \to \operatorname{Cl} Q \\ \approx \bigg| \hspace{0.5cm} \bigg| \approx \\ \mathbb{Z} \xrightarrow[1 \mapsto \deg Q = 2]{} \to \mathbb{Z} \end{array}$$

(2) r=3: n に関する数学的帰納法で証明する。

n=r の場合、Example 6.6.1 より $\operatorname{Cl} Q=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ である。

 \mathbf{P}^n に対して $\mathrm{Cl}\,Q'=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ とする。 \mathbf{P}^{n+1} における Q=V((f)) は Exercise 6.3 における \overline{X} に相当する: $Q=\overline{X}$

$$\overline{X} - P = \pi^{-1}(Q') \stackrel{\text{Eq.}(6)}{=} Q' \times \mathbf{A}^1$$

より

$$\operatorname{Cl} Q = \operatorname{Cl} \overline{X} \stackrel{\operatorname{Prop.6.5(b)}}{=} \operatorname{Cl} (\overline{X} - P) = \operatorname{Cl} (Q' \times \mathbf{A}^1) = \operatorname{Cl} Q' = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

を得る。

 $(3) r \ge 4$: 式 (8) において、(b)(3) の Cl X = 0 から

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \operatorname{Cl} Q \to 0, \ 1 \xrightarrow{\iota} Q.H$$

より $\mathbb{Z} \approx \operatorname{Cl} Q$ なので、 \mathbb{Z} の単位元 1 の像は $\operatorname{Cl} Q$ の単位元となり、 $\operatorname{Cl} Q$ は Q.H で生成される。

(d)

Q = V((f)) における codim 1 の既約 subvariety を $Y = V(\mathfrak{p})$ とする。

 $S(Q)=k[x_0,\cdots,x_n]/(f)$ は projectively normal (S(Q) が整閉) で、今示した (3) から $\operatorname{Cl} Q \approx \mathbb{Z}$ は Q.H で生成されるので、Exercise II.6.3(c) より、S(Q) は ufd である。

すると、Proposition I.1.12A から高さ 1 の prime ideal は principal となる (S(Q) にて)。従って、 $k[x_0,\cdots,x_n]$ においては $\mathfrak{p}=(g,f),\ g$: irreducible とかけ、complete intersection である。

ここで V=V((g)) とおくと $Y=V((g,f))=V((g))\cap V((f))=V\cap Q$ となり、Y は Q の prime divisor で

$$V.Q = v_Y(g)Y$$

を満たす。

このとき、 $i(Q,V;Y)=v_Y(g)=1$ である。なぜなら、 $Y=\{\mathfrak{p}\}^-$ に対して $\mathcal{O}_{Q,\mathfrak{p}}=S(Q)_{\mathfrak{p}}$ の極大 ideal は $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}/(f)$ であり、 $r=v_Y(g)$ は $(g)=\mathfrak{m}^r=((g,f)/(f))^r$ を満たす r ゆえ、r=1 だからである。なお、complete intersection なら同様にして multiplicity は 1 となる。

(a) Example 6.10.2 より

$$Cl^{\circ}X \approx X^{V} := \{\text{group variety of } X\}$$

である。これには二つの意味があり、(i) $\deg D = 0$ の divisor には X^V の元 (closed point) が対応する、(ii) principal divisor は X^V の零点 $0 := P_0$ が対応する。

従って、Cl°X に属する Cl°X \ni $P+Q+R-3P_0 \mapsto P+Q+R-3\cdot 0 = P+Q+R$ であり、P,Q,R: collinear \Leftrightarrow $(l/z)=P+Q+R-3P_0 \Leftrightarrow P+Q+R-3\cdot 0 = 0 \Leftrightarrow P+Q+R=0$ が成り立つ。

- (b) $P \neq P_0$ とする。P における tangent line L = V((l)) が P_0 を通るとき、その principal divisor は $(l/z) = P + P + P_0 3P_0$ である。(a) より、 $(l/z) = P + P + P_0 3P_0 \Leftrightarrow P + P = 2 \cdot 0 \Leftrightarrow 2P = 0 \Leftrightarrow \mathrm{order}(P) = 2$
- (c) 任意の line L=V((l)) に対し、 $\deg L.Y=\deg L\deg Y=3$ より、 $\sum_P i(L,Y;P)=3$ である。このとき、

$$3P = 0 \Leftrightarrow 3P - 3P_0 = (l/z) \Leftrightarrow i(L, X; P) = v_P(l/z) = 3$$

より、order $(P) = 3 \Leftrightarrow P$: inflection point である。

(d) 座標成分が \mathbf{Q} に属す X^V の点の集合を $E(\mathbf{Q})$ とする。

 $P_0=(0,1,0)\in E(\mathbf{Q})$ であり、 $P,Q\in E(\mathbf{Q})$ に対し、それらを通る直線 L と X の交点を P,Q,R とすると、L を与える式 ax+by+cz=0 の係数は \mathbf{Q} に属すので、ax+by+cz=0, $y^2z-x^3+xz^2=0$ の解としての R の座標成分は、解 と係数の関係から \mathbf{Q} に属し、よって $R\in E(\mathbf{Q})$ となる。R の具体的な求め方は省略するが、例えば [3], [3]

Mordell-Weil Theorem ([3], Theorem 8.17) より $E(\mathbf{Q})$ は有限生成加法群であるが、特に本間のケースでは次の通りである。

$$E(\mathbf{Q}) = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,1), (-1,0,1)\}$$

(::) 次に示す性質 4 から、 $y^2z=x^3-xz^2\Rightarrow 4x^4+y^4=(2xz+y^2)^2$ を満たす有理数 x,y,z において、x,y のいずれかは 0 である。よって、 $E(\mathbf{Q})$ は上記 4 点だけになる。

 $P_1=(0,0,1), P_2=(1,0,1), P_3=(-1,0,1)$ とすると x=0, x=z, x=-z が それぞれ P_1, P_2, P_3 を通り、かつ、例えば line x=0 は P_1, P_0 を通り $v_{P_1}(x)=2$ なので r_1 、(b) より r_2 の位数は r_3 である (楕円曲線での計算でも導出できる)。 $r_2=(1,0,1), P_3=(-1,0,1)$ についても同様である。すると、 $r_1+r_2=r_3$ となる。

従って
$$E(\mathbf{Q}) = \{P_0, P_1\} \times \{P_0, P_2\} \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
 である。(:: 終)

以下2つの性質はhttps://math.stackexchange.com/questions/1786448/rational-solutions-of-y2-x3-x を参考にした。

性質 3. 非零整数 x, y, z が

$$x^2 + y^2 = z^2$$
, $gcd(x, y) = 1$

を満たすとする。このとき、x,yの一方は奇数で他方は偶数であり、xを偶数とすると、x,y,z は整数 a,b,c より

 $x=2ab,\ y=b^2-a^2,\ z=a^2+b^2,\ 0< a< b,\ \gcd(a,b)=1,\ y,a+b$: odd とかける。

(証明) 偶数 x を x = 2k とおく。y, z はともに奇数であり、

$$4k^2 = z^2 - y^2 \Rightarrow k^2 = \frac{z+y}{2} \frac{z-y}{2}$$

ここで、y,z は coprime なので $\frac{z+y}{2},\frac{z-y}{2}$ も coprime、よって $\frac{z+y}{2},\frac{z-y}{2}$ とも平方数となり $\frac{z-y}{2}=a^2,\frac{z+y}{2}=b^2$ とおける。よって

 $x = 2ab, \ y = b^2 - a^2, \ z = a^2 + b^2, \ 0 < a < b, \ \gcd(a,b) = 1, \ a+b$: odd number となる。(証明終)

性質 **4.** $x^4 + 4y^4 = z^2$ を満たす有理数 x, y, z は xy = 0 を満たす。

(証明) まず、 $x^4+4y^4=z^2$ を満たす非零整数 x,y,z が存在しないことを示す。仮に、存在したとしよう。このとき、 $p^4+4q^4=r^2,\ 0< r< z$ となる非零整数 p,q,r が存在することを示す (Fermat's method of decent)。これが示されれば、結局 r=1 となり、矛盾をきたすことになる。

x,y が coprime でないとすると、その公約数 d で z が割り切れるので r=z/d とすればよい。x,y が coprime のとき、 $(x^2)^2+(2y^2)^2=z^2$ から性質 3 より

$$2y^2 = 2ab$$
, $x^2 = b^2 - a^2$, $z = a^2 + b^2$, $0 < a < b$, $gcd(a, b) = 1$, $x : odd$

となる。a,b が coprime なので、 $y^2=ab$ から $a=c^2,b=d^2$, $\gcd(c,d)=1$ とかけ、 $x^2=d^4-c^4\Rightarrow x^2+c^4=d^4$ を得る。 $x^2+(c^2)^2=(d^2)^2$ 、x: odd より、性質 3 から

$$c^2 = 2ef$$
, $x = f^2 - e^2$, $d^2 = e^2 + f^2$, $gcd(e, f) = 1$

となる。e,f が coprime なので $c^2=2ef$ より e,f の片方が平方数、残りが平方数 の 2 倍となる。よってそれらを $p^2,2q^2$ とおくと、 $d^2=e^2+f^2\Rightarrow p^4+4q^4=d^2$ となる。ここで、 $d< d^2=b< z$ なので、r=d とすればよい。

次に、 $x=x_1/x_0,\ y=y_1/y_0,\ z=z_1/z_0,\ x_i,y_i,z_i$: integer が非零で、 $x^4+4y^4=z^2$ を満たすとする。すると、 $(y_0z_0x_1)^4+4(x_0z_0y_1)^4=(x_0^2y_0^2z_0z_1)^2$ が得られる。すると、既に得られた結果から x_1,y_1,z_1 が全て非零ではあり得ないので、x,y,z も非零ではあり得ない。このとき、x,y のいずれかは 0 である。(証明終)

2.6.7

Nodal cubic curve $X=V((f)),\ f=y^2z-x^3-x^2z$ は rational であるが (Exercise I.4.4(c))、Z=(0,0,1) は singular point である。実際、Z において $\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0,\ \frac{\partial f}{\partial z}=0$ となる。

Example 6.11.4 と同様、 $X-Z\overset{\sim}{\to} \operatorname{CaCl}^{\circ} X$ が成り立つ。 X-Z が multiplicative group G_m と同型になることを示す。そのために

$$k^{\times} \stackrel{\sim}{\to} X - Z$$

$$t \mapsto (4t(t-1), 4t(t+1), (t-1)^3)$$

$$X - Z \stackrel{\sim}{\to} k^{\times}$$

$$(x, y, z) \mapsto \frac{y+x}{y-x}$$

となる 1 対 1 対応を考えると $(4t(t-1),4t(t+1),(t-1)^3)$ は $y^2z=x^3+x^2z$ を満たしており、t=0,1 はそれぞれ $Z,P_0=(0,1,0)$ に対応している。

 $P_i := (x_i, y_i, z_i) = (4t_i(t_i - 1), 4t_i(t_i + 1), (t_i - 1)^3), i = 1, 2, 3$ を直線 L: ax + by + cz = 0 と X の 3 交点とすると (X - Z) において)、それら 3 交点は

$$4t(t-1)a + 4t(t+1)b + (t-1)^3c = 0$$

の解であり、解と係数の関係から

$$t_1t_2t_3 = 1$$

を得る。

 $P=P_1+P_2$ とすると (正確には P_0 を零元として $P-P_0=P_1-P_0+P_2-P_0$ の意味)、 P_0,P_3,P を通る直線が存在し、P に対応する t は同様に $t_0t_3t=1$, $t_0=1$ ⇒ $t=t_3^{-1}$ を満たすので、

$$t = t_1 t_2$$

が成り立つ。なお、 $t=t_3^{-1}$ は $P=-P_3$ に対応してるので、逆元は t の逆数が対応する。

よって X-Z は multiplicative group $k^{\times} = \mathbf{A}_{k}^{1} - (0)$ と同型になる (definition, p. 136 より、curve 上では k は代数的閉体の前提あり)。

2.6.8

(a)
$$f: X \to Y$$
, $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} X$ のとき、 $\mathcal{L}|_{V_i} = \mathcal{O}_{Y|V_i}$, $Y = \bigcup_i V_i$ なので

$$(f^*\mathscr{L})|_{U_i} = \overline{f}^*(\mathscr{L}|_{V_i}) = \overline{f}^*(\mathcal{O}_{V_i}) = \mathcal{O}_{U_i}, \ \overline{f} = f|_{U_i} : U_i \to V_i, \ U_i = f^{-1}(V_i)$$

が成り立ち (Exercise II.5.1 解答中の性質 4)、 $f^*\mathcal{L}$ は invertible である。

(b) Nonsingular curve X,Y は Proposition 6.11、Corollary 6.16 の前提を満たすので (Remark 6.11.1A)、 $\operatorname{Cl} X \cong \operatorname{CaCl} X \cong \operatorname{Pic} X$ であり、Y に関しても同様である。

$$f: X \to Y$$
 が finite なので

$$f^{*c}: \operatorname{Cl} Y \to \operatorname{Cl} X$$

が存在する (Definition, p.137 の最後)。

また X は complete であり (次の性質 5)、Proposition 6.8 が適用できる。ここで、もし、f(X)=pt とすると $X=f^{-1}(pt)$ は有限である (Exercise II.3.5(a))。 Exercise I.4.8 から X の closed point 集合は k と同じ濃度をもつが、k は代数的 閉体なので無限、矛盾である。

従って f は全射であり、 $f^\#: \mathcal{O}_Y \hookrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ は単射となる。よって $\mathcal{O}_Y(V) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(U), \ U = f^{-1}(V) \Rightarrow K(Y) \subseteq K(X)$ である。

$$f^{*c}:\operatorname{Cl} Y\to\operatorname{Cl} X$$

$$Q \mapsto \sum_{f(P)=Q} v_P(t_Q)P, \ t_Q \in \mathcal{O}_Q \subseteq K(Y) \subseteq K(X)$$
: local parameter

$$f^{*ca}: \operatorname{CaCl} Y \to \operatorname{CaCl} X, \ D = \{(V_i, g_i)\} \mapsto \{(U_i, g_i)\}$$

$$U_i = f^{-1}(V_i), \ g_i \in K(Y) \subseteq K(X)$$

$$f^{*p}: \operatorname{Pic} Y \to \operatorname{Pic} X, \ \mathscr{L}D \to f^*\mathscr{L}D$$

とすると、これらに関する図式

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Cl} Y & \stackrel{\sim}{\swarrow} & \operatorname{CaCl} Y & \stackrel{\sim}{\swarrow} & \operatorname{Pic} Y \\
f^{*c} & & \downarrow f^{*ca} & & \downarrow f^{*p} \\
\operatorname{Cl} X & \stackrel{\sim}{\swarrow} & \operatorname{CaCl} X & \stackrel{\sim}{\swarrow} & \operatorname{Pic} X
\end{array} \tag{13}$$

が local に $(V_i = f^{-1}(U_i)$ において) 可換であることを示す 8 。まず、図式の左側の区画において

$$f^{*ca}: D = \{(V_i, g_i)\} \mapsto \{(U_i, g_i)\}$$
$$\varphi^Y: \{(V_i, g_i)\} \to \sum_Q v_Q(g_j)Q$$
$$\varphi^X: \{(U_i, g_i)\} \to \sum_P v_P(g_j)P$$

が成り立つ。ここで、j は $Q \in V_j$ [$\Leftrightarrow P \in U_j$] を満たすものである (j は $Q \cap V_j \neq \emptyset$ となる j であり、そのような j ならどれを用いても結果は変わらない、Proposition 6.11 の証明参照)。

このとき、下記性質6より

$$f^{*c} : \sum_{Q} v_{Q}(g_{j})Q \to \sum_{Q} v_{Q}(g_{i}) \sum_{P \in f^{-1}(Q)} v_{P}(t_{Q})P$$
$$= \sum_{P} v_{f(P)}(g_{i})v_{P}(t_{f(P)})P = \sum_{P} v_{P}(g_{i})P$$

⁸Cl $Y \to \text{CaCl}\,Y,\,Q \mapsto \{(U_Q,t_Q),(Y-Q,1)\}$ から証明することも可能である。 $\{(U_Q,t_Q),(Y-Q,1)\}$ が Cartier divisor となることは $t_Q \in \mathcal{O}_Q^*$ から容易に示すことができ、また $\{(U_Q,t_Q),(Y-Q,1)\}$ から Weil divisor を作成すれば Q となることも容易にわかる。

なので、 $f^{*c}\varphi^Y = \varphi^X f^{*ca}$ 、ゆえに可換となる。 次に図式の右側の区画が可換であることを示す。

$$\mathcal{L}^{Y}: D^{Y} = \{(V_{i}, g_{i})\} \mapsto \mathcal{L}D^{Y} = \{\mathcal{O}_{V_{i}} g_{i}^{-1}\}$$

$$f^{*p}: \mathcal{L}D^{Y} \mapsto f^{*}(\mathcal{L}D^{Y})$$

$$f^{*}(\mathcal{L}D^{Y})|_{U_{i}} = \overline{f}^{*}((\mathcal{L}D^{Y})|_{V_{i}}) = \overline{f}^{*}(\mathcal{O}_{V_{i}} g_{i}^{-1}) \stackrel{\#}{=} \mathcal{O}_{U_{i}} g_{i}^{-1}$$

$$f^{*ca}: D^{Y} = \{(V_{i}, g_{i})\} \mapsto D^{X} = \{(U_{i}, g_{i})\}$$

$$\mathcal{L}^{X}: D^{X} = \{(U_{i}, g_{i})\} \mapsto \mathcal{L}D^{X} = \{\mathcal{O}_{U_{i}} g_{i}^{-1}\}$$

から $f^{*p}\mathcal{L}^Y=\mathcal{L}^X f^{*ca}$ 、ゆえに可換となる。なお、 $\stackrel{\#}{=}$ が成立するのは次の性質7による。

以上により図式 (13) 全体が可換となる。 φ^Y, φ^X は isomorphism なので、その逆写像を考えれば

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Cl} Y & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \operatorname{Pic} Y \\ f^{*c} & & \downarrow f^{*p} \\ \operatorname{Cl} X & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \operatorname{Pic} X \end{array}$$

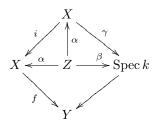
が可換、 f^{*c} と f^{*p} は等価となる。

性質 5. $f: X \to Y$ (X, Y: curve) が finite ならば、X は complete である。

(証明) $y \in V = \operatorname{Spec} B \subseteq Y, \ y = \mathfrak{p}$ とすると、k は代数的閉体ゆえ $B/\mathfrak{m} = k$ であり ([1], Corollary 7.10)

$$k(y) = \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y = B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p} = (B/\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \hookrightarrow (B/\mathfrak{m})_\mathfrak{p} = k$$

から、Spec $k \to Y$ となる (Exercise II.2.7)。 このとき $X \times_Y k = X$ が成り立つ。なぜなら



が可換となり $(\beta: Z \to X \to \operatorname{Spec} k$ となるのは、definition, p. 78 による)、一意性も明らかなので、U.P. から成立するからである。

すると、proper 性の base change 不変性から γ も proper、よって X は complete となる。 (証明終)

性質 6. $f: X \to Y$ が finite ならば、 $t_Q \in \mathcal{O}_Q \subseteq K(Y)$ を local parameter として、次式が成立する。

$$v_P(g) = v_P(t_Q)v_Q(g), \ g \in K(Y), \ Q = f(P)$$
 (14)

(証明) まず $\mathcal{O}_Q \hookrightarrow \mathcal{O}_P, \ Q = f(P)$ を示す。(:) f は全射なので $f^\#: \mathcal{O}_Y \hookrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ は単射である。f が finite ゆえ $V_i = \operatorname{Spec} B^i, \ U_i = f^{-1}(Vi) = \operatorname{Spec} A^i$ とできるので、

$$f^{\#}(V_i): \mathcal{O}_Y(V_i) = B^i \hookrightarrow (f_*\mathcal{O}_X)(V_i) = \mathcal{O}_X(U_i) = A^i$$

より $\varphi = f^{\#}(V_i)$ とすると、

$$\varphi: B^i \hookrightarrow A^i \Rightarrow B^i_{\varphi^{-1}\mathfrak{p}} \hookrightarrow A^i_{\mathfrak{p}} \Rightarrow \mathcal{O}_Q \hookrightarrow \mathcal{O}_P$$

となる。(:: 終)

 $\mathcal{O}_Q\subseteq\mathcal{O}_P$ において、 \mathcal{O}_Q , \mathcal{O}_P の max ideal をそれぞれ \mathfrak{m}_Q , \mathfrak{m}_P とすると、 $\mathfrak{m}_Q=\mathfrak{m}_P\cap\mathcal{O}_Q\subseteq\mathfrak{m}_P$ が成り立つ。

 $(t_Q)=\mathfrak{m}_Q=\mathfrak{m}_P^r$ より $r=v_P(t_Q)$ であり、 $s=v_Q(g)$ とすると、 $(g)=\mathfrak{m}_Q^s=\mathfrak{m}_P^{rs}$ から、 $v_P(g)=rs=v_P(t_Q)v_Q(g)$ を得る。(証明終)

性質 7. $B \hookrightarrow A$, $f: U = \operatorname{Spec} A \to V = \operatorname{Spec} B$, g & A-module の元とすると

$$f^*(\mathcal{O}_V g) = \mathcal{O}_U g$$

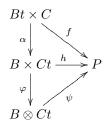
(証明) Proposition II.5.2(e) と次の性質 8 から

$$f^*(\mathcal{O}_Vg)=f^*(\widetilde{Bg})=(Bg\otimes_BA)^\sim=(B\otimes_BAg)^\sim=\widetilde{Ag}=\widetilde{Ag}=\mathcal{O}_Ug$$
 (証明終)

性質 8. 整域 A, B, C に対し $A \rightarrow B$, $A \rightarrow C$ かつ $t \in \operatorname{Frac} B \cap \operatorname{Frac} C$ のとき

$$Bt \otimes_A C \approx B \otimes_A Ct$$

(証明) 下図式の U.P による。



ここで、

$$\alpha: (bt, c) \mapsto (b, ct)$$

$$h:(b,ct)\mapsto f(bt,c)$$

とすると、 $h\alpha=f$ が成り立つ。 ψ は $B\otimes Ct$ の U.P. から得られるもので、 $h=\psi\varphi$ を満たす。すると、 $f=\psi(\varphi\alpha)$ が成り立ち、また、このような ψ は一意的なので、U.P. から $Bt\otimes C=B\otimes Ct$ が成立する。(証明終)

(c) X は locally factorial integral closed scheme なので、 $\operatorname{Cl} X \approx \operatorname{CaCl} X$ である。

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Cl} \mathbf{P}^{n} & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{CaCl} \mathbf{P}^{n} & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Pic} \mathbf{P}^{n} \\
f^{*c} & \downarrow & f^{*ca} & \downarrow f^{*p} \\
\operatorname{Cl} X & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{CaCl} X & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Pic} X
\end{array} \tag{15}$$

 $f:X\hookrightarrow \mathbf{P}^n$ に対し、(b) と同様に f^{*c},f^{*ca},f^{*p} が定義できる。ただし f^{*c} は $f^{*c}:\operatorname{Cl}\mathbf{P}^n\to\operatorname{Cl}X,\ V\mapsto V.X$ である。

 $H=(x_0) \not\supseteq X$ とすると $((x_i) \not\supseteq X$ となる i は存在する)、 $\operatorname{Cl} \operatorname{P}^n \approx \operatorname{CaCl} \operatorname{P}^n \approx \operatorname{Pic} \operatorname{P}^n$ は H で生成されるので (Proposition 6.4)、上記 3 つの morphism が H に おいて等価になればよい。

$$f^{*c}: H \mapsto H.X = \sum_{Z} v_Z(x_0/x_i)Z$$

$$f^{*ca}: D = \{(U_i, x_0/x_i)\} \mapsto D^X = \{(f^{-1}(U_i), x_0/x_i)\}, \ f^{-1}(U_i) = U_i \cap X$$
$$f^{*p}: \mathcal{L}D = \{(U_i, \mathcal{O}_{U_i}x_i/x_0)\} \to f^*\mathcal{L}D = \{(U_i \cap X, \mathcal{O}_{U_i \cap X}x_i/x_0)\}$$

最後の式は (b) と同様、性質 7 による。また、 $H=(x_0) \not\supseteq X \Leftrightarrow x_0 \not\in I, \ X=V(I)$ より $x_0/x_i \in K(X) = \operatorname{Frac}(S/I)_{(0)}$ と見ることができる。

H に対応する $\operatorname{CaCl} \operatorname{P}^n$ の元は $D=\{(U_i,x_0/x_i)\}$ である $(U_i=D_+(x_i))$ 。 なぜ なら、D から Weil divisor を作成すると $\sum_V v_V(x_0/x_i)V$ となるが (i は $V\cap U_i\neq\varnothing$ となる i)、V=V((g)) となる g に対し $(\operatorname{P}^n$ の divisor はこの形に限る、Exercise I.2.8)、 $x_0\in(g)^r$ となるのは、 $g=x_0,r=1$ に限るからである: $\varphi^P(D)=H$ $\varphi^X(D^X)$ については、 $Z\cap(U_i\cap X)\neq\varnothing\Leftrightarrow Z\cap U_i\neq\varnothing$ なので、

$$\sum_{Z[Z\cap (U_i\cap X)\neq\varnothing]} v_Z\big(x_0/x_i\big)Z = \sum_{Z[Z\cap U_i\neq\varnothing]} v_Z\big(x_0/x_i\big)Z = H.X$$

が成り立つ。

さらに、

$$\mathcal{L}^X(D^X) = \mathcal{L}^X(\{(U_i \cap X, x_0/x_i)\}) = \{(U_i \cap X, \mathcal{O}_{U_i \cap X} x_i/x_0)\} = f^* \mathcal{L}D$$

である。

以上により、図式 (15) は可換となる。

(a) Projective curve over $k \mathcal{O} X \mathcal{O}$ normalization $\mathcal{E} \tilde{X} \mathcal{E} \mathcal{T} \mathcal{S}_{\circ}$

$$\pi: \tilde{X} \to X$$

$$X = \bigcup_i U_i, \ U_i = \operatorname{Spec} A_i, \ \tilde{X} = \bigcup_i \tilde{U}_i, \ \tilde{U}_i = \operatorname{Spec} \tilde{A}_i$$

Theorem II.4.9 から X は finite-type over k であり、よって $\pi: \tilde{X} \to X$ は finite である (Exercise II.3.8)。また、Normalization の構成法からからわかるように (Exercise II.3.8 の証明の最後の式 (18) 参照)、 $\pi|_{U_i}: \tilde{U}_i \to U_i, \; \tilde{U}_i = \pi^{-1}(U_i)$ である。

 $A_i \hookrightarrow \tilde{A}_i$ が単射なので、local に $\pi^\#: \mathcal{O}_{U_i} \hookrightarrow \pi_*(\mathcal{O}_{U_i})$ も単射であり (Exercise II.2.18(b))、よって $\forall x \in X$ に対して、 $x \in \exists U_i$ とすると $\pi_x^\#: \mathcal{O}_{U_i,x} \hookrightarrow (\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{U}_i})_x$ も単射となる。よって全体として $\pi^\#: \mathcal{O}_X \hookrightarrow \pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ は単射となり

$$\pi^{\#}: \mathcal{O}_X \hookrightarrow \pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

すると

$$A_i \subseteq \tilde{A}_i \subseteq \operatorname{Frac} A_i = K(X) \Rightarrow K(X) = \operatorname{Frac} A_i \subseteq \operatorname{Frac} \tilde{A}_i \subseteq K(X)$$

$$\Rightarrow K(\tilde{X}) = K(X) = K$$

従って

$$\mathcal{O}_X \hookrightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \hookrightarrow \mathscr{K}$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}_X^* \hookrightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}^* \hookrightarrow \mathscr{K}^*$$

このとき $\forall U \subseteq X$ に対して、 $\mathcal{O}_X^*(U) \hookrightarrow \pi_*\mathcal{O}_{\bar{X}}^*(U) \hookrightarrow \mathcal{K}^*(U)$ から $\pi_*\mathcal{O}_{\bar{X}}^*(U)/\mathcal{O}_X^*(U) \hookrightarrow \mathcal{K}^*(U)/\mathcal{O}_X^*(U)$ が得られ 9 、presheaf として $(\pi_*\mathcal{O}_{\bar{X}}^*/\mathcal{O}_X^*)^- \hookrightarrow (\mathcal{K}^*/\mathcal{O}_X^*)^-$ が成り立つが、Exercise II.1.4 より sheaf 化しても単射となる:

$$\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}^* / \mathcal{O}_X^* \hookrightarrow \mathscr{K}^* / \mathcal{O}_X^*$$

Exercise II.1.6(a) から

$$0 \to \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}^* / \mathcal{O}_X^* \to \mathcal{K}^* / \mathcal{O}_X^* \to (\mathcal{K}^* / \mathcal{O}_X^*) / (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}^* / \mathcal{O}_X^*) = \mathcal{K}^* / \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}^* \to 0 \quad \text{(exact)}$$
(16)

ここで、 $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^*$ は quasi-coherent である。なぜなら $\mathcal{O}_X^*|_{U_i}=A_i^{*\sim}$ 、 $(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*)|_{U_i}=\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{U}_i}^*)=(\tilde{A}_i^*)^\sim$ より $^{10}(\overline{\pi}=\pi|_{\tilde{U}_i},\ \tilde{A}$ は A の整閉包、() $^\sim$ は Definition, p.110 で定義されたもの)、 \mathcal{O}_X^* 、 $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*$ は quasi-coherent、よって

$$0 \to \mathcal{O}_X^* \xrightarrow{\iota} \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}^* \to \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}^* / \mathcal{O}_X^* \to 0$$

⁹ここでの剰余類は積に関する剰余類である。

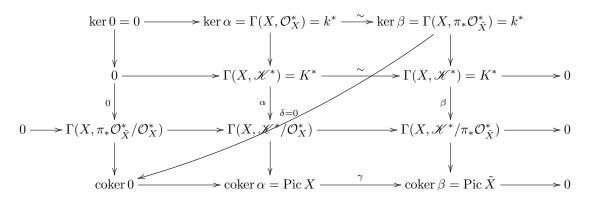
 $^{^{10}}$ Exercise II.5.1 の証明の中の性質 4 参照

において (Exercise II.1.6(a))、 $\operatorname{coker} \iota = \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}^* / \mathcal{O}_X^*$ は quasi-coherent となるから である (Proposition 5.7)。

よって式 (16) から

$$\Rightarrow 0 \to \Gamma(X, \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^*) \to \Gamma(X, \mathscr{K}^*/\mathcal{O}_X^*) \to \Gamma(X, \mathscr{K}^*/\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}^*) \to 0 \quad (\text{exact})$$

となり (Proposition 5.6) ¹¹、snake lemma より下記の可換図が得られる。



可換図において、 $\alpha': \mathscr{K}^* \to \mathscr{K}^*/\mathcal{O}_X^*$ とすると、 $\ker \alpha' = \mathcal{O}_X^* \Rightarrow \ker \alpha = \ker \alpha'(X) = \mathcal{O}_X^*(X)$ [= k^*] である (Theorem I.3.4(a) $\leftarrow X$: projective curve ゆ え variety と見做せる)。

CaDvi $X = \Gamma(X, \mathscr{K}^*/\mathcal{O}_X^*)$ であり、im α は X の principal divisor なので、 $\operatorname{Pic} X = \operatorname{CaCl} X = \operatorname{coker} \alpha$ となる。 β についても同様である。

左下は $\operatorname{coker} 0 = \Gamma(X, \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}^* / \mathcal{O}_X^*)$ である。 $\operatorname{ker} \alpha \approx \operatorname{ker} \beta = k^*$ なので $\delta = 0$ であり ([2], 例 1.8)、従って $(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}^* / \mathcal{O}_X^*)(X) \hookrightarrow$ Pic X は単射である。

 $\mathcal{I} = \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{Y}}}^* / \mathcal{O}_X^*$ とすると、nonsingular point P では $\mathcal{I}_P = 0$ 、X における singular point の集合は閉集合 ($\subseteq X$) であり (Theorem I.5.3)、Supp $\mathcal{I} \subseteq X$ ゆ え、次の性質9から

$$\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^* = \bigoplus_{P \in X} (\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*)_P/(\mathcal{O}_X^*)_P = \bigoplus_{P \in X} \tilde{\mathcal{O}}_P^*/\mathcal{O}_P^*$$

となる。ここで、最後の等号は $(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})|_{U_i}=\overline{\pi}_*(\mathcal{O}_{\tilde{U}_i})=(\tilde{A}_i)^\sim$ より、Proposition 5.1(b) から

$$(\overline{\pi}_*\mathcal{O}_{\tilde{U}_i}^*)_P = (\tilde{A}_i^*)_P \stackrel{\%}{=} \widetilde{(A_i^*)_P} = \widetilde{\mathcal{O}_{U_i,P}^*} = \widetilde{\mathcal{O}_P^*}$$

となるからである ($\stackrel{\%}{=}$ は [1], Proposition 5.12 による)。

 $^{^{11} \}mbox{Proposition}$ 5.6 が使えるのは X が affine の場合であるが、exact 系列性は局所的性質なので X が affine のときに言えれば十分である (Exercise I.1.2(c))。

以上まとめると次の exact 系列を得る。

$$0 \to \bigoplus_{P \in X} \tilde{\mathcal{O}}_P^* / \mathcal{O}_P^* \to \operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} \tilde{X} \to 0$$
 (17)

性質 **9.** Curve X、coherent sheaf \mathscr{F} において Supp $\mathscr{F} \subseteq X$ のとき

$$\mathscr{F} = \bigoplus_{P \in X} i_P(\mathscr{F}_P) = \bigoplus_{P \in X} \mathscr{F}_P$$

(証明) Curve X は noetherian なので、Exercise II.5.6 より Supp $\mathscr F$ は閉集合であり、有限個の closed point からなる。すると $\mathscr F\to i_P(\mathscr F_P)$ を定義できる。なぜなら

$$\mathscr{F}(U) \to i_P(\mathscr{F}_P)(U) = \begin{cases} \mathscr{F}_P & : P \in U \\ 0 & : \text{ otherwise} \end{cases}$$

が存在し、これは制限写像と compatible だからである。よって

$$f: \mathscr{F} \to \bigoplus_{P \in \operatorname{Supp}\mathscr{F}} i_P(\mathscr{F}_P) = \bigoplus_{P \in X} i_P(\mathscr{F}_P)$$

が定義できる。

このとき

$$(\bigoplus_{P\in X} i_P(\mathscr{F}_P))_Q = \begin{cases} \mathscr{F}_P &: Q = P \in \operatorname{Supp}\mathscr{F} \\ 0 &: Q \notin \operatorname{Supp}\mathscr{F} \end{cases}$$

より $\mathscr{F}_Q=(igoplus_{P\in X}i_P(\mathscr{F}_P))_Q$ となるので、 $\mathscr{F}=igoplus_{P\in X}i_P(\mathscr{F}_P)$ が得られる。X が curve の場合、 $\{P\}^-=P$ から、 $i_P(\mathscr{F}_P)=\mathscr{F}_P$ と見られる。(証明終)

(b)

(b-1) Cuspisal curve: $y^2z = x^3$

 $X=D_+(z)\cup D_+(y)$ の singular point は $Z=(0,0,1)\in D_+(z)$ 、 z=0 の点 は $P_0=(0,1,0)\in D_+(y)$ である。

 $D_{+}(z)$ では、 $D_{+}(z) = X - P_{0} = \operatorname{Spec} A, \ A := k[x,y]/(y^{2} - x^{3})$ とすると $\operatorname{Frac} A = k(x,y)[y]/(y^{2} - x^{3})$ であり、

$$\alpha: A \hookrightarrow k[t], \ x \mapsto t^2, y \mapsto t^3$$

$$\beta: k[t] \hookrightarrow \operatorname{Frac} A, \ t \mapsto y/x$$

は単射となる。なぜなら、 α は $f=\sum_{i,j\geq 0}a_{i,j}x^iy^j$ のとき $f(t^2,t^3)=\sum_{i,j\geq 0}a_{i,j}t^{2i+3j}=0$ において低次係数から順次 0 となることがわかるからであり、 β においては $y^2=x^3$ を満たす y/x は任意の値を取りうるので g(y/x)=0 なら多項式として g=0 となるからである。なお $A\approx \operatorname{im}\alpha=k[t^2,t^3]$ である。

A の整閉包は $\tilde{A}=k[t]$ であることを示す。まず k[t] は整閉である。 $\beta:k[t]\subseteq \operatorname{Frac} A$ では t=y/x であるが、 $t^2-x=0$ より t は A 上整ゆえ $k[t]\subseteq \tilde{A}$ となる。一方 $A\subseteq k[t]\subseteq \operatorname{Frac} A$ から $\tilde{A}\subseteq \tilde{k[t]}=k[t]$ なので、合わせて $\tilde{A}=k[t]$ を得る。

 $D_+(y)$ では、 $D_+(y)=X-Z=\operatorname{Spec} B,\ B=k[x,z]/(z-x^3)=k[t],\ t=x$ において、 $\tilde{B}=k[t]$ となる。 以上により $\tilde{X}=\mathbf{P}_k^1$ となり、 $\operatorname{Pic} \tilde{X}=\mathbb{Z}$ が得られる。

X-Z は nonsingular なので \mathcal{O}_P は整閉、 $\tilde{\mathcal{O}}_P=\mathcal{O}_P$ となる。

$$\tilde{\mathcal{O}}_Z^*/\mathcal{O}_Z^* = S^{-1}k[t]^*/S^{-1}k[t^2,t^3]^* = \left\{\frac{a+bt+t^2f}{1+t^2g}\right\}_{a \in k^*, b \in k, f, g \in k[t]}$$

$$S = \alpha(A \setminus (x, y)) = k[t^2, t^3] \setminus (t^2) = \{1 + t^2 g\}_{g \in k[t]}$$

ここで、 $a\neq 0$ である。なぜなら、 $\frac{a+bt+t^2f}{1+t^2g}$ は unit であるが、もし a=0 とすると $\frac{bt+t^2f}{1+t^2g}\cdot\frac{a'+b't+t^2f'}{1+t^2g'}=1$ となり得ないからである。

$$\theta: \tilde{\mathcal{O}}_Z^*/\mathcal{O}_Z^* \to \mathbf{G}_a, \ \frac{a+bt+t^2f}{1+t^2g} \mapsto b/a$$

とする。 θ は同型である。実際、 $\frac{a+bt+t^2f}{1+t^2g} = \frac{a'+t^2f'}{1+t^2g'} \in S^{-1}k[t^2,t^3]^*$ とすると b=0 となり well-define である。逆に b=0 とすると $\frac{a+t^2f}{1+t^2g} \in S^{-1}k[t^2,t^3]^*$ から単射である。全射は自明であり、さらに $\frac{a+bt+t^2f}{1+t^2g} \cdot \frac{a'+b't+t^2f'}{1+t^2g'} = \frac{aa'+(ab'+a'b)t+t^2f''}{1+t^2g''} \mapsto (ab'+a'b)/aa' = b/a+b'/a'$ より準同型でもある。よって $\bigoplus_{P\in X} \tilde{\mathcal{O}}_P^*/\mathcal{O}_P^* = \tilde{\mathcal{O}}_Z^*/\mathcal{O}_Z^* = \mathbf{G}_a$ となる。

$$0 \to \mathbf{G}_a \to \operatorname{Pic} X \to \mathbb{Z} \to 0$$

が得られる。

(b-2) Nodal curve: $y^2z = x^3 + x^2z$

 $D_+(z) = X - P_0 = \operatorname{Spec} A, \ A = k[x,y]/(y^2 - x^3 - x^2)$ は $P_0 = (0,1,0)$ を含まないが、 $y \to \infty$ とすれば P_0 となるので、ここではそれを含め X を $\operatorname{Spec} A$ として扱う。

Frac
$$A = k(x)[y]/(y^2 - x^3 - x^2)$$
 に対し、

$$\alpha: A \hookrightarrow k[t], \ x \mapsto t^2 - 1, y \mapsto t^3 - t$$

$$\beta: k[t] \hookrightarrow \operatorname{Frac} A, \ t \to y/x$$

は単射となる ((b-1) と同様)。なお、 P_0 は $t=\infty$ に対応する。 $ilde{A}=k[t]$ となることも (b-1) と同様であり、よって $ilde{X}=\mathbf{P}^1_k$ である。

X において Z=(0,0,1) 以外は nonsingular なので、やはり (b-1) 同様 $\tilde{\mathcal{O}}_P^*=\mathcal{O}_P^*$ が成り立つ。

Z は A の prime ideal (x,y) に対応しており、

$$S = \alpha(A \setminus (x, y)) = k[t^2 - 1, t^3 - t] \setminus (t^2 - 1) = \{1 + (t^2 - 1)g\}_{g \in k[t]}$$

から

$$\tilde{\mathcal{O}}_Z^*/\mathcal{O}_Z^* = S^{-1}k[t]^*/S^{-1}k[t^2-1,t(t^2-1)]^* = \left\{\frac{a(t+1)+b(t-1)+(t^2-1)f}{1+(t^2-1)g}\right\}_{a,b\in k^*,f,g\in k[t]}$$

となる。ここで $\forall f(t) \in k[t]$ は $f(t) = a(t+1) + b(t-1) + (t^2-1)g$ と書けるが、もし a=0 だと $\frac{b(t-1)+(t^2-1)f}{1+(t^2-1)g'}\frac{h}{1+(t^2-1)g''}=1/1$ はあり得ないので (t=1 とすればわかる)、 $a\neq 0$ であり、 $b\neq 0$ も同様である 12 。

$$\theta: \tilde{\mathcal{O}}_Z^*/\mathcal{O}_Z^* \to k^*, \ \frac{a(t+1) + b(t-1) + (t^2-1)f}{1 + (t^2-1)g} \mapsto -a/b$$

と定義する。実際に定義できるのは、 $\frac{a(t+1)+b(t-1)+(t^2-1)f}{1+(t^2-1)g}\in S^{-1}(k[t^2-1,t^3-t])$ なら a+b=0 ⇒ -a/b=1 による。 θ が単射となるのは、-a/b=1 とすると a+b=0 より

$$\frac{a(t+1) + b(t-1) + (t^2 - 1)f}{1 + (t^2 - 1)q} = \frac{2a + (t^2 - 1)f}{1 + (t^2 - 1)q} \in S^{-1}k[t^2 - 1, t(t^2 - 1)]^* = \mathcal{O}_Z^*$$

だからである。全射は自明であり、さらに

$$(a(t+1)+b(t-1))(a'(t+1)+b'(t-1)) = 2aa'(t+1)-2bb'(t-1)+(t^2-1)g''$$

$$\Rightarrow \theta(hh') = \frac{aa'}{bb'} = \theta h \cdot \theta h', \ h := \frac{a(t+1) + b(t-1) + (t^2-1)f}{1 + (t^2-1)q}, h' := \frac{a'(t+1) + b'(t-1) + (t^2-1)f'}{1 + (t^2-1)q'}$$

から準同型でもあるので、

$$\tilde{\mathcal{O}}_Z^*/\mathcal{O}_Z^*\stackrel{\sim}{\to} \mathbf{G}_m$$

が成り立つ。

以上により式 (17) は

$$0 \to \mathbf{G}_m \to \operatorname{Pic} X \to \mathbb{Z} \to 0$$

となる。

2.6.10

 $\mathfrak{C} = \{[\mathscr{F}] | \mathscr{F} : \mathrm{coherent}\}, \ \mathfrak{D} = \{[\mathscr{F}] - [\mathscr{F}'] - [\mathscr{F}''] | 0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0\}$ このとき、 γ を

$$\gamma \mathscr{F} = \widetilde{[\mathscr{F}]} \in \mathfrak{C}/\mathfrak{D} = K(X)$$

で定義する。

 $\mathfrak C$ は free abelian group なので、その元の表現は一意的である。以下 $\mathfrak C$ において、 $[\mathscr F]$ を単に $\mathscr F$ と記す。

$$\begin{split} 0 &\to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0 \\ \Leftrightarrow \mathscr{F} - \mathscr{F}' - \mathscr{F}'' &\in D \\ \Leftrightarrow \widetilde{\mathscr{F}} - \widetilde{\mathscr{F}}' - \widetilde{\mathscr{F}}'' &= 0 \\ \Leftrightarrow \gamma \mathscr{F} - \gamma \mathscr{F}' - \gamma \mathscr{F}'' &= 0 \ [:= \gamma 0] \end{split}$$

従って、

$$\gamma \mathscr{F} = \gamma \mathscr{F}', \ \gamma \mathscr{F} = \gamma \mathscr{F}' + \gamma 0 \ \Rightarrow 0 \to \gamma 0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}' \to 0 \ \Rightarrow \mathscr{F} = \mathscr{F}'' \ (18)$$

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^{\otimes n} \to \mathcal{O}_X^{\otimes n-1} \to 0$$
 (exact)

より
$$\gamma \mathcal{O}_X^{\otimes n} = \gamma \mathcal{O}_X^{\otimes n-1} + \gamma \mathcal{O}_X$$
 が成り立つので、 $\gamma \mathcal{O}_X^{\otimes n} = n \gamma \mathcal{O}_X$ である。

(a) $\mathscr{F}= ilde{M}$: 有限生成 k[x]-module における M の生成元を x_1,\cdots,x_n とすると

$$k[x]^{\otimes n} \to M, \ (a_1, \cdots, a_n) \mapsto \sum_i a_i x_i$$

が存在するので

$$0 \to \ker \varphi \to k[x]^{\otimes n} \xrightarrow{\psi} M \to 0$$
 (exact)

ここで $\ker \psi$ は、pid k[x] 上の free module $k[x]^{\otimes n}$ の部分加群なので、ねじれ部分をもたず、 $k[x]^{\otimes r}$ の形をしている (module の構造定理)。従って

$$0 \to k[x]^{\otimes r} \to k[x]^{\otimes n} \to M \to 0$$
 (exact)

が成り立ち、

$$M = k[x]^{\otimes n-r} \Rightarrow \mathscr{F} = \widetilde{M} = \widetilde{k[x]}^{n-r} = \mathcal{O}_{X}^{n-r}$$

から $\gamma(\mathscr{F})=(n-r)\gamma(\mathcal{O}_X)$ を得る。これは $\gamma(\mathcal{O}_X)$ が K(X) の生成元であることを示している。

$$\varphi: K(X) \to \mathbb{Z}, \ \gamma(\mathscr{F}) \mapsto n-r$$

は式 (18 から) 単射であり、 $\gamma \mathcal{O}_X^{\otimes n} = n\gamma \mathcal{O}_X$ より全射でもある。以上により $K(X) = \mathbb{Z}$ である。

(b) rank を次のように定める。

$$\operatorname{rank}: K(X) \to \mathbb{Z}, \ C := \sum_i n_i \gamma(\mathscr{F}_i) \mapsto \sum_i n_i \dim_K \mathscr{F}_{\xi}$$

 $C \in \mathfrak{D}$ のとき、C は $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ を満たす $\mathscr{F} - \mathscr{F}' - \mathscr{F}''$ で 生成される。ここで、 \mathscr{F} は coherent なので、 \mathscr{F}_{ξ} は有限次元 $\mathcal{O}_{\xi} = K$ module(K 上 vector space) である。

$$0 o \mathscr{F}'_{\xi} o \mathscr{F}_{\xi} o \mathscr{F}''_{\xi} o 0$$
と \dim_K が加法的関数であることから、

$$\dim_K \mathscr{F}_{\xi} - \dim_K \mathscr{F}'_{\xi} - \dim_K \mathscr{F}''_{\xi} = 0$$

が成り立つ。よって $\operatorname{rank}(\mathscr{F}-\mathscr{F}'-\mathscr{F}'')=\dim_K\mathscr{F}_\xi-\dim_K\mathscr{F}_\xi'-\dim_K\mathscr{F}_\xi''=0$ から rank は well-define である。

 $\mathrm{rank}\mathcal{O}_X=\dim_K\mathcal{O}_\xi=\dim_KK=1$ より、rank は全射となる。

(c) Open immersion $i: U = X - Y \hookrightarrow X$ 、closed immersion $\iota: Y \hookrightarrow X$ と するとき、次の exact 系列が存在することを示す。

$$K(Y) \xrightarrow{\mu} K(X) \xrightarrow{\nu} (X - Y) \to 0$$
 (exact)

まず coherent \mathcal{O}_Y -module \mathscr{F} に対し ι が proper なので \mathcal{O}_X -module $\iota_*\mathscr{F}$ も coherent であり (Caution 5.8.1)

$$\mu: K(Y) \to K(X), \ \gamma \mathscr{F} \mapsto \gamma(\iota_* \mathscr{F})$$

が存在する。

一方、 \mathcal{O}_X -module \mathcal{G} が coherent なら \mathcal{O}_U -module $i^*\mathcal{G}=i^{-1}\mathcal{G}$ も coherent であり (Proposition 5.8)

$$\nu: K(X) \to K(U), \ \gamma \mathscr{G} \mapsto \gamma(i^*\mathscr{G})$$

が存在する。

逆に \mathcal{O}_U -module \mathscr{H} に対し、 \mathcal{O}_X -module \mathscr{H}' が存在して $i^*\mathscr{H}'=i^{-1}\mathscr{H}'=\mathscr{H}'|_U=\mathscr{H}$ を満たすので (Exercise II.5.15)、 ν は全射である。 $P\in U$ に対し

$$(i^*\iota_*\mathscr{F})_P = (\iota_*\mathscr{F})_P = \lim_{P \in V} \mathscr{F}(Y \cap V) = \mathscr{F}(\varnothing) = 0$$

となることから $\operatorname{im} \mu \subseteq \ker \nu$ である。

$$\gamma \mathcal{G} \in \ker \nu$$
 に対し $\gamma(i^* \mathcal{G}) = 0$ とする。すると、式 (18) より

$$i^*\mathscr{G} = \mathscr{G}|_U = 0 \Rightarrow \operatorname{Supp}\mathscr{G} \subseteq Y$$
 (19)

となる。

Exercise II.1.18 で示したように、 $\alpha:\mathcal{G}\to\iota_*\iota^{-1}\mathcal{G}$ が存在するが、これは全射である。

(::) $V\subseteq X$ に対し、 $\iota^{-1}V=Y\cap V=\operatorname{Spec} A/I$ であり、 $\mathscr{G}|_V=M^\sim$ 、 $\bar\iota=\iota|_{\iota^{-1}V}$ とすると、Exercise II.5.1 の解答中の性質 4 と Proposition 5.2 から

$$(\iota_*\iota^{-1}\mathscr{G})|_V = \bar{\iota}_*\bar{\iota}^*(\mathscr{G}|_V) = \bar{\iota}_*((M \otimes_A A/I)^{\sim}) =_A (M/IM)^{\sim}$$

となる([1], Exercise 2.2)。Corollary 5.5 と Proposition 5.6 より

$$0 \to IM \to M \to M/IM \to 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \to \widetilde{IM} \to \widetilde{M} \overset{\alpha|_{Y}}{\to} \widetilde{M/IM} \to 0$$

ここで $\ker \alpha|_V = \widetilde{IM}$ である。

 $M \to M/IM$ の全射性から $\tilde{M} \to M/IM$ は全射、よって $\mathcal{G}|_V \to (\iota_* \iota^{-1}\mathcal{G})|_V$ も全射となる。全射性は局所的性質なので $\mathcal{G} \to \iota_* \iota^{-1}\mathcal{G}$ は全射となる 13 。 (:: &) ここで $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}, \ \mathcal{G}_1 = \ker \alpha$ とおくと、 $\mathcal{G}_0 \supseteq \mathcal{G}_1$ であり、 $\gamma(\iota^*\mathcal{G}_0) \in K(Y)$ なので $\iota^*\mathcal{G}_0$ は \mathcal{O}_Y -module、 $\gamma(\iota_* \iota^*\mathcal{G}_0) \in \operatorname{im} \mu$ である。

以下、 $\mathcal{G}_1 \to \iota_* \iota^* \mathcal{G}_1$ に対して同じことを繰り返していくと、

$$\mathscr{G} = \mathscr{G}_0 \supseteq \mathscr{G}_1 \supseteq \mathscr{G}_2 \cdots$$

$$\mathcal{G}_j/\mathcal{G}_{j+1} \in \operatorname{im} \mu$$

$$\mathscr{G}_i|_V = (I^j M)^{\sim}$$

となる。

このとき、ある $n \ge 0$ に対し、 $\mathcal{G}_n = 0$ となることを示す。そのためには、十分大きな n に対して $I^n M = 0$ を示せば

$$\iota_* \iota^* \mathscr{G}_{n-1}|_V = (I^{n-1} M / I^n M)^{\sim} = (I^{n-1} M)^{\sim} = \mathscr{G}_{n-1}|_V$$

より

$$\mathscr{G}_n|_V = \ker(\mathscr{G}_{n-1}|_V \to \bar{\iota}_*\bar{\iota}^*\mathscr{G}_{n-1}|_V) = \ker(\mathscr{G}_{n-1}|_V \to \mathscr{G}_{n-1}|_V) = 0$$

となり、X は有限の V でカバーされるので、十分大きな n を取れば $\mathcal{G}_n=0$ を得る。

$$I^n M = 0 \Leftrightarrow I^n \subset \operatorname{Ann} M \stackrel{*}{\Leftrightarrow} I \subset \sqrt{\operatorname{Ann} M} \Leftrightarrow V(I) \supset V(\operatorname{Ann} M)$$

さて、 $0 \to \mathscr{G}_{j+1} \to \mathscr{G}_j \to \mathscr{G}_j/\mathscr{G}_{j+1} \to 0$ から $\gamma(\mathscr{G}_j) = \gamma(\mathscr{G}_{j+1}) + \gamma(\mathscr{G}_j/\mathscr{G}_{j+1})$ なので

$$\gamma(\mathscr{G}) = \sum_{0 \le j \le n-1} \gamma(\mathscr{G}_j/\mathscr{G}_{j+1})$$

であり、 $\mathcal{G}_i/\mathcal{G}_{i+1} \in \operatorname{im} \mu$ から $\gamma(\mathcal{G}) \in \operatorname{im} \mu$ を得る。以上により

$$K(Y) \to K(X) \to (X - Y) \to 0$$
 (exact)

が成り立つ。

 $^{13\}iota^{-1}V=\varnothing$ のときは I=A であり、排除する必要はない。

2.6.11

(a) $D = \sum_{i} n_{i} P_{i}$ が effective のとき、対応する subscheme of codimension 1 を

$$(Y, \mathcal{O}_D), Y = \{P_i\}_i, \mathcal{O}_D := \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathscr{I}_Y \stackrel{\text{Prop.6.18}}{=} \mathcal{O}_X/\mathscr{L}(-D)$$

とする:

$$0 \to \mathcal{L}(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0$$
, exact (20)

Exercise II.5.9 解答中の性質 9 から $\mathcal{O}_Y = \bigoplus_i \mathcal{O}_{Y,P_i}$ となるが、このとき $\mathcal{O}_{Y,P_i} = k(P_i)^{n_i}$ が成り立つ。

(:) X の covering として $\{U_i\}_i$, $P_i \in U_i, U_i = \operatorname{Spec} A^i$ とできる。D に対する Cartier Divisor を (U_i, f_i) , $f_i := t_i^{n_i}$, $t_i \in \mathcal{O}_{P_i}$: local parameter とする。このとき $\mathcal{O}_{Y,P_i} = \mathcal{O}_{X,P_i}/\mathcal{L}(-D)_{P_i} = A_{\mathfrak{p}_i}^i/(t_i^{n_i})$ であるが $(P_i$ と対応する A^i の prime ideal を \mathfrak{p}_i とした)、 $A_{\mathfrak{p}_i}^i/(t_i)^{n_i} = \widehat{A_{\mathfrak{p}_i}^i}/(t_i)^{n_i}$ ([1], Proposition 10.15) であり、 $\dim \widehat{A_{\mathfrak{p}_i}^i} = \dim A_{\mathfrak{p}_i}^i = 1$ なので (Theorem I.5.4.A)、Theorem I.5.5A から

$$\widehat{A_{n}^{i}}/(t_{i})^{n_{i}} = k[[t]]/\mathfrak{m}^{n_{i}} = k^{n_{i}} = k(P_{i})^{n_{i}}$$

となる。(:: 終)

以上により $\mathcal{O}_D = \bigoplus_i k(P_i)^{n_i}$ なので、 $\psi(D) = \gamma(\mathcal{O}_D)$ を得る。

Effective divisor $D_1 \sim D_2$ に対して、 $\mathcal{L}(-D_1) = \mathcal{L}(-D_2)$ より、 $\mathcal{O}_{D_1} = \mathcal{O}_{D_2} \Rightarrow \psi(D_1) = \psi(D_2)$ が成り立つ。

一般の divisor $D_1 \sim D_2$ に対しては、 $D_j' = D_j + D$, j = 1, 2 が effective となるようなある effective divisor D をとることができる。よって $D_1' \sim D_2' \Rightarrow \psi(D_1') = \psi(D_1')$ であり、 ψ は定義から準同型なので $\psi(D_1) = \psi(D_1)$ が成り立つ。従って ψ : $\operatorname{Cl} X \to K(X)$ が定義できる。

(b) 後出の Exercise III.6.8 から、coherent \mathscr{F} は quotient of a locally free sheaf (of finite rank) である。よって locallly free scheme \mathscr{E}_0 が存在し、 $\mathscr{E}_0 \twoheadrightarrow \mathscr{F}$ は全射となる。

$$0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \to \mathcal{F} \to 0$$
 exact

ここで $\mathcal{E}_1=\ker(\mathcal{E}_0 o\mathcal{F})$ は、捩れのない \mathcal{E}_0 の submodule なので locally free である。

Exercise II.5.16(a) より $\wedge^{r_i}\mathscr{E}_i$ は rank 1 かつ locally free なので、 $\wedge^{r_i}\mathscr{E}_i \in \operatorname{Pic} X$, $\det \mathscr{F} = \wedge^{r_0}\mathscr{E}_0 \otimes (\wedge^{r_1}\mathscr{E}_1)^{-1} \in \operatorname{Pic} X$ である。

$$0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \overset{\alpha}{\to} \mathscr{F} \to 0 : \text{exact}, \ 0 \to \mathcal{E}_1' \to \mathcal{E}_0' \overset{\sigma}{\to} \mathscr{F} \to 0 : \text{exact}$$

のとき

$$\wedge^{r_0}\mathscr{E}_0\otimes (\wedge^{r_1}\mathscr{E}_1)^{-1}=\wedge^{r_0'}\mathscr{E}_0'\otimes (\wedge^{r_1'}\mathscr{E}_1')^{-1}$$

となることを示す。

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}'_0 \longrightarrow \mathcal{E}'_0 \longrightarrow 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad$$

ここで、 $\beta:(a,a')\mapsto\alpha(a)+\sigma(a')$ と定義すると、 $\alpha(a)$ の部分が全射なので β も 全射、上図式は可換、2つの行は exact である。

 $\ker \alpha = \mathscr{E}_1, \ \ker 0' = \mathscr{E}_0'$ であり、 $\mathscr{E} := \ker \beta$ とすると、snake lemma から

$$0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_0' \to \operatorname{coker} \alpha = 0 : \operatorname{exact}$$

が得られる。よって

$$\det \mathscr{E}_0' = \det \mathscr{E} \otimes (\det \mathscr{E}_1)^{-1}$$

となる¹⁴ 。同様にして

$$\det \mathscr{E}_0 = \det \mathscr{E} \otimes (\det \mathscr{E}_1')^{-1}$$

も成り立つので、

$$\det \mathscr{E} = \det \mathscr{E}'_0 \otimes \det \mathscr{E}_1 = \det \mathscr{E}_0 \otimes \det \mathscr{E}'_1$$
$$\Rightarrow \det \mathscr{E}_0 \otimes (\det \mathscr{E}_1)^{-1} = \det \mathscr{E}'_0 \otimes (\det \mathscr{E}'_1)^{-1}$$

を得る。

次に

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0 : \operatorname{exact} \Rightarrow \det \mathscr{F} = \det \mathscr{F}' \otimes \det \mathscr{F}'' \tag{21}$$

となることを示す。

$$0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \stackrel{\alpha}{\to} \mathcal{F} \to 0 : \text{exact}$$

これをもとに下図式を作成する。 $\mathcal{E}_0' = \alpha^{-1}(\mathcal{F}')$ とすると 15 、 $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F}$ より、 $\mathcal{E}_0' \hookrightarrow \mathcal{E}_0$ は単射であり、 α が全射ゆえ $\beta = \alpha|_{\mathcal{E}_0'}: \mathcal{E}_0' \twoheadrightarrow \mathcal{F}'$ も全射である。また、ここの部分の可換性は明らかである。

 $^{140 \}rightarrow 0 \rightarrow \mathscr{E} \rightarrow \mathscr{E} \rightarrow 0 \Rightarrow \det \mathscr{E} = \wedge^r \mathscr{E} \otimes \wedge^0 0 = \wedge^r \mathscr{E}$ 1^{5} Sheaf に対して $\alpha^{-1}(\mathscr{F})$ の定義は明確にはなされていないが、明らかである。

 $\mathcal{E}_0'' = \mathcal{E}_0/\mathcal{E}_0'$ とすると $\delta: \mathcal{E}_0/\mathcal{E}_0' \to \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ が自然に定義できる。また α, ν とも全射なので、 δ も全射であり、この部分も可換である。 snake lemma より

$$0 \to \mathcal{E}_1' := \ker \beta \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_1'' := \ker \delta \to 0$$

が得られる。また、

$$0 \to \mathcal{E}_0' \to \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_0'' \to 0$$

$$0 \to \mathscr{E}_1' := \ker \beta \to \mathscr{E}_0' \to \mathscr{F}' \to 0$$

$$0 \to \mathcal{E}_1'' := \ker \delta \to \mathcal{E}_0'' \to \mathcal{F}'' \to 0$$

が成り立つ。

$$\det \mathscr{E}_1 = \det \mathscr{E}_1' \otimes \det \mathscr{E}_1''$$

$$\det \mathscr{E}_0 = \det \mathscr{E}_0' \otimes \det \mathscr{E}_0''$$

$$\det \mathscr{F} = \det \mathscr{E}_0 \otimes (\det \mathscr{E}_1)^{-1}$$

$$\det \mathscr{F}' = \det \mathscr{E}'_0 \otimes (\det \mathscr{E}'_1)^{-1}$$

$$\det \mathscr{F}'' = \det \mathscr{E}_0'' \otimes (\det \mathscr{E}_1'')^{-1}$$

から

$$\det \mathscr{F}' \otimes \det \mathscr{F}'' = \det \mathscr{F}$$

が成立するので

$$\det: K(X) \to \operatorname{Pic} X, \ \sum_{i} n_{i} \gamma(\mathscr{F}_{i}) \mapsto \otimes_{i} (\det \mathscr{F}_{i})^{\otimes n_{i}}$$

が定義できる。

$$D$$
 が effective のとき $0 \to \mathcal{L}(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0$ なので

$$\det \psi(D) = \det \mathcal{O}_D = \det \mathcal{O}_X \otimes (\det \mathcal{L}(-D))^{-1}$$

$$=\mathcal{O}_X\otimes(\mathscr{L}(-D))^{-1}=\mathcal{O}_X\otimes\mathscr{L}(D)=\mathscr{L}(D)$$

となる¹⁶。

一般の
$$D$$
 に対しては、 $D = D_+ - D_-$ とすると、 ψ , det の準同型性から

$$\det(\psi(D)) = \det(\psi(D_{+}) - \psi(D_{-})) = \det\psi(D_{+}) \otimes (\det\psi(D_{-}))^{-1}$$

$$= \mathcal{L}(D_+) \otimes (\mathcal{L}(D_-))^{-1} = \mathcal{L}(D_+ - D_-)$$

 $= \mathcal{L}(D)$

が成り立つ。

(c) まず、 $\mathcal{L}(\exists D)^{\oplus r} \to \mathscr{F}$ を証明する。 (証明) X の生成元 η とすると、 $r:=\mathrm{rank}\,\mathscr{F}$ より $\mathscr{F}_{\eta}=\mathcal{O}_{\eta}^{\oplus r}$ であり、Exercise II.5.7(a) から

$$\mathcal{O}_U^{\oplus r} \stackrel{\sim}{\to} \mathscr{F}|_U, \ \eta \in U, \ \exists U \subseteq X$$

となる。

X-U は有限個の closed point $\{P_i\}_i$ からなり、対応して Weil divisor $D=\sum_i P_i$ 、および Cartier divisor を (U_i,f_i) とする。D が effective なので対応する Cartier divisor も effective、すなわち $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ である (Definition, p.145)。

ここに (U,1) を追加し、 U_i を縮小して P_i を含み他の P_j を含まないようにできる。例えば U_i が P_j を含む場合は、 $U_i \cap P_j^c$ とすればよい。また、 U_i' が affine となるように縮小できる。

このようにしても $(U_i',f_i'),(U,1),\ f_i'=f_i|_{U_i'}$ は Cartier divisor である。 $(::)\ X=\bigcup_i U_i'\cup U$ であり、元々 $f_i/f_j\in\mathcal{O}^*(U_i\cap U_j)$ だったので、 $f_i'/f_j'\in\mathcal{O}^*(U_i'\cap U_j')$ である。また、 $\forall x\in U\cap U_i'$ に対し $v_x(f_i'|_{U\cap U_i'})=0$ ゆえ、次の性質 10 から $f_i'|_{U\cap U_i'}/1=f_i'|_{U\cap U_i'}\in\mathcal{O}^*(U\cap U_i')$ である。 (::)終)

 U_i', f_i' を改めて U_i, f_i とし、 $U_i = \operatorname{Spec} A^i$ とおく。 f_i は A^i において $P_i = V(f_i)$ に対応するもので、 $D(f_i) = U \cap U_i \subseteq U$ となる。実際、 $P := \mathfrak{p} \in D(f_i) \subseteq U_i \Leftrightarrow f_i \not\in \mathfrak{p} \Leftrightarrow v_P(f_i) = 0 \Leftrightarrow P \neq P_i \Leftrightarrow P \in U_i - P_i = U_i \cap U$ である。

 $\mathcal{O}_U^{\oplus r} \overset{\sim}{\to} \mathscr{F}|_U$ より $\mathscr{F}(U)$ は r-tupple section $\oplus_{1 \leq j \leq r} t_j$ から成る。すると、 $t'_j := t_j|_{D(f_i)} \in \mathscr{F}(D(f_i))$ から $f_i^{n_{ij}} t'_j \in \mathscr{F}(U_i)$ に拡張でき (Lemma II.5.3(b))、 $e = \sum_j \max_i n_{ij}$ とすると、 $f_i^e t'_j \in \mathscr{F}(U_i)$ が成り立つ。

$$\mathcal{O}_{U_i}^{\otimes e} f_i^e t_j' \to \mathscr{F}|_{U_i} \otimes \mathcal{O}_{U_i}^{\otimes e} = \mathscr{F}|_{U_i}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{L}(-D)|_{U_i})^{\otimes e}t'_i = \mathcal{L}(-eD)|_{U_i}t'_i \to \mathcal{F}|_{U_i}$$

iについて合わせると

$$\mathscr{L}(-eD)|_{U_i}^{\oplus r} \to \mathscr{F}|_{U_i}$$

を得る

U に関しては既に $\mathcal{L}(-eD)|_U^{\oplus r} = \mathcal{O}_U^{\oplus r} \to \mathcal{F}|_U$ が成立していたので、よって $\mathcal{L}(-eD)^{\oplus r} \to \mathcal{F}$ であり、eD を改めて D とおけば、D は effective で

$$\mathscr{L}(-D)^{\oplus r} \to \mathscr{F}$$

となる。(証明終)

次に、 $\mathcal{L}(-D)^{\oplus r} \to \mathcal{F}$ が単射であることを示す。

(::) $\varphi: \mathcal{O}_X^{\oplus r} \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}(D)$ が成り立つが、この $\ker \varphi$ は捩れのない local free module \mathscr{O} submodule なのでやはり locally free module である。

 $l=\mathrm{rank}\ker \varphi$ として $\mathcal{O}_X^{\oplus r}/\ker \varphi=\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}(D)$ の generic point η での stalk をとると

$$\mathcal{O}_{\eta}^{\oplus r}/(\ker \varphi)_{\eta} = \mathscr{F}_{\eta} \otimes \mathscr{L}(D)_{\eta}$$

$$\Rightarrow k^r/k^l = k^r \otimes_k k = k^r \Rightarrow l = 0$$

よって $\ker \varphi = 0$ となり、 $\varphi: \mathcal{O}_X^{\oplus r} \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}(D)$ は単射である。locally free module は flat なので (性質 11)、 $\mathscr{L}(-D)^{\oplus r} \to \mathscr{F}$ は単射である。(∵終)

$$\mathscr{L}(-D)^{\oplus r} \hookrightarrow \mathscr{F} \not \to \mathscr{F}$$

$$0 \to \mathcal{L}(-D)^{\oplus r} \to \mathscr{F} \to \mathscr{T} \to 0 : \text{ exact}, \ \mathscr{T} = \mathscr{F}/\mathcal{L}(-D)^{\otimes r}$$
 (22)

が得られる。ここで、

$$\operatorname{rank} \mathscr{T} = \dim_K \mathscr{T}_n = \dim_K (\mathscr{F}_n / \mathscr{L}(-D)_n^{\oplus r}) = r - r = 0$$

である。

D の effective 性からの $\psi(D) = \gamma(\mathcal{O}_D)$ 、式 (22) からの $\gamma(\mathscr{F}) = r\gamma(\mathscr{L}(-D)) + \gamma(\mathscr{F})$ 、式 (20) からの $\gamma(\mathcal{O}_X) = \gamma(\mathscr{L}(-D)) + \gamma(\mathcal{O}_D)$ を用いると

$$\gamma(\mathscr{F}) - r\gamma(\mathcal{O}_X) = r\gamma(\mathscr{L}(-D)) + \gamma(\mathscr{T}) - r\gamma(\mathcal{O}_X)$$
$$= r(\gamma(\mathscr{L}(-D)) - \gamma(\mathcal{O}_X)) + \gamma(\mathscr{T}) = -r(\gamma(\mathcal{O}_D)) + \gamma(\mathscr{T})$$
$$= -r\psi(D) + \gamma(\mathscr{T})$$

を得る。この中で第 1 項は明らかに $r\psi(D)\in \mathrm{im}\,\psi$ であるが、第 2 項 $\gamma(\mathcal{T})$ も次に示すように $\mathrm{im}\,\psi$ に属す。

(::) $\eta \notin \operatorname{Supp} \mathscr{T}$ ゆえ $\operatorname{Supp} \mathscr{T} \subsetneq X$ であり (Supp \mathscr{T} は閉集合、Exercise II.5.6)、 $\mathscr{L}(-D)$ は coherent なので coker である \mathscr{T} も coherent、よって Exercise II.6.9 の解答中の性質 9 より $\mathscr{T} = \bigoplus_{P \in \operatorname{Supp} \mathscr{T}} i_P(I_P)$ となり、 $P \in U_i$ に対し

$$I_P = \mathscr{T}_P = \mathscr{F}_P/\mathscr{L}(-D)_P^r = \mathscr{O}_P^r/\mathscr{L}(-D)_P^r = (\mathscr{O}_D)_P^r$$

である。 $(\mathcal{O}_D)_P$ は (a) で示したように $k(P)^{n_P}$ に等しいので、 $\gamma(\mathcal{T})\in \mathrm{im}\,\psi$ となる。(::終)

以上により

$$\gamma(\mathscr{F}) - r\gamma(\mathcal{O}_X) \in \operatorname{im} \psi$$

である。

性質 10. X が normal, noetherian, separated のとき、 $v_Y(f)=0, Y\cap U\neq\emptyset, f\in K^*, \forall Y:$ prime divisor ならば $f\in\mathcal{O}^*(U)$

(証明) $f \in \mathcal{O}(U)$ を示せばよい。なぜなら、もしこれが成立すれば、 $f^{-1} \in K^*, \ v_Y(f^{-1} = -v_Y(f) = 0$ より $f^{-1} \in \mathcal{O}^*(U)$ だからである。

 $Y = \{\eta\}^-$ とし、 $U = \bigcup_i U_i, \ U_i = \operatorname{Spec} A^i, \ \eta \in U_i$ とする。

X は normal なので、 A^i の任意の prime ideal \mathfrak{p}_x に対して、 $A^i_{\mathfrak{p}_x}$: 整閉であり、よって A^i : normal より U_i は p. 130 の (*) を満たす。また $Y\cap U_i=V(\mathfrak{p}_\eta)$ は U_i における prime divisor となる。

 $v_Y(f)=0\Rightarrow v_{Y\cap U_i}(f|_{U_i})=0$ より $f|_{U_i}\in\mathcal{O}_{U_i,\eta}=A^i_{\mathfrak{p}_\eta}$ となるが、 $Y\cap U_i\neq\varnothing$ を満たす Y の全体は A^i における \mathfrak{p} , height(\mathfrak{p}) =1 なる \mathfrak{p} 全体に一致するので

$$f|_{U_i} \in \bigcap_{\text{height}(\mathfrak{p})=1} A^i_{\mathfrak{p}} = A^i = \mathcal{O}(U_i) \Rightarrow f \in \mathcal{O}(U)$$

である。(証明終)

性質 11. rank が一定な locally free module は flat である。

(証明)
$$r = \operatorname{rank}(\mathcal{E})$$
 で

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$$
 exact

とする。すると $\forall x \in X$ に対し

$$0 \to \mathscr{F}_x'^{\oplus r} \to \mathscr{F}_x^{\oplus r} \to \mathscr{F}_x''^{\oplus r} \to 0$$
 exact

であり

$$(\mathscr{F}\otimes\mathscr{E})_x=\mathscr{F}_x\otimes\mathcal{O}_x^{\oplus r}=\mathscr{F}_x^{\oplus r}$$

から

$$0 \to (\mathscr{F}' \otimes \mathscr{E})_x \to (\mathscr{F} \otimes \mathscr{E})_x \to (\mathscr{F}'' \otimes \mathscr{E})_x \to 0$$
 exact

となるので

$$0 \to \mathscr{F}' \otimes \mathscr{E} \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{E} \to \mathscr{F}'' \otimes \mathscr{E} \to 0$$
 exact

が得られる。(証明終)

(d) 次の系列が exact で split していることを示す。

$$0 \to \operatorname{Pic} X = \operatorname{Cl} X \xrightarrow{\psi} K(X) \xrightarrow{\operatorname{rank}} \mathbb{Z} \to 0 : \operatorname{exact}$$
 (23)

Effective D に対して $\psi(D) = 0$ とすると

$$\gamma(\mathcal{O}_D) = \gamma(\mathcal{O}_X/\mathscr{L}(-D)) = 0 \Rightarrow \gamma(\mathcal{O}_X) - \gamma(\mathscr{L}(-D)) = 0 \Rightarrow \mathcal{O}_X = \mathscr{L}(-D)$$

より得られる $\mathcal{O}_{U_i}f_i=\mathcal{O}_{U_i}$ から f_i は unit、従って $v_P(f_i)=0$ \Rightarrow D=0 ゆえ ψ は単射である。

一般の D に対しては、 $D=D_+-D_-$ とすると、 ψ は effective $\mathrm{Pic}\,X$ に対して単射だったので、 $0=\psi(D)=\psi(D_+)-\psi(D_-)\Rightarrow D_+=D_-\Rightarrow D=0$ より ψ は単射である。

Effective D に対して、rank $\psi(D) = \operatorname{rank} \gamma(\mathcal{O}_D) = \operatorname{rank} (\gamma(\mathcal{O}_X/\mathcal{L}(-D))) = 0$ であり、一般の D に対しては、 ψ , rank は準同型なので、 $D = D_+ - D_-$ とすると、 rank $\psi(D) = \operatorname{rank} \psi(D_+) - \operatorname{rank} \psi(D_-) = 0 - 0 = 0$ 、よって im $\psi \subseteq \ker \operatorname{rank} \mathfrak{N}$ 成り立つ。

一方、
$$\operatorname{rank} \mathscr{F} = \dim_K \mathscr{F}_{\eta} = 0$$
 とすると、(c) より

$$\operatorname{im} \psi \ni \gamma(\mathscr{F}) - \operatorname{rank} \mathscr{F} \gamma(\mathcal{O}_X) = \gamma(\mathscr{F})$$

となる。よって、 $\operatorname{im} \psi = \ker \operatorname{rank} \ \operatorname{\mathfrak{C}}$ あり、系列 (23) は exact である。

 $\phi:\mathbb{Z}\to K(X),\ n\mapsto n\gamma(\mathcal{O}_X)$ とすると、rank $\phi=\mathrm{id}_\mathbb{Z}$ なので、系列 (23) は split している。従って、

$$K(X) = \operatorname{Pic} X \oplus \mathbb{Z}$$

が成立する。

2.6.12

Sheaf の deg を次のように定義する。

$$\deg: \operatorname{Coh} X \xrightarrow{\gamma} K(X) \xrightarrow{\det} \operatorname{Pic} X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Cl} X \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

この deg は次に示すように (1), (2), (3) を満たす。

(1) $\mathcal{L}(D)$ に対する deg は

$$\deg: \mathscr{L}(D) \mapsto \gamma(\mathscr{L}(D)) \mapsto \det \mathscr{L}(D) = \mathscr{L}(D) \approx D \mapsto \deg D$$

ゆえ、 $\deg \mathcal{L}(D) = \deg D$ である。

(2)
$$\det \mathcal{F} = \mathcal{L}(D), D = \sum_{P} n_P P \ \xi \ \tau \ \delta \ \xi$$

$$\deg: \mathscr{F} \to \gamma(\mathscr{F}) \to \det(\mathscr{F}) \approx \mathscr{L}(D) \to \deg D = \sum_P n_P$$

$$\Rightarrow \deg \mathscr{F} = \sum_P n_P$$

である。

Dが effective のとき

$$(\mathcal{O}_D)_{\eta} = \mathcal{O}_{\eta}/\mathscr{L}(-D)_{\eta} = \mathcal{O}_{\eta}/(\mathcal{O}_{\eta}f_i) \approx K/K = 0$$

が成り立つ。一般の場合には $D=D_+-D_-$ とかけ、 ψ が準同型なので

$$\psi(D)_n = \psi(D_+)_n - \psi(D_-)_n = \gamma(\mathcal{O}_{D_+})_n - \gamma(\mathcal{O}_{D_-})_n = 0$$

である。また、前問(b)より

$$\det \mathscr{F} = \mathscr{L}(D) = \det \psi(D)$$

なので、 \mathscr{F} , $\psi(D)$ は det, rank とも一致し、前間 (d) の

$$K(X) \stackrel{\sim}{\to} \operatorname{Pic} X \oplus \mathbb{Z}, \ \gamma(\mathscr{F}) \stackrel{\sim}{\mapsto} (\det \mathscr{F}, \operatorname{rank} \mathscr{F})$$

を用いれば、

$$\mathscr{F} = \psi(D)$$

を得る。このとき、

$$\mathscr{F} = \psi(D) = \sum_{P \in Y} \gamma(k(P)^{\oplus n_P}), \ Y = \{P | n_P \neq 0\},\$$

k(P) lå skyscraper \emptyset $\mathring{\lambda}$

$$\mathscr{F}_Q = \begin{cases} k(P)^{\oplus n_P} & : Q = \exists P \in Y \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

から $Q \in \operatorname{Supp} \mathscr{F} \Leftrightarrow Q = \exists P \in Y$ 、すなわち $Y = \operatorname{Supp} \mathscr{F}$ である。すると、

$$\mathscr{F}_P = (\psi(D))_P = k(P)^{\oplus n_P}$$

$$\Rightarrow \operatorname{length} \mathscr{F}_P = \operatorname{length} k(P)^{\oplus n_P} = \dim_k k(P)^{\oplus n_P} = n_P$$

ゆえ、

$$\deg \mathscr{F} = \sum_P n_P = \sum_P \operatorname{length} \mathscr{F}_P$$

が成り立つ。

(3) 完全系列

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$$
: exact

に対して、式 (21) から $\det \mathcal{F} = \det \mathcal{F}' \otimes \det \mathcal{F}''$ が成り立つが、 $\det \mathcal{F} = \mathcal{L}(D)$ 等とすると

$$\mathscr{L}(D) = \mathscr{L}(D') \otimes \mathscr{L}(D'') = \mathscr{L}(D' + D'')$$

$$\Rightarrow D = D' + D'' \Rightarrow \deg(D) = \deg(D') + \deg(D'')$$

$$\Rightarrow \deg \mathscr{F} = \deg \mathscr{F}' + \deg \mathscr{F}'$$

従って、deg は準同型である。

 $(1)\sim(3)$ を満たす deg: Coh $X\to\mathbb{Z}$ の一意性について。

 $(1),\,(2)$ により $\deg\mathcal{L}(D),\,\deg(T),\,T$: torsion sheaf については一意的に決まる。式 $(22)\, \mathcal{O}$

$$0 \to \mathcal{L}(D)^{\oplus r} \to \mathscr{F} \to \mathscr{T} \to 0$$
: exact

と(3)より

$$\deg \mathscr{F} = r \deg \mathscr{L}(D) + \deg \mathscr{T}$$

が成り立つので 17 、 $\deg \mathcal{F}$ も一意的に決まる。

References

- [1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald: Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, 1963
- [2] 河田敬義: ホモロジー代数 I, 岩波, 1976
- [3] Lawrence Washington: Elliptic Curves, Chapman & Hall/CRC, 2003
- [4] 松坂和夫: 代数系入門, 岩波, 1976