2 Schemes

2.6 Divisors

2.6.1

Scheme X が条件 $(*)$、すなわち noetherian integral separated scheme で、codim 1 の $\mathcal{O}_x$ が regular であるとする。このとき $X \times \mathbf{P}^n$ も $(*)$ を満たすことを示す。

(Noetherian) X は有限個の $U_i = \operatorname{Spec} A_i,\ A_i$: noetherian ring でカバーでき (Def. p.83)、$\mathbf{P}^n$ は $D_+(x_j) = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x_0, \cdots, x_n]_{(x_j)},\ j = 0, \cdots, n$ でカバーされるので、$X \times \mathbf{P}^n$ は $\operatorname{Spec} A_i[x_0/x_j, \cdots, x_n/x_j]$ でカバーできる。

A_i は noetherian ゆえ $A_i[x_0/x_j, \cdots, x_n/x_j]$ も noetherian であり ([1], Corollary 7.6)、従って $X \times \mathbf{P}^n$ は noetherian となる。

(Integral) $X,\ \mathbf{P}^n$ の open affine covering を $U_i = \operatorname{Spec} A_i,\ D_+(x_j)$ とすると

$$U_i \times D_+(x_j) = \operatorname{Spec} A_i[x_0/x_j, \cdots, x_n/x_j]$$

は integral なので、次の性質 1 より、$X \times \mathbf{P}^n$ は integral である。

(Separated) $X, \mathbf{P}^n$ は separated なので ($\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 上)、$X \times_{\mathbb{Z}} \mathbf{P}^n$ も separated である (Corollary 4.6, (d))。

(Regular in codimension 1) これは local な性質なので、$X \times \mathbf{P}^n$ をカバーする開集合 $X \times \mathbf{A}^n$ がそれを満たせばよい。Fiber product は結合律を満たし (解答 Exercise II.4.4 の性質 3 に示した)、$\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{n-1} \times \mathbf{A}^1$ なので[1] Proposition 6.6 を用いれば、数学的帰納法より成立する。

次に $\operatorname{Cl}(X \times \mathbf{P}^n) \cong \operatorname{Cl}(X) \times \mathbb{Z}$ を証明する。

まず、$q : X \times \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ を projection morphism とすると、$\eta_0 = (x_0)$ に対し、$Z := q^{-1}(\{\eta_0\}^-) = X \times \{\eta_0\}^-$ は既約であり、codimension が 1 であることを示す[2]。

$$\{\eta_0\}^- = V((x_0)) = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[x_0, \cdots, x_n]/(x_0) = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]$$

$$= \bigcup_j D_+^0(x_j),\ D_+^0(x_j) := \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x_1/x_j, \cdots, x_n/x_j]$$

より

$$X \times \{\eta_0\}^- = \bigcup_j (X \times D_+^0(x_j)) \tag{1}$$

であるが、X の open covering を $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ とすると、

$$U_i \times D_+^0(x_j) = \operatorname{Spec} A_i[x_1/x_j, \cdots, x_n/x_j]$$

[1] 一方 $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^1$ とは限らない。Exercise II.5.11

[2] p.88 では inverse image $p_1^{-1}(U) = U \times Y$ を示すときに U を open としているが、証明を追えば分かるように、U は closed subscheme でも成立する。あるいは、The Stacks project, Definition 26.17.7 より、$f : X \to Y$ のとき、$Z \subseteq Y$ に対し $f^{-1}(Z) = Z \times_Y X$ なので、$p^{-1}(Z) = Z \times_X (X \times_S Y) = Z \times_S Y$ 。

は integral なので、性質 1 から $Z = X \times \{\eta_0\}^-$ は既約となる。

$X \times \mathbf{P}^n$ の非空な open として $\operatorname{Spec} A_i[x_0/x_j, \cdots, x_n/x_j]$ が取れるので、$\dim(X \times \mathbf{P}^n) = \dim X + n$ である。一方、$Z = q^{-1}(\{\eta_0\}^-) = X \times \{\eta_0\}^-$ の非空な open として $U_i \times D_+^0(x_j) = \operatorname{Spec} A_i[x_1/x_j, \cdots, x_n/x_j]$ が取れるので (式 (1))、$\dim Z = \dim X + n - 1$ であり、$\operatorname{codim} Z = 1$ となる。

Proposition 6.5(c) から $\mathbb{Z} \to \operatorname{Cl} X \times \mathbf{P}^n \to \operatorname{Cl}(X \times \mathbf{P}^n - Z) \to 0$ が成立するが、$X \times \mathbf{P}^n - Z = q^{-1}(V((x_0))^c) = X \times D_+(x_0) = X \times \mathbf{A}^n$ であり、Proposition 6.6 を用いれば $\operatorname{Cl}(X \times \mathbf{A}^n) = \operatorname{Cl} X$ となるので

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \operatorname{Cl}(X \times \mathbf{P}^n) \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Cl} X \to 0$$

を得る。

ここで、$i : \mathbb{Z} \to \operatorname{Cl}(X \times \mathbf{P}^n)$ が単射であることを示す。

$D = dZ = (f),\ f \in K(X \times \mathbf{P}^n)$、すなわち $v_Z(f) = d \neq 0,\ v_Y(f) = 0,\ \forall Y \neq Z$ と仮定する。

X が既約なので $\mathscr{K}$ は constant sheaf、ゆえに $\mathscr{K}(U) = K = K(X)$ で

$$K(X \times \mathbf{P}^n) = \operatorname{Frac}(A_i[x_0/x_j, \cdots, x_n/x_j]) = K[x_0, \cdots, x_n]_{((0))}$$

であり、これは $K(x_0, \cdots, x_n)$ において、0 次の斉次有理式からなる部分集合に等しい。従って、$f = (x_0^r g)/h, x_0 \not| g, h,\ gcd(g, h) = 1,\ r + \deg g = \deg h$ とかける。ここで、deg は $x_0, \cdots, x_n$ に関するものである。

$Z = \{\eta\}^- \subseteq X \times \mathbf{P}^n$ とすると、ある i, j に対し $\eta \in U := U_i \times D_+(x_j) = \operatorname{Spec} A_i[x_0, \cdots, x_n]_{(x_j)},\ U_i = \operatorname{Spec} A_i \subseteq X$ であり、$S = A_i[x_0, \cdots, x_n]$ とすると $S_{(x_j)}$ において、$\eta = \mathfrak{p}_{(x_j)} = (x_0)_{(x_j)}$ ゆえ ($\mathfrak{p}$ は S の prime ideal)

$$\mathcal{O}_{X \times \mathbf{P}^n, \eta} = \mathcal{O}_{U, \eta} = (S_{(x_j)})_{\mathfrak{p}_{(x_j)}} = S_{(\mathfrak{p})}$$

となる。

その max ideal は $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_{(\mathfrak{p})} = (x_0)_{((x_0))}$ なので、$f = (x_0^r g)/h$ より $v_{Z \cap U}(f) = r$ である。既に述べたように $v_Z(f) = v_{Z \cap U}(f)$ から、$r = d$、すなわち

$$f = (x_0^d g)/h, x_0 \not| g, h,\ gcd(g, h) = 1,\ d + \deg g = \deg h$$

を得る。$d \neq 0$ ゆえ、g, h のいずれかは既約成分を持ち、対応する prime divisor を Y とすると、$v_Y(f) \neq 0$ となって、仮定に反する。よって、i は単射であり、完全系列

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \operatorname{Cl}(X \times \mathbf{P}^n) \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Cl} X \to 0 \tag{2}$$

が得られる。

次に、この完全系列 (2) が分裂していることを示す。$U := X \times \mathbf{P}^n - Z = X \times \mathbf{A}^n$ とおくと

$$\varphi : \operatorname{Cl}(X \times \mathbf{P}^n) \to \operatorname{Cl} U,\ V \mapsto V \cap U$$

ここで、Y を X の prime divisor とすると、既に述べたように $Y \times \mathbf{P}^n$ は $X \times \mathbf{P}^n$ の prime divisor となり、性質 2 から

$$Y \times \mathbf{P}^n \mapsto (Y \times \mathbf{P}^n) \cap (X \times \mathbf{A}^n) = Y \times \mathbf{A}^n$$

$\mathrm{Cl}\,(X \times \mathbf{A}^n) \approx \mathrm{Cl}\,X$ の対応により Y が $Y \times \mathbf{A}^n$ に対応しているので、

$$\varphi : Y \times \mathbf{P}^n \mapsto Y$$

ここで、

$$\delta : \mathrm{Cl}\,X \to \mathrm{Cl}\,(X \times \mathbf{P}^n),\ Y \to Y \times \mathbf{P}^n$$

とおくと、$\varphi\delta = \mathrm{id}_{\mathrm{Cl}\,X}$ なので、完全系列 (2) は分裂している。

以上により、$\mathrm{Cl}\,(X \times \mathbf{P}^n) = \mathrm{Cl}\,X \times \mathbb{Z}$ が成立する。

性質 **1.** 既約 scheme X, Y の open affine covering を $U_i = \mathrm{Spec}\,A_i$, $V_j = \mathrm{Spec}\,B_j$ とするとき、nilradical $\mathfrak{N}(A_i \otimes B_j)$ が prime ideal ならば $X \times Y$ は既約である。さらに $A_i \otimes B_j$ が整域ならば $X \times Y$ は integral である。

(証明) (i) X が affine scheme の場合

$X = \mathrm{Spec}\,A$, $\mathfrak{N}(A \otimes B_j)$ が prime ideal とする。

$$X \times Y = X \times \bigcup_j V_j = \bigcup_j (X \times V_j) = \bigcup_j \mathrm{Spec}\,(A \otimes B_j)$$

Exercise II.3.15 の解答内の性質 8 を用いて既約性を示す。V_j が open なので $X \times V_j$ は open であり、$X \times V_j = \mathrm{Spec}\,(A \otimes B_j)$ は仮定より $\mathfrak{N}(A \otimes B_j)$ が prime ideal なので既約である (Example 3.0.1)。

Y が既約なので $V_j \cap V_k \neq \varnothing$ から $\iota : \mathrm{Spec}\,B_{jk} \hookrightarrow V_j \cap V_k$ となる B_{jk} が存在し (Exercise II.3.1 の性質 1)、$\mathrm{Spec}\,B_{jk} \neq \varnothing$ である。よって、

$$1 \times \iota : \mathrm{Spec}\,A \times \mathrm{Spec}\,B_{jk} \to \mathrm{Spec}\,A \times (\mathrm{Spec}\,B_j \cap \mathrm{Spec}\,B_k) \tag{3}$$

において $\mathrm{Spec}\,A \times \mathrm{Spec}\,B_{jk} = \mathrm{Spec}\,(A \otimes B_{jk}) \neq \varnothing$ から $\mathrm{Spec}\,A \times (\mathrm{Spec}\,B_j \cap \mathrm{Spec}\,B_k) \neq \varnothing$ となるので、

$$(X \times V_j) \cap (X \times V_k) = \mathrm{Spec}\,A \times (\mathrm{Spec}\,B_j \cap \mathrm{Spec}\,B_k) \neq \varnothing \tag{4}$$

である。よって $X \times Y$ は既約となる。

(ii) X が一般の scheme の場合

$X \times Y = (\bigcup_i U_i) \times Y = \bigcup_i (U_i \times Y)$ において、$U_i \times Y$ は open、かつ (i) より既約である。また $V_j = \mathrm{Spec}\,B_j \overset{\iota'}{\hookrightarrow} Y$ とすると、(i) より $X \times V_j$ は既約ゆえ $(U_i \times V_j) \cap (U_k \times V_j) \neq \varnothing$ である。すると式 (3) と同様に

$$1 \times \iota' : (U_i \cap U_k) \times \mathrm{Spec}\,B_j \to (U_i \cap U_k) \times Y$$

が存在するので、$(U_i \times Y) \cap (U_k \times Y) \neq \varnothing$ を得る。従って、Exercise II.3.15 の性質 8 から $X \times Y$ は既約である。

さらに $A_i \otimes B_j$ が整域ならば $U_i \times V_j$ は integral、よって既約性と合わせて $X \times Y$ は integral となる。(証明終)

性質 **2.** Scheme 系列 $V \hookrightarrow X \to S,\ W \hookrightarrow Y \to S$ に対し

$$V \times_S W = (V \times_S Y) \cap (X \times_S W)$$

が成り立つ。

(証明) Fiber product の U.P. を用いて証明する。

$$\begin{tikzcd}
 & & X \times Y \arrow[ddll, bend right, "p"'] \arrow[ddrr, bend left, "q"] & & \\
 & & (V \times Y) \cap (X \times W) \arrow[u, "\iota"] \arrow[dll, "\alpha"'] \arrow[dl, dotted, "\alpha'"] \arrow[drr, "\beta"] \arrow[dr, dotted, "\beta'"'] & & \\
X \arrow[drr, bend right] & V \arrow[l, "i"] & Z \arrow[l, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[u, dotted, "\theta'"] \arrow[uu, bend right, "\theta"'] \arrow[d] & W \arrow[r, "j"'] & Y \arrow[dll, bend left] \\
 & & S & &
\end{tikzcd}$$

上図において、ι, i, j は実際は inclusion ($\subseteq$) である。

$$p\theta = if,\ q\theta = jg$$

より $p\theta(Z) = f(Z) \subseteq V \Rightarrow \theta(Z) \subseteq p^{-1}(V) = V \times Y$、同様に $\theta(Z) \subseteq X \times W$ なので

$$\theta(Z) \subseteq (V \times Y) \cap (X \times W)$$

従って θ は実質 $\theta' : Z \to (V \times Y) \cap (X \times W)$ である。

$\alpha := p\iota = p|_{(V \times Y) \cap (X \times W)},\ \beta := q\iota = q|_{(V \times Y) \cap (X \times W)}$ とおくと

$$\alpha((V \times Y) \cap (X \times W)) = p((V \times Y) \cap (X \times W)) \subseteq p(V \times Y) \subseteq V$$

$$\Rightarrow \alpha((V \times Y) \cap (X \times W)) \subseteq V$$

なので、α は実質 $\alpha' : (V \times Y) \cap (X \times W) \to V$ に等しい。

よって、$\alpha\theta' = p\iota\theta' = p\theta = if$ から $\alpha'\theta' = f$ となり、同様にして $\beta'\theta' = g$ を得る。

θ' の他に $\delta : Z \to (V \times Y) \cap (X \times W)$ が存在して、$\alpha'\delta = f,\ \beta'\delta = g$ を満たしたとする。すると、$\alpha\delta = if \Rightarrow p\iota\delta = if,\ \beta\delta = jg \Rightarrow q\iota\delta = jg$ となり、θ の一意性から $\iota\delta = \iota\theta'$、よって $\delta = \theta'$ となる。

従って、fiber product の U.P. から $V \times_S W = (V \times_S Y) \cap (X \times_S W)$ が成立する。(証明終)

2.6.2

Variety は既約であり、noetherian, reduced, separated は明らかなので、X は $(*)$ を満たす。

(a) $\mathbf{P}_k^n$ の prime divisor は codim 1 の既約閉なので Exercise I.2.8 より irreducible hypersurface であり、$V = V((f)),\ f \in S = k[x_0, \cdots, x_n],\ f$: irreducible homogeneous polynomial で与えられる。

$V \cap X$ の既約成分を $\{Y_i\}$ とすると、Y_i は X の prime divisor である。Y_i に対し、$Y_i \cap U \neq \varnothing$ となる $\mathbf{P}_k^n$ の open covering の一つが存在するので、それを U_i とおく。以下、ここでは $U_i = D_+(x_i)$ とする。

$V = V((f))$ とすると $V \cap U_i = V((f)_{(x_i)})$ である。なぜなら $V((f)) = \operatorname{Proj} S/(f)$ より、$V \cap U_i$ は V における $D_+(x_i)$、即ち $D_+^V(x_i) = \operatorname{Spec}(S/(f))_{(x_i)} = \operatorname{Spec}(S_{(x_i)}/(f)_{(x_i)} = V((f)_{(x_i)})$ だからである。ここで $f_i = f(x_0/x_i, \cdots, x_n/x_i) = f/x_i^{\deg f}$ とおくと $V \cap U_i = V((f_i)),\ f_i \in K(U_i) = K(\mathbf{P}_k^n) = k[x_0, \cdots, x_n]_{((0))}$ となる。

このとき、$\overline{f_i} = f_i|_{X \cap U_i}$ とすると[3]、$Y_i \cap U_i$ が $X \cap U_i$ の prime divisor ゆえ $v_{Y_i \cap U_i}(\overline{f_i})$ が存在する。

ここで、もし U_i の他に $Y_i \cap U_j \neq \varnothing$ とする。$Y_i = \{\zeta\}^-$ のとき、$\zeta \in Y_i \cap U_i,\ \zeta \in Y_i \cap U_j$ より $\mathcal{O}_{Y_i \cap U_i, \zeta} = \mathcal{O}_{Y_i \cap U_j, \zeta} = \mathcal{O}_{X, \zeta}$ となるので、これらの max ideal $\mathfrak{m}$ は一致する。よって $f_i = f/x_i^{\deg f} \in \mathfrak{m}^r \Leftrightarrow f/x_j^{\deg f} \in \mathfrak{m}^r$ から $v_{Y_i \cap U_i}(\overline{f_i}) = v_{Y_i \cap U_j}(\overline{f_j})$ が得られる。$\overline{f_j} \in K(X \cap U_i) = K(X)$ なので、$v_{Y_i \cap U_j}(\overline{f_j}) = v_{Y_i}(\overline{f_j}) = n_i$ となる。

よって

$$\varphi : \operatorname{Div} \mathbf{P}_k^n \to \operatorname{Div} X,\ V \mapsto V.X$$

が定義できる。

(b) $D = (f),\ f \in K(\mathbf{P}_k^n)$ に対し、$f = \prod_l f_l^{n_l},\ f_l \in k[x_0, \cdots, x_n]$ とする。$D = \sum_l n_l V_l,\ V_l = V(f_l)$ から $D.X = \sum_l n_l(V_l.X)$ である。

X の prime divisor を $\{Z_j\}$ とし、$f_l^i = f_l/x_i^{\deg f_l}$, for $Z_j \cap U_i \neq \varnothing,\ \exists U_i = D_+(x_i)$ とおくと、$V_l \cap U_i = V(f_l^i)$ である。(a) で示したように、$Z_j \cap U_i \neq \varnothing$ ならどの i でもよい。ここで選ばれる i は l に依存するので、その f_l^i をあらためて f_l とおく ($\deg f_l = 0$)。すると

$$V_l.X = \sum_j v_{Z_j}(\overline{f_l}) Z_j$$

となる。実際、$V_l \cap X$ の既約成分は X の prime divisor であり ((a) で示した)、それ以外の X の prime divisor Z_j では $v_{Z_j}(\overline{f_l}) = 0$ となる。なぜなら、もし $v_{Z_j}(\overline{f_l}) > 0$

---

[3] 一般に、Z に対応する prime ideal を $I_Z,\ S(Z) = S/I_Z$ とおく。$Z \xhookrightarrow{i} \mathbf{P}_k^n$ から $Z = \{\eta\}^-$ とすると (η は I_Z に対応)、$i_\eta^\# : \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n, i(\eta)} = S_{(\eta)} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{Z,\eta} = S(Z)_{(\eta)} = (S/I_Z)_{(\eta)} = K(Z)$ が存在し (Exercise 2.18(c))、その拡張として $\varphi : K(\mathbf{P}_k^n) \twoheadrightarrow K(Z)$ が得られる。$f \in K(\mathbf{P}_k^n)$ のとき、$f|_Z$ は $\varphi(f)$ のことである。実際、$z \in Z$ は S/I_Z の prime ideal なので $z \supseteq \eta$ であり、よって f を Z に制限するということは $z \supseteq \eta$ なる z のみを扱うということなので、$\varphi(f)$ に等しい。なお、$i(\eta)$ は S/I_X の prime ideal である η に対する S の prime ideal であり、それは η なので $i(\eta) = \eta$ となる。

とすると、$Z_j \cap U_i \neq 0$ となる U_i に対して、$v_{Z_j}(\overline{f_l}) = v_{Z_j \cap U_i}(\overline{f_l})$ より、U_i において Z_j に対応する prime ideal を $\mathfrak{p}_j$ とすると、$\overline{f_l} \in \mathfrak{p}_j \Rightarrow V_l \cap U_i|_{X \cap U_i} = V(\overline{f_l}) \supseteq V(\mathfrak{p}_j) = Z_j \cap U_i$ となり、Z_j の仮定に反するからである。

よって

$$D.X = \sum_l n_l \sum_j v_{Z_j}(\overline{f_l}) Z_j = \sum_j v_{Z_j}(\prod_l \overline{f_l}^{n_l}) Z_j$$

となるが、$f' = \prod_l \overline{f_l}^{n_l}$ とすると $\deg f' = 0 \Rightarrow f' \in K(\mathbf{P}_k^n)$ より $D.X = (f')$ である。

(c) $S/(I_X + I_V) = (S/I_X)/((I_X + I_V)/I_X) = S(X)/(I_V/(I_V \cap I_X))$ なので、閉集合 Y_j に対応する S の prime ideal を $\mathfrak{p}_j$ とすると、

$$S/(I_X + I_V)_{(\mathfrak{p}_j)} = (S(X))_{(\mathfrak{p}_j)}/(I_V/(I_V \cap I_X))_{(\mathfrak{p}_j)} = S(X)_{(\mathfrak{p}_j)}/(\overline{f}_i)_{(\mathfrak{p}_j)} = \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}_j}/(\overline{f}_i)_{(\mathfrak{p}_j)}$$

が成り立つ。ここで、$I_V = (f)$ であり、脚注 3 から $I_V/(I_V \cap I_X) = (\overline{f})$ なので、$\mathfrak{p}_j \in Y_j \cap U_i \neq \varnothing$ とすると、$\mathfrak{p}_j$ で localize することにより、$(I_V/(I_V \cap I_X))_{(\mathfrak{p}_j)} = (\overline{f})_{(\mathfrak{p}_j)} = ((\overline{f})|_{U_i})_{(\mathfrak{p}_j)} = (\overline{f}_i)_{(\mathfrak{p}_j)}$ となることを用いた。

$i(X, V; Y_j) = \operatorname{length} S/(I_X + I_V)_{(\mathfrak{p}_j)} = \operatorname{length} \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}_j}/(\overline{f}_i)_{(\mathfrak{p}_j)}$ であるが、$\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}_j}$ は次元 1 の regular なので、その ideal は max ideal $\mathfrak{m}_j = \mathfrak{p}_{j(\mathfrak{p}_j)}$ の冪乗となる ([1], Proposition 9.2, (v))。従って、その長さは $\mathfrak{m}_j^0 \supsetneq \mathfrak{m}_j^1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{m}_j^r = (\overline{f}_i)$ となる r、すなわち $v_{Y_j}(\overline{f_i})$ に等しい[4]。

$D = \sum_l n_l V_l,\ V_l = V(f_l),\ f_l \in k[x_0, \cdots, x_n]$ とする。すでに示したことから $V_l.X = \sum_j i(X, V_l; Y_j) Y_j$ なので、Theorem I.7.7 より

$$\deg V_l.X = \sum_j i(X, V_l; Y_j) \deg Y_j = \deg X \cdot \deg V_l$$

となる。従って

$$\deg D.X = \sum_l n_l \deg V_l.X = \sum_l n_l \deg V_l \cdot \deg X = \deg D \cdot \deg X \tag{5}$$

が成り立つ。

(d) $D = (g),\ g \in K(X)$ とする。Closed immersion $i : X \hookrightarrow \mathbf{P}_k^n$ に対する

$$i_x^{\#} : \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n, i(x)} = S_{(\mathfrak{p}_x)} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x} = (S/I_X)_{(\mathfrak{p}_x)} = S(X)_{(\mathfrak{p}_x)}$$

は全射であり、$\varphi : K(\mathbf{P}_k^n) \twoheadrightarrow K(X)$ も全射となる。よって $g = g_1/g_0 \in K(X),\ g_0, g_1 \in S(X)$ に対して、$\varphi(f) = g$ となる $f = f_1/f_0 \in K(\mathbf{P}_k^n),\ f_0, f_1 \in S$ が存在する。

φ は環準同型なので、f と g の既約多項式分解が対応する。すなわち $f = \prod_l f_l^{n_l}$ とすると g の既約多項式分解は $g = \prod_l g_l^{n_l},\ g_l = \varphi(f_l)$ となる。実際、$g_l = g_1 g_2$ とすると、全射性から f_l も可約となってしまう。

[4] $\mathfrak{m}_j = \mathfrak{p}_{j(\mathfrak{p}_j)}$ であるが、実質 $\mathfrak{m}_j = \mathfrak{p}_j$ なので $\mathfrak{m}_j^r = (\overline{f}_i)$ としてよい。

(a) で示したように、f_l の X への像が $\overline{f_l}$ なので、$\overline{f_l} = g_l$ である。よって (b) から

$$(f).X = \sum_l n_l \sum_j v_{Z_j}(\overline{f_l})Z_j = \sum_j v_{Z_j}(\prod_l g_l^{n_l})Z_j = \sum_j v_{Z_j}(g)Z_j = (g) = D$$

が得られる。すると (c) と Proposition 6.4 から

$$\deg D = \deg((f).X) = \deg(f) \cdot \deg X = 0$$

となる。

$\psi : \mathrm{Cl}\,\mathbf{P}_k^n \to \mathrm{Cl}\,X,\ D \mapsto D.X$ とすると、式 (5) は $\deg \circ \psi = (\deg X) \deg$ なのでテキストの可換図式そのものである。

Proposition 6.4(c) から $\deg : \mathrm{Cl}\,\mathbf{P}_k^n \to \mathbb{Z}$ は単射であり、Proposition I.7.6(a) より $\deg X \neq 0$、よって $(\deg X) \deg : \mathrm{Cl}\,\mathbf{P}_k^n \to \mathbb{Z}$ も単射、すると $\deg \circ \psi : \mathrm{Cl}\,\mathbf{P}_k^n \to \mathbb{Z}$ が単射となり、$\psi : \mathrm{Cl}\,\mathbf{P}_k^n \to \mathrm{Cl}\,X$ は単射である。

2.6.3

(a) $P = (0, \cdots, 0, 1) \in \mathbf{P}^{n+1}$ とすると、π は

$$\pi : \mathbf{P}^{n+1} - P \to \mathbf{P}^n,\ (a_0, \cdots, a_n, a_{n+1}) \mapsto (a_0, \cdots, a_n)$$

で与えられる。$\mathbf{P}^n$ のカバー $V_i = D_+(x_i) \approx \mathbf{A}^n$ に対し、$U_i = V \cap V_i$ とおくと

$$\pi^{-1}(U_i) = \{(a_0, \cdots, a_n, a_{n+1}) | (a_0, \cdots, a_n) \in U_i,\ \forall a_{n+1} \in k\}$$

$$\approx \mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^1 = \mathbf{A}^n \times_k \mathbf{A}^1 \approx U_i \times_k \mathbf{A}^1$$

となり、

$$\pi^{-1}(V) = V \times_k \mathbf{A}^1 \tag{6}$$

を得る。

X は k 上ゆえ、$X \supseteq \mathrm{Spec}\,A$ とすると $A \otimes_k k[t] = A[t] = A \otimes \mathbb{Z}[t]$ なので、$X \times \mathbf{A}^1 = X \times_k \mathbf{A_k}^1$ であり、Proposition 6.6 が使えて

$$\mathrm{Cl}\,V \cong \mathrm{Cl}\,(V \times \mathbf{A}^1) = \mathrm{Cl}\,(\pi^{-1}(V)) = \mathrm{Cl}\,(\overline{X} - P) \tag{7}$$

が成立する。ここで、$\dim \overline{X} \geq \dim(U_i \times \mathbf{A}^1) = n + 1 \geq 2$ より $\mathrm{codim}(P, \overline{X}) \geq 2$ なので、Proposition 6.5(b) から $\mathrm{Cl}\,(\overline{X} - P) = \mathrm{Cl}\,\overline{X}$ ゆえ

$$\mathrm{Cl}\,V \cong \mathrm{Cl}\,\overline{X}$$

となる。

なお、V は $(*)$ を満たしているので、式 (7) から $\overline{X} - P$ も $(*)$ を満たす。このとき $\overline{X}$ は regular in codim 1 である。なぜなら、$x \neq P$ なら $O_{\overline{X},x} = O_{\overline{X}-P,x}$ より regular in codim 1 であり、$x = P$ のときは、$O_{\overline{X},x} = O_{\mathbf{P}^{n+1},P} = S_{((x_{n+1}))} \approx$

$k[x_0,\cdots,x_n]$ は整閉ゆえ、$\overline{X}$ も regular in codim 1 となる。その他の条件は明らかなので、$\overline{X}$ は $(*)$ を満たす。

すると、$X=\mathbf{A}^{n+1}\cap\overline{X}$ から X は integral であり (noetherian, separated は明らか)、$\mathcal{O}_{X,x}=\mathcal{O}_{\overline{X},x}$ から regular in codim 1 なので、X も $(*)$ を満たす。$X-P$ も同様である。

(b) $\mathbf{P}^n$ において $V=Z_n(\mathfrak{p})$ とする ($Z_n(\cdot)$ は $\mathbf{P}^n$ における $Z(\cdot)$ のことで、以下では $\mathbf{P}^{n+1}$ における場合は $Z(\cdot)$ と記す)。ここで $\mathfrak{p}$ は $k[x_0,\cdots,x_n]$ の斉次 prime ideal である。このとき、$V\subseteq\overline{X}$ となる V は $V'=Z((\mathfrak{p}^e,x_{n+1})$ のことであり、$\mathbf{P}^{n+1}$ では $\{(a_0,\cdots,a_n,0)|(a_0,\cdots,a_n)\in V\}$ のことである。

$H_{n+1}=Z(x_{n+1})$ とすると、$\overline{X}=Z(\mathfrak{p})$ なので $H_{n+1}\cap\overline{X}=Z((\mathfrak{p}^e,x_{n+1})=V'$ であり、$H_{n+1}.\overline{X}=V'$ となる。なぜなら hyperplane $H_{n+1}=(x_{n+1})$ に対しては $v_{V'}(x_{n+1})=1$ にしかなり得ないからである。

$H=Z_n(g),\ g$:斉次 1 次式 のとき $H'.\overline{X}=\pi^*(V.H),\ H':=\pi^{-1}(H)=Z(g)$ が成り立つ。

($\because$) $V\cap H=\bigcup_i Y_i$ を既約成分分解とすると、Y_i は prime divisor である (Exercise 6.2(a))。

$$V.H=\sum_i n_iY_i,\ n_i=v_{Y_i}(\overline{g}_i),\ g_i=g/x_i^{\deg g},\ \overline{g}_i=g_i|_{V\cap V_i}$$

$$\pi^*(V.H)=\sum_i n_i\pi^{-1}(Y_i)$$

ここで g_i は V_i で local に H を表す equation である。

一方 $H':=\pi^{-1}(H)\not\ni P$ ゆえ

$$\overline{X}\cap H'=(\overline{X}-P)\cap H'=\pi^{-1}(V)\cap\pi^{-1}(H)=\pi^{-1}(V\cap H)$$

$$=\pi^{-1}(\bigcup_i Y_i)=\bigcup_i Z_i,\ Z_i=\pi^{-1}(Y_i)$$

よって $\overline{X}\cap H'=\bigcup_i Z_i$ となる。$Z_i=\pi^{-1}(Y_i)$ は $\overline{X}$ の prime divisor であり、$H'=Z(g)$ から

$$\overline{X}.H'=\sum_i l_iZ_i,\ l_i=v_{Z_i}(\overline{g}_i)$$

ここで g_i は local に H' を表すものにもなっている。

$\pi:Z_i\twoheadrightarrow Y_i$ は全射だから、$Z_i=\{\eta\}^-$ とすると、

$$Y_i=\pi(Z_i)=\pi(\{\eta\}^-)\subseteq\{\pi(\eta)\}^-$$

より $\pi(\eta)$ は生成元であり、$\mathcal{O}_{V,\pi(\eta)}\hookrightarrow\mathcal{O}_{\overline{X},\eta}$ は単射、local homomorphism 性からそれらの max ideal は対応する。従って、$n_i=v_{Y_i}(\overline{g}_i)=v_{Z_i}(\overline{g}_i)=l_i$ が得られる。

以上により $H'.\overline{X}=\pi^*(V.H)$ が成り立つ。(($\because$) 終)

$H'-H_{n+1}=(g/x_{n+1})$ は principal なので $\overline{X}.(H'-H_{n+1})=\overline{X}.H'-\overline{X}.H_{n+1}=\pi^*(V.H)-V'$ も principal であり (Exercise II.6.2(b))、$\mathrm{Cl}\,\overline{X}$ において

$$\pi^*(V.H)=V'$$

が成り立つ。

Proposition 6.5(c) より exact 系列

$$\mathbb{Z}\xrightarrow{\iota}\mathrm{Cl}\,\overline{X}\to\mathrm{Cl}(\overline{X}-V)\to 0,\ 1\overset{\iota}{\mapsto}V'$$

が得られる。ここで ι は単射である。なぜなら、もし nV が principal とするとその deg は 0 となるので (Corollary 6.10)、$\deg nV=n\deg V=0$ となるが、Proposition I.7.6(a) より $\deg V\neq 0$ なので $n=0$ だからである。

$$\overline{X}=\pi^{-1}(V)\cup P=\{(a_0,\cdots,a_n,a_{n+1})|(a_0,\cdots,a_n)\in V,\ a_{n+1}\in k\}\cup P$$

$$\overline{X}-V'=\{(a_0,\cdots,a_n,a_{n+1})|(a_0,\cdots,a_n)\in V,\ a_{n+1}\neq 0\in k\}\cup P$$

$\{(a_0,\cdots,a_n)\}$ は $\mathbf{A}^{n+1}$ を $\mathbf{P}^{n+1}$ の $D_+(x_{n+1})$ とみなしたときの ($n+1$ 成分は非零)、0 を含めた $Z^A(\mathfrak{p})=C(V)=X$ に等しい ($Z^A(\cdot)$ は $\mathbf{A}^{n+1}$ での $Z(\cdot)$ のこと)。

以上から上記 exact 系列は

$$0\to\mathbb{Z}\overset{\iota}{\hookrightarrow}\mathrm{Cl}\,\overline{X}\to\mathrm{Cl}\,X\to 0,\ 1\overset{\iota}{\mapsto}V'$$

となる。ここで $\mathrm{Cl}\,\overline{X}\approx\mathrm{Cl}\,(\overline{X}-P)$(Proposition 6.5(b)) と $\pi^*:\mathrm{Cl}\,V\xrightarrow{\sim}\mathrm{Cl}\,(\overline{X}-P)$((a) で示した) から $\mathrm{Cl}\,V\approx\mathrm{Cl}\,\overline{X}$ が得られるが、すでに述べたように $\pi^*(V.H)$ と V' は linearly equivalent なので、$\mathrm{Cl}\,\overline{X}$ における V' は $\mathrm{Cl}\,V$ における $V.H$ に相当する。なお、Proposition 6.5(b) の証明にあるように $\mathrm{Cl}\,\overline{X}$ と $\mathrm{Cl}(\overline{X}-P)$ は同じなので、$\pi^*(V.H)$ は $\mathrm{Cl}\,\overline{X}$ の元と考えてよい。以上により exact 系列

$$0\to\mathbb{Z}\overset{\iota}{\hookrightarrow}\mathrm{Cl}\,V\xrightarrow{\delta}\mathrm{Cl}\,X\to 0,\ 1\overset{\iota}{\mapsto}V.H \tag{8}$$

が得られる。

この式を書き直すと

$$0\to\mathbb{Z}\overset{\iota}{\hookrightarrow}\mathrm{Cl}\,V\overset{\pi^*}{\approx}\mathrm{Cl}\,(\overline{X}-P)\to\mathrm{Cl}\,X\to 0,\ 1\overset{\iota}{\mapsto}V.H$$

となるが、$\mathrm{Cl}(\overline{X}-P)=\mathrm{Cl}\,\overline{X}$ であり、また $\mathrm{Cl}(\overline{X}-V)=\mathrm{Cl}(\overline{X}-V-P)=\mathrm{Cl}(X-P)$ より

$$\mathrm{Cl}(\overline{X}-P)=\mathrm{Cl}\,\overline{X}\xrightarrow{\beta}\mathrm{Cl}(\overline{X}-V)=\mathrm{Cl}(\overline{X}-V-P)=\mathrm{Cl}(X-P)\overset{\gamma}{\approx}\mathrm{Cl}\,X$$

を得る。ここで

$$\beta:\mathrm{Cl}(\overline{X}-P)\to\mathrm{Cl}(X-P)\ \Leftarrow\text{restriction to }X-P$$

$$\gamma:\mathrm{Cl}(X-P)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Cl}\,X\ \Leftarrow\text{inclusion in }X$$

とみれば、$\delta = \gamma\beta\pi^*$ となる。

(c) $S(V)$: ufd とする。

このとき $S(V)$ は整閉ゆえ ([1], p.63 上)、projectively normal である。また、X を $\mathbf{A}^{n+1}$ における affine variety とみなすと、そこでも $S(V)$ は ufd なので、Proposition 6.2 より $\mathrm{Cl}\, X = 0$ が得られる。よって式 (8) は

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathrm{Cl}\, V \to 0,\ 1 \overset{\iota}{\mapsto} V.H$$

となり、ι は isomorphism である。さらに $\mathrm{im}\,\iota = \mathrm{Cl}\, V$ なので、$\mathrm{Cl}\, V$ は $\mathbb{Z}$ 上 $V.H$ で生成される。

逆を証明する。

$$0 \to \mathbb{Z} \overset{\alpha}{\hookrightarrow} \mathrm{Cl}\, V \to \mathrm{Cl}\, X \to 0$$

において α が isomorphism なので $\mathrm{Cl}\, X = 0$ である。また、V が projectively normal なので $S(V)$ は整閉、よって $S(V)_x = \mathcal{O}_x,\ x \in V$ も整閉となり $X = \mathrm{Spec}\, S(V)$ は normal である。従って Propositioin 6.2 から、$S(V)$ は ufd である。

(d) $\mathbf{P}^n$ における V の homogeneous coordinate ring を $S(V) = S/I$ としたとき、$S(V)$ は $\mathbf{A}^{n+1}$ における X の coordinate ring と見られる。

$$\alpha : S(V) \to S(V)_{\mathfrak{m}},\ \mathfrak{m} = (x_0, \cdots, x_n) \sim P = (0, \cdots, 0)$$

高さ 1 の prime ideal $\mathfrak{p}$ は α により

$$\mathfrak{p} \to \begin{cases} \mathfrak{p}\ ; & \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m} \\ (1); & \mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{m} \end{cases}$$

と写り、$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ の場合、高さは 1 のままである。

$$\beta : \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_P \to X,\ \alpha = \beta^{\#}(X)$$

$$\beta^* : \mathrm{Cl}\, X \to \mathrm{Cl}(\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_P)$$
$$Y \mapsto \beta^{-1}(Y)$$

が定義できることを示す。まず、

$$\beta^* : \mathrm{Div}\, X \to \mathrm{Div}(\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_P)$$

が成り立つのは (便宜上同じ記号 β^* を用いる)、prime divisor $Y = Z(\mathfrak{p}) \ni 0$ なら $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ なので ($Y \ni 0 \Leftrightarrow \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$)、

$$\beta^{-1}(Y) \overset{Prop.2.3}{=} Z(\alpha(\mathfrak{p})) = Z(\mathfrak{p}) = Y$$

は closed, integral, codim 1 であり、また $Y \not\ni 0$ なら

$$\beta^{-1}(Y) = Z(\alpha(\mathfrak{p})) = Z(S(V)_{\mathfrak{m}}) = \varnothing$$

だからである。

Principal divisor が principal divisor に写るのは、次の通り。

$$\beta^*((f)) = \sum_i v_{Y_i}(f)\beta^{-1}(Y_i) = \sum_{Y_i \ni 0} v_{Y_i}(f)Y_i,\ f \in K(X) = K(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_P)$$

において、$\operatorname{Spec}\mathcal{O}_P$ の prime divisor Y は $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ に対応しており、それは X における prime divisor $Y_i \ni 0$ と一対一対応している。よって、$\sum_{Y_i \ni 0} v_{Y_i}(f)Y_i = \sum_Y v_Y(f)Y = (f) \in \operatorname{Div}(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_P)$ が成り立つ。またこの一対一対応から、$\beta^*|_{\mathcal{D}}$ は全単射である。ここで $\mathcal{D} \subseteq \operatorname{Div} X$ は $\{Y | Y \ni 0\}$ から生成される部分集合である。

従って、$Y \not\ni 0$ となる X の prime divisor は principal divisor であることを示せば証明は終わる。

$\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{m}$ とすると、非零定数項を持つ既約多項式 $f \in \mathfrak{p}$ が存在する。$S(V) = S/I$ とすると $I:$ prime ideal, $I \subset \mathfrak{m}$ に対し $f \notin I$ ゆえ、$fg \in I \Rightarrow g \in I$ から、この f は非零因子であり、非冪零元でもある。よって、クルルの単項イデアル定理より $\operatorname{height}((f)) = 1$ となる。$(f) \subseteq \mathfrak{p},\ \operatorname{height}(\mathfrak{p}) = 1$ から $\mathfrak{p} = (f)$、よって divisor として $Y = (f)$、principal divisor である[5]。

2.6.4

$B = k[x_1, \cdots, x_n],\ C = k(x_1, \cdots, x_n)$ とおくと、$A = B[z]/I,\ K = \operatorname{Frac}(A) \overset{\$}{=} C[z]/I,\ I = (z^2 - f)$ となる。$\overset{\$}{=}$ は、K において $\frac{1}{g_0 + g_1 z} = \frac{g_0 - g_1 z}{g_0^2 - g_1^2 f}$ が成り立つことによる。

K の自己同型 $\sigma : z \mapsto -z$ の固定体は C であり、また K は C 上有限拡大体なので、C の正規拡大体 (Galois 拡大体) となる。

K の元を $\alpha = g + hz,\ g, h \in C$ とすると、$(\alpha - g)^2 = h^2 z^2 = h^2 f$ から α は

$$F(X) = X^2 - 2gX + g^2 - h^2 f$$

の解である。α の最小多項式が 1 次式ではあり得ないので、$F(X)$ は最小多項式となる。

$\overline{\alpha} = g - hz$ と定義すると、これは $F(X)$ の共役解となり、解と係数の関係から $\alpha + \overline{\alpha} = 2g,\ \alpha\overline{\alpha} = g^2 - h^2 f$ を得る。

このとき、次式が成立する。

$$\alpha : \text{integral over } B \overset{\%}{\Leftrightarrow} g, h \in B \Leftrightarrow \alpha \in A$$

$(\because)$ $(\overset{\%}{\Rightarrow})$ α が B 上整なので、その共役 $\overline{\alpha}$ も B 上整である。よって $\alpha + \overline{\alpha} = 2g,\ \alpha\overline{\alpha} = g^2 - h^2 f$ も B 上整となる ([1], Corollary 5.3)。$g, h \in C \Rightarrow 2g, g^2 - h^2 f \in C$ で、B は整閉 (C において整閉) ゆえ、$g, g^2 - h^2 f \in B \Rightarrow h^2 f \in B$ が得られる。

$h = \beta/\gamma,\ \gcd(\beta, \gamma) = 1,\ \beta, \gamma \in B$ において $\gamma \notin k$ とすると、$\beta^2 f/\gamma^2 \in B$ から f は γ^2 で割り切れてしまい、f の仮定に反する。よって $\gamma \in k \Rightarrow h \in B$ である。$(\overset{\%}{\Leftarrow})$ は明らか。

[5] $v_Y(f) = 1$ は明らか。$v_Z(f) \neq 0$ のとき $v_Z(f) > 0$ と仮定してよく、$f \in \eta,\ Z = \{\eta\}^- \Rightarrow (f) \subseteq \eta \Rightarrow Z((f)) \supseteq Z$ から、両者の dim が等しいので、$Z = Y$ となる。

従って $A = \tilde{B}$(K における B の整閉包) である。($\because$ 終)
$\tilde{B}$ は整閉なので ([1], Corollary 5.5)、A も整閉となる。

2.6.5

(a) $r \geq 2$ のとき、Exercise I.5.12(b) から $f = -x_1^2 - \cdots - x_r^2$ は既約多項式、よって square free である。Exercise 6.4 より

$$A = k[x_0, x_1, \cdots, x_r]/(x_0^2 - f) = k[x_0, x_1, \cdots, x_r]/(x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_r^2)$$

は整閉なので、local 性から $\mathcal{O}_x = A_x$ も整閉である。従って、$X = \operatorname{Spec} A$ は normal となり $(*)$ を満たす。また X に対応する $V \subseteq \mathbf{P}^n$ も $(*)$ を満たす (A_x が整閉だから)。

(b) k は代数的閉体とする。$x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_r^2 = 0$ において、$u = ix_0 + x_1,\ v = ix_0 - x_1$ とおけば $uv = -x_0^2 - x_1^2$ となるので、そこで改めて u, v を x_0, x_1 とおけば

$$x_0 x_1 = x_2^2 + \cdots + x_r^2 \tag{9}$$

となる。

(1) $r = 2$: $X' = \operatorname{Spec} k[x_0, x_1, x_2]/I,\ I = (x_0 x_1 - x_2^2)$ とすると、Example 6.5.2 から $\operatorname{Cl} X' \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。ここで、$X' \times_k \mathbf{A}^{n-2} = \operatorname{Spec}(k[x_0, x_1, x_2]/I \otimes k[x_3, \cdots, x_n]) = \operatorname{Spec} k[x_0, x_1, \cdots, x_n]/I = X$ から、Proposition 6.6 より $\operatorname{Cl} X = \operatorname{Cl} X' = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を得る。

(2) $r = 3$: $x_0 x_1 = x_2^2 + x_3^2$ において x_2, x_3 に対しても式 (9) と同様な変換を施すと、$x_0 x_1 = x_2 x_3$ は $\mathbf{P}^3$ の quadric surface V を与える。

その cone を X' とすると (Exercise II.6.3)、それは $\mathbf{A}^4$ における quadric surface となり、対応する多項式は同じ $x_0 x_1 = x_2 x_3$ である。

Example 6.6.1 から $\operatorname{Cl} V = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ であり、Exercise II.6.3(b) の式 (8) は

$$0 \to \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \operatorname{Cl} X' \to 0$$

となる。従って準同型定理から $\operatorname{Cl} X' = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ を得る。

前記 (1) で述べたように $\operatorname{Cl} X = \operatorname{Cl} X'$ なので、$\operatorname{Cl} X = \mathbb{Z}$ である。

(3) $r \geq 4$: X における $V(x_0)$ を $Z = V^X(x_0) = V(x_0) \cap X = V(x_0, x_0 x_1 + x_2^2 + \cdots + x_r^2)$ とすると Z は integral である。なぜなら、

$$k[x_0, x_1, \cdots, x_n]/(x_0, x_0 x_1 + x_2^2 + \cdots + x_r^2) = k[x_1, \cdots, x_n]/(x_2^2 + \cdots + x_r^2)$$

において、$x_2^2 + \cdots + x_r^2$ が既約多項式だからである (Exercise I.5.12(b))。

よって Z は prime divisor である。また Z は principal divisor となるが、それは脚注 (5) による。

Proposition 6.5(c) から

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Cl} X \to \operatorname{Cl}(X - Z) \to 0,\ \alpha : 1 \mapsto 1 \cdot Z$$

が成立するが、Z が principal divisor なので、$\alpha = 0$ である。ここで、$\mathrm{Cl}\,(X-Z) = 0$ が成り立つ。

$(\because)$ $X - Z = V^X(x_0)^c = D(x_0) = \mathrm{Spec}\,A_{x_0}$ より

$$
\begin{aligned}
A_{x_0} &= k[x_0, x_1, \cdots, x_n]_{x_0}/(x_0x_1 + x_2^2 + \cdots + x_r^2)_{x_0} \\
&= k[x_0, x_0^{-1}, x_1, \cdots, x_n]/(x_1 + (x_2^2 + \cdots + x_r^2)/x_0) \\
&\approx k[x_0, x_0^{-1}, x_2, \cdots, x_n]
\end{aligned}
$$

となるが、$k[x_0, x_0^{-1}, x_2, \cdots, x_n]$ は ufd なので、Proposition 6.2 より $\mathrm{Cl}\,(X-Z) = 0$ である。$(\because$ 終$)$

以上により α が全射となるので、$\mathrm{Cl}\,X = 0$ を得る。

(c)

(1) $r = 2$: $Q = V((g)),\ g = x_0x_1 - x_2^2$ とおくと、(b)(1) の $\mathrm{Cl}\,X = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ から、式 (8) は

$$
0 \to \mathbb{Z} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathrm{Cl}\,Q \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0,\ 1 \overset{\iota}{\mapsto} Q.H \tag{10}
$$

となる。

ネーター空間の既約成分は有限個なので ([1], Exercise 6.7)、$\mathrm{Cl}\,Q$ は有限型であり、よって有限型加法群の構造定理から $\mathrm{Cl}\,Q = \mathbb{Z}^s \oplus T,\ T$: torsion、と書けるが ([4], 第 4 章定理 15)、ここでは $s = 1$ である。

実際、次の完全系列

$$
0 \to \mathbb{Z} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{Z}^s \oplus T \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0
$$

の右側から $\mathbb{Q}$ を tensor すると、tensor は右完全なので

$$
\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^s \oplus (T \otimes \mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} \to 0
$$

を得るが、$\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q}$ の任意の元は $a \otimes b = la \otimes b/l$ となるので、$\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} = 0$、よって $T \otimes \mathbb{Q} = 0,\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} = 0$ から[6]、

$$
\mathbb{Q} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}^s \to 0
$$

が成立する。一方、体からの morphism は常に injective なので、$\mathbb{Q} \approx \mathbb{Q}^s$、よって $s = 1$ となる ([1], Exercise 2.11)。

$$
0 \to \mathbb{Z} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \oplus T \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0,\ 1 \overset{\iota}{\mapsto} Q.H \tag{11}
$$

$H = V((x_2))$ とすると、$Q \cap H = Y_0 \cup Y_1,\ Y_i = V((x_i, x_2)), i = 0, 1$ であり、$v_{Y_i}(x_2') = 1$ より $Q.H = Y_0 + Y_1$ となる (x_2' は x_2 を $Y_i \cap U \neq \varnothing$ となる U で制限したもの)。

$Y_1 = V((x_1, x_2))$ より $v_{Y_1}(x_1/x_0) = 1$ であり、同様に $v_{Y_0}(x_1/x_0) = -1$ となるから $(x_1/x_0) = \sum_i v_{Y_i}(x_1/x_0)Y_i = Y_1 - Y_0 \Rightarrow Y_1 \sim Y_0$ であり、$Q.H = Y_0 + Y_1 = Y_0 + Y_0 = 2Y_0 = 2Y_1$ を得る。

[6] torsion T の元は有限位数を持つので $(la = 0,\ \exists l \neq 0)$、$T \otimes \mathbb{Q} = 0$ である。

式 (11) の右から $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, (p: 素数) を tensor すると、$p \neq 2$ のとき、[1], Exercise 2.1 から

$$\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \oplus (T \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \overset{\iota'}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus (T \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to 0$$

より ι' は全射となる。一方、$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は体なので ι' は単射でもある。よって、$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus (T \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ から $T \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 0$ を得る。

T は $\mathbb{Z}/q^e\mathbb{Z},\ e > 0$ の形の集まりなので ([4], 第 4 章定理 15)、T に $\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$ があれば、[1], Exercise 2.2 より

$$(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}) \otimes (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/(p^e(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/0 = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \tag{12}$$

となり、$T \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は非零になってしまう。

従って、T が非零とすれば、$\mathbb{Z}/2^e\mathbb{Z}$ のみが存在しており、このとき式 (11) に右から $\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ をとると、式 (12) と同様 $(\mathbb{Z}/2^e\mathbb{Z}) \otimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ なので、次の exact 系列を得る。

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \overset{\iota"}{\to} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \overset{\sigma}{\to} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

式 (11) において、$1 \mapsto Q.H = 2Y_0$ であったが、$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と tensor を取ると 0 となるので、$\mathrm{im}\iota" = 0$ である。すると、$\ker\sigma = 0$ から σ は単射となり、全射でもあるので、同型になる:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \overset{\sigma}{\approx} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

これは矛盾なので、$T = 0$ であり、$\mathrm{Cl}\,Q = \mathbb{Z}$ を得る。

下図式に示す通り、左下の $\mathbb{Z}$ から右下 $\mathbb{Z}$ への写像は下の写像に等しいので、$1 \approx H \mapsto Q.H \approx 2$ となり、単位元 ($\mathbb{Z}$ の単位元 1 に対応する $\mathrm{Cl}\,Q$ の単位元) の 2 倍になっている。$Q.H = 2Y_0$ だったので、$\mathrm{Cl}\,Q$ の単位元は $Y_0(= Y_1)$ である。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cl}\,\mathbf{P^n} \arrow[r, "H \mapsto Q.H"'] \arrow[d, "\approx"'] & \mathrm{Cl}\,Q \arrow[d, "\approx"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "1 \mapsto \deg Q = 2"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

(2) $r = 3$: n に関する数学的帰納法で証明する。

$n = r$ の場合、Example 6.6.1 より $\mathrm{Cl}\,Q = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である。

$\mathbf{P}^n$ に対して $\mathrm{Cl}\,Q' = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ とする。$\mathbf{P}^{n+1}$ における $Q = V((f))$ は Exercise 6.3 における $\overline{X}$ に相当する: $Q = \overline{X}$

$$\overline{X} - P = \pi^{-1}(Q') \overset{\text{Eq.(6)}}{=} Q' \times \mathbf{A}^1$$

より

$$\mathrm{Cl}\,Q = \mathrm{Cl}\,\overline{X} \overset{\text{Prop.6.5(b)}}{=} \mathrm{Cl}\,(\overline{X} - P) = \mathrm{Cl}\,(Q' \times \mathbf{A}^1) = \mathrm{Cl}\,Q' = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

を得る。

(3) $r \geq 4$: 式 (8) において、(b)(3) の $\mathrm{Cl}\, X = 0$ から

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathrm{Cl}\, Q \to 0,\ 1 \overset{\iota}{\mapsto} Q.H$$

より $\mathbb{Z} \approx \mathrm{Cl}\, Q$ なので、$\mathbb{Z}$ の単位元 1 の像は $\mathrm{Cl}\, Q$ の単位元となり、$\mathrm{Cl}\, Q$ は $Q.H$ で生成される。

(d)

$Q = V((f))$ における codim 1 の既約 subvariety を $Y = V(\mathfrak{p})$ とする。

$S(Q) = k[x_0, \cdots, x_n]/(f)$ は projectively normal ($S(Q)$ が整閉) で、今示した (3) から $\mathrm{Cl}\, Q \approx \mathbb{Z}$ は $Q.H$ で生成されるので、Exercise II.6.3(c) より、$S(Q)$ は ufd である。

すると、Proposition I.1.12A から高さ 1 の prime ideal は principal となる ($S(Q)$ にて)。従って、$k[x_0, \cdots, x_n]$ においては $\mathfrak{p} = (g, f),\ g$: irreducible とかけ、complete intersection である。

ここで $V = V((g))$ とおくと $Y = V((g, f)) = V((g)) \cap V((f)) = V \cap Q$ となり、Y は Q の prime divisor で

$$V.Q = v_Y(g) Y$$

を満たす。

このとき、$i(Q, V; Y) = v_Y(g) = 1$ である。なぜなら、$Y = \{\mathfrak{p}\}^-$ に対して $\mathcal{O}_{Q,\mathfrak{p}} = S(Q)_\mathfrak{p}$ の極大 ideal は $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}/(f)$ であり、$r = v_Y(g)$ は $(g) = \mathfrak{m}^r = ((g, f)/(f))^r$ を満たす r ゆえ、$r = 1$ だからである。なお、complete intersection なら同様にして multiplicity は 1 となる。

2.6.6

(a) Example 6.10.2 より

$$\mathrm{Cl}^\circ X \approx X^V := \{\text{group variety of X}\}$$

である。これには二つの意味があり、(i) $\deg D = 0$ の divisor には X^V の元 (closed point) が対応する、(ii) principal divisor は X^V の零点 $0 := P_0$ が対応する。

従って、$\mathrm{Cl}^\circ X$ に属する $\mathrm{Cl}^\circ X \ni P+Q+R-3P_0 \mapsto P+Q+R-3\cdot 0 = P+Q+R$ であり、P, Q, R : collinear $\Leftrightarrow (l/z) = P + Q + R - 3P_0 \Leftrightarrow P + Q + R - 3 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow P + Q + R = 0$ が成り立つ。

(b) $P \neq P_0$ とする。P における tangent line $L = V((l))$ が P_0 を通るとき、その principal divisor は $(l/z) = P + P + P_0 - 3P_0$ である。(a) より、$(l/z) = P + P + P_0 - 3P_0 \Leftrightarrow P + P = 2 \cdot 0 \Leftrightarrow 2P = 0 \Leftrightarrow \mathrm{order}\,(P) = 2$

(c) 任意の line $L = V((l))$ に対し、$\deg L.Y = \deg L \deg Y = 3$ より、$\sum_P i(L, Y; P) = 3$ である。このとき、

$$3P = 0 \Leftrightarrow 3P - 3P_0 = (l/z) \Leftrightarrow i(L, X; P) = v_P(l/z) = 3$$

より、$\mathrm{order}\,(P) = 3 \Leftrightarrow P$: inflection point である。

(d) 座標成分が $\mathbf{Q}$ に属す X^V の点の集合を $E(\mathbf{Q})$ とする。

$P_0=(0,1,0)\in E(\mathbf{Q})$ であり、$P,Q\in E(\mathbf{Q})$ に対し、それらを通る直線 L と X の交点を P,Q,R とすると、L を与える式 $ax+by+cz=0$ の係数は $\mathbf{Q}$ に属すので、$ax+by+cz=0,\ y^2z-x^3+xz^2=0$ の解としての R の座標成分は、解と係数の関係から $\mathbf{Q}$ に属し、よって $R\in E(\mathbf{Q})$ となる。R の具体的な求め方は省略するが、例えば [3], 2.2 The Group Law を参照のこと。

Mordell-Weil Theorem([3], Theorem 8.17) より $E(\mathbf{Q})$ は有限生成加法群であるが、特に本問のケースでは次の通りである。

$$E(\mathbf{Q})=\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,1),(-1,0,1)\}$$

($\because$) 次に示す性質 4 から、$y^2z=x^3-xz^2\Rightarrow 4x^4+y^4=(2xz+y^2)^2$ を満たす有理数 x,y,z において、x,y のいずれかは 0 である。よって、$E(\mathbf{Q})$ は上記 4 点だけになる。

$P_1=(0,0,1),P_2=(1,0,1),P_3=(-1,0,1)$ とすると $x=0,x=z,x=-z$ がそれぞれ P_1,P_2,P_3 を通り、かつ、例えば line $x=0$ は P_1,P_0 を通り $v_{P_1}(x)=2$ なので[7]、(b) より P_1 の位数は 2 である (楕円曲線での計算でも導出できる)。$P_2=(1,0,1),P_3=(-1,0,1)$ についても同様である。すると、$P_1+P_2=P_3$ となる。

従って $E(\mathbf{Q})=\{P_0,P_1\}\times\{P_0,P_2\}\approx\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。($\because$ 終)

以下 2 つの性質は https://math.stackexchange.com/questions/1786448/rational-solutions-of-y2-x3-x を参考にした。

性質 3. 非零整数 x,y,z が

$$x^2+y^2=z^2,\ \gcd(x,y)=1$$

を満たすとする。このとき、x,y の一方は奇数で他方は偶数であり、x を偶数とすると、x,y,z は整数 a,b,c より

$$x=2ab,\ y=b^2-a^2,\ z=a^2+b^2,\ 0<a<b,\ \gcd(a,b)=1,\ y,a+b:\text{odd}$$

とかける。

(証明) 偶数 x を $x=2k$ とおく。y,z はともに奇数であり、

$$4k^2=z^2-y^2\Rightarrow k^2=\frac{z+y}{2}\frac{z-y}{2}$$

ここで、y,z は coprime なので $\frac{z+y}{2},\frac{z-y}{2}$ も coprime、よって $\frac{z+y}{2},\frac{z-y}{2}$ とも平方数となり $\frac{z-y}{2}=a^2,\frac{z+y}{2}=b^2$ とおける。よって

$$x=2ab,\ y=b^2-a^2,\ z=a^2+b^2,\ 0<a<b,\ \gcd(a,b)=1,\ a+b:\text{odd number}$$

となる。(証明終)

[7] $H=V((x))$ とすると $\mathcal{O}_{P_1}$ の max ideal $\mathfrak{m}=(x,y)$ に対し、$x\in\mathfrak{m}^2=(x^2,xy,y^2)=(x^2,xy,x)=(x)$ であり、$x\notin\mathfrak{m}^r,\ r\geq 3$ なので、$v_P(x)=2$ が得られる。

性質 **4.** $x^4+4y^4=z^2$ を満たす有理数 x,y,z は $xy=0$ を満たす。

(証明) まず、$x^4+4y^4=z^2$ を満たす非零整数 x,y,z が存在しないことを示す。仮に、存在したとしよう。このとき、$p^4+4q^4=r^2,\ 0<r<z$ となる非零整数 p,q,r が存在することを示す (Fermat's method of decent)。これが示されれば、結局 $r=1$ となり、矛盾をきたすことになる。

x,y が coprime でないとすると、その公約数 d で z が割り切れるので $r=z/d$ とすればよい。x,y が coprime のとき、$(x^2)^2+(2y^2)^2=z^2$ から性質 3 より

$$2y^2=2ab,\ x^2=b^2-a^2,\ z=a^2+b^2,\ 0<a<b,\ \gcd(a,b)=1,\ x:\mathrm{odd}$$

となる。a,b が coprime なので、$y^2=ab$ から $a=c^2, b=d^2,\ \gcd(c,d)=1$ とかけ、$x^2=d^4-c^4 \Rightarrow x^2+c^4=d^4$ を得る。$x^2+(c^2)^2=(d^2)^2$、x: odd より、性質 3 から

$$c^2=2ef,\ x=f^2-e^2,\ d^2=e^2+f^2,\ \gcd(e,f)=1$$

となる。e,f が coprime なので $c^2=2ef$ より e,f の片方が平方数、残りが平方数の 2 倍となる。よってそれらを $p^2, 2q^2$ とおくと、$d^2=e^2+f^2 \Rightarrow p^4+4q^4=d^2$ となる。ここで、$d<d^2=b<z$ なので、$r=d$ とすればよい。

次に、$x=x_1/x_0,\ y=y_1/y_0,\ z=z_1/z_0,\ x_i,y_i,z_i:\mathrm{integer}$ が非零で、$x^4+4y^4=z^2$ を満たすとする。すると、$(y_0z_0x_1)^4+4(x_0z_0y_1)^4=(x_0^2y_0^2z_0z_1)^2$ が得られる。すると、既に得られた結果から x_1,y_1,z_1 が全て非零ではあり得ないので、x,y,z も非零ではあり得ない。このとき、x,y のいずれかは 0 である。(証明終)

2.6.7

Nodal cubic curve $X=V((f)),\ f=y^2=x^3+x^2z$ は rational であるが (Exercise I.4.4(c))、$Z=(0,0,1)$ は singular point である。実際、Z において $\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0,\ \frac{\partial f}{\partial z}=0$ となる。

Example 6.11.4 と同様、$X-Z \xrightarrow{\sim} \mathrm{CaCl}^\circ X$ が成り立つ。

$X-Z$ が multiplicative group G_m と同型になることを示す。そのために

$$k^\times \xrightarrow{\sim} X-Z$$
$$t \mapsto (4t(t-1), 4t(t+1), (t-1)^3)$$
$$X-Z \xrightarrow{\sim} k^\times$$
$$(x,y,z) \mapsto \frac{y+x}{y-x}$$

となる 1 対 1 対応を考えると $(4t(t-1),4t(t+1),(t-1)^3)$ は $y^2z=x^3+x^2z$ を満たしており、$t=0,1$ はそれぞれ Z,P_0 に対応している。

$P_i:=(x_i,y_i,z_i)=(4t_i(t_i-1),4t_i(t_i+1),(t_i-1)^3),\ i=1,2,3$ を直線 L と X の 3 交点とする ($X-Z$ において)。L を $ax+by+cz=0$ とすると、それら 3 交点は

$$4t(t-1)a+4t(t+1)b+(t-1)^3c=0$$

の解であり、解と係数の関係から

$$t_1t_2t_3 = 1$$

を得る。

$P = P_1 + P_2$ とすると、P_0, P_3, P を通る直線が存在するので、P 対応する t は同様に $t_0t_3t = 1,\ t_0 = 1 \Rightarrow t = t_3^{-1}$ を満たすので、

$$t = t_1t_2$$

が成り立つ。なお、 $t = t_3^{-1}$ は $P = -P_3$ に対応してるので、逆元は t の逆数が対応する。

よって $X - Z$ は multiplicative group $k^\times = \mathbf{A}_k^1 - (0)$ と同型になる (definition, p. 136 より、curve 上では k は代数的閉体の前提あり)。

2.6.8

(a) $f : X \to Y,\ \mathscr{L} \in \operatorname{Pic} X$ のとき、$\mathscr{L}|_{V_i} = \mathcal{O}_{Y|V_i},\ Y = \cup_i V_i$ なので

$$(f^*\mathscr{L})|_{U_i} = \overline{f}^*(\mathscr{L}|_{V_i}) = \overline{f}^*(\mathcal{O}_{V_i}) = \mathcal{O}_{U_i},\ \overline{f} = f|_{U_i} : U_i \to V_i,\ U_i = f^{-1}(V_i)$$

が成り立ち (Exercise II.5.1 解答中の性質 4)、$f^*\mathscr{L}$ は invertible である。

(b) Nonsingular curve X, Y は Proposition 6.11、Corollary 6.16 の前提を満たすので (Remark 6.11.1A)、$\operatorname{Cl} X \cong \operatorname{CaCl} X \cong \operatorname{Pic} X$ であり、Y に関しても同様である。

$f : X \to Y$ が finite なので

$$f^{*c} : \operatorname{Cl} Y \to \operatorname{Cl} X$$

が存在する (Definition, p.137 の最後)。

また X は complete であり (次の性質 5)、Proposition 6.8 が適用できる。ここで、もし、$f(X) = pt$ とすると $X = f^{-1}(pt)$ は有限である (Exercise II.3.5(a))。Exercise I.4.8 から X の closed point 集合は k と同じ濃度をもつが、k は代数的閉体なので無限、矛盾である。

従って f は全射であり、$f^\# : \mathcal{O}_Y \hookrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ は単射となる。よって $\mathcal{O}_Y(V) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(U),\ U = f^{-1}(V)) \Rightarrow K(Y) \subseteq K(X)$ である。

$$f^{*c} : \operatorname{Cl} Y \to \operatorname{Cl} X$$

$$Q \mapsto \sum_{f(P)=Q} v_P(t_Q)P,\ t_Q \in \mathcal{O}_Q \subseteq K(Y) \subseteq K(X) :\ \text{local parameter}$$

$$f^{*ca} : \operatorname{CaCl} Y \to \operatorname{CaCl} X,\ D = \{(V_i, g_i)\} \mapsto \{(U_i, g_i)\}$$

$$U_i = f^{-1}(V_i),\ g_i \in K(Y) \subseteq K(X)$$

$$f^{*p} : \operatorname{Pic} Y \to \operatorname{Pic} X,\ \mathscr{L}D \to f^*\mathscr{L}D$$

とすると、これらに関する図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Cl}\,Y & \mathrm{CaCl}\,Y \arrow[l, "\sim", "\varphi^Y"'] \arrow[r, "\sim", "\mathscr{L}^Y"'] \arrow[d, "f^{*ca}"] & \mathrm{Pic}\,Y \arrow[d, "f^{*p}"] \\
\mathrm{Cl}\,X \arrow[from=u, "f^{*c}"'] & \mathrm{CaCl}\,X \arrow[l, "\sim", "\varphi^X"'] \arrow[r, "\sim", "\mathscr{L}^X"'] & \mathrm{Pic}\,X
\end{tikzcd}
\tag{13}
$$

が local に ($V_i = f^{-1}(U_i)$ において) 可換であることを示す[8]。

まず、図式の左側の区画において

$$f^{*ca} : D = \{(V_i, g_i)\} \mapsto \{(U_i, g_i)\}$$

$$\varphi^Y : \{(V_i, g_i)\} \to \sum_Q v_Q(g_j)Q$$

$$\varphi^X : \{(U_i, g_i)\} \to \sum_P v_P(g_j)P$$

が成り立つ。ここで、j は $Q \in V_j$ [$\Leftrightarrow P \in U_j$] を満たすものである ($j$ は $Q \cap V_j \neq \varnothing$ となる j であり、そのような j ならどれを用いても結果は変わらない、Proposition 6.11 の証明参照)。

このとき、下記性質 6 より

$$f^{*c} : \sum_Q v_Q(g_j)Q \to \sum_Q v_Q(g_i) \sum_{P \in f^{-1}(Q)} v_P(t_Q)P$$

$$= \sum_P v_{f(P)}(g_i) v_P(t_{f(P)})P = \sum_P v_P(g_i)P$$

なので、$f^{*c}\varphi^Y = \varphi^X f^{*ca}$、ゆえに可換となる。

次に図式の右側の区画が可換であることを示す。

$$\mathscr{L}^Y : D^Y = \{(V_i, g_i)\} \mapsto \mathscr{L}D^Y = \{\mathcal{O}_{V_i} g_i^{-1}\}$$

$$f^{*p} : \mathscr{L}D^Y \mapsto f^*(\mathscr{L}D^Y)$$

$$f^*(\mathscr{L}D^Y)|_{U_i} = \overline{f}^*((\mathscr{L}D^Y)|_{V_i}) = \overline{f}^*(\mathcal{O}_{V_i} g_i^{-1}) \overset{\#}{=} \mathcal{O}_{U_i} g_i^{-1}$$

$$f^{*ca} : D^Y = \{(V_i, g_i)\} \mapsto D^X = \{(U_i, g_i)\}$$

$$\mathscr{L}^X : D^X = \{(U_i, g_i)\} \mapsto \mathscr{L}D^X = \{\mathcal{O}_{U_i} g_i^{-1}\}$$

から $f^{*p}\mathscr{L}^Y = \mathscr{L}^X f^{*ca}$、ゆえに可換となる。なお、$\overset{\#}{=}$ が成立するのは次の性質 7 による。

---

[8] $\mathrm{Cl}\,Y \to \mathrm{CaCl}\,Y$, $Q \mapsto \{(U_Q, t_Q), (Y - Q, 1)\}$ から証明することも可能である。$\{(U_Q, t_Q), (Y - Q, 1)\}$ が Cartier divisor となることは $t_Q \in \mathcal{O}_Q^*$ から容易に示すことができ、また $\{(U_Q, t_Q), (Y - Q, 1)\}$ から Weil divisor を作成すれば Q となることも容易にわかる。

以上により図式 (13) 全体が可換となる。φ^Y, φ^X は isomorphism なので、その逆写像を考えれば

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cl}\, Y \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f^{*c}"'] & \mathrm{Pic}\, Y \arrow[d, "f^{*p}"] \\ \mathrm{Cl}\, X \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Pic}\, X \end{tikzcd}$$

が可換、f^{*c} と f^{*p} は等価となる。

性質 5. $f : X \to Y$ $(X, Y : \text{curve})$ が finite ならば、X は complete である。

(証明) $y \in V = \operatorname{Spec} B \subseteq Y,\ y = \mathfrak{p}$ とすると、k は代数的閉体ゆえ $B/\mathfrak{m} = k$ であり ([1], Corollary 7.10)

$$k(y) = \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y = B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} = (B/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow (B/\mathfrak{m})_{\mathfrak{p}} = k$$

から、$\operatorname{Spec} k \to Y$ となる (Exercise II.2.7)。

このとき $X \times_Y k = X$ が成り立つ。なぜなら

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & Z \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[r, "\beta"] & \operatorname{Spec} k \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

が可換となり ($\beta : Z \to X \to \operatorname{Spec} k$ となるのは、definition, p. 78 による)、一意性も明らかなので、U.P. から成立するからである。

すると、proper 性の base change 不変性から γ も proper、よって X は complete となる。(証明終)

性質 6. $f : X \to Y$ が finite ならば、$t_Q \in \mathcal{O}_Q \subseteq K(Y)$ を local parameter として、次式が成立する。

$$v_P(g) = v_P(t_Q) v_Q(g),\ g \in K(Y),\ Q = f(P) \tag{14}$$

(証明) まず $\mathcal{O}_Q \hookrightarrow \mathcal{O}_P,\ Q = f(P)$ を示す。($\because$) f は全射なので $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \hookrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ は単射である。f が finite ゆえ $V_i = \operatorname{Spec} B^i,\ U_i = f^{-1}(Vi) = \operatorname{Spec} A^i$ とできるので、

$$f^{\#}(V_i) : \mathcal{O}_Y(V_i) = B^i \hookrightarrow (f_*\mathcal{O}_X)(V_i) = \mathcal{O}_X(U_i) = A^i$$

より $\varphi = f^{\#}(V_i)$ とすると、

$$\varphi : B^i \hookrightarrow A^i \Rightarrow B^i_{\varphi^{-1}\mathfrak{p}} \hookrightarrow A^i_{\mathfrak{p}} \Rightarrow \mathcal{O}_Q \hookrightarrow \mathcal{O}_P$$

となる。($\because$ 終)

$\mathcal{O}_Q \subseteq \mathcal{O}_P$ において、$\mathcal{O}_Q,\ \mathcal{O}_P$ の max ideal をそれぞれ $\mathfrak{m}_Q,\ \mathfrak{m}_P$ とすると、$\mathfrak{m}_Q = \mathfrak{m}_P \cap \mathcal{O}_Q \subseteq \mathfrak{m}_P$ が成り立つ。

$(t_Q) = \mathfrak{m}_Q = \mathfrak{m}_P^r$ より $r = v_P(t_Q)$ であり、$s = v_Q(g)$ とすると、$(g) = \mathfrak{m}_Q^s = \mathfrak{m}_P^{rs}$ から、$v_P(g) = rs = v_P(t_Q)v_Q(g)$ を得る。(証明終)

性質 7. $B \hookrightarrow A,\ f : U = \operatorname{Spec} A \to V = \operatorname{Spec} B$、$g$ を A-module の元とすると

$$f^*(\mathcal{O}_V g) = \mathcal{O}_U g$$

(証明) Proposition II.5.2(e) と次の性質 8 から

$$f^*(\mathcal{O}_V g) = f^*(\widetilde{Bg}) = (Bg \otimes_B A)^{\sim} = (B \otimes_B Ag)^{\sim} = \widetilde{Ag} = \tilde{A}g = \mathcal{O}_U g$$

(証明終)

性質 8. 整域 A, B, C に対し $A \to B,\ A \to C$ かつ $t \in \operatorname{Frac} B \cap \operatorname{Frac} C$ のとき

$$Bt \otimes_A C \approx B \otimes_A Ct$$

(証明) 下図式の U.P による。

$$\begin{tikzcd} Bt \times C \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & \\ B \times Ct \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi"'] & P \\ B \otimes Ct \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

ここで、

$$\alpha : (bt, c) \mapsto (b, ct)$$

$$h : (b, ct) \mapsto f(bt, c)$$

とすると、$h\alpha = f$ が成り立つ。ψ は $B \otimes Ct$ の U.P. から得られるもので、$h = \psi\varphi$ を満たす。すると、$f = \psi(\varphi\alpha)$ が成り立ち、また、このような ψ は一意的なので、U.P. から $Bt \otimes C = B \otimes Ct$ が成立する。(証明終)

(c) X は locally factorial integral closed scheme なので、$\operatorname{Cl} X \approx \operatorname{CaCl} X$ である。

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Cl} \mathbf{P}^n \arrow[d, "f^{*c}"'] & \operatorname{CaCl} \mathbf{P}^n \arrow[l, "\sim", "\varphi^P"'] \arrow[r, "\sim", "\mathscr{L}^P"'] \arrow[d, "f^{*ca}"] & \operatorname{Pic} \mathbf{P}^n \arrow[d, "f^{*p}"] \\ \operatorname{Cl} X & \operatorname{CaCl} X \arrow[l, "\sim", "\varphi^X"'] \arrow[r, "\sim", "\mathscr{L}^X"'] & \operatorname{Pic} X \end{tikzcd} \tag{15}$$

$f : X \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ に対し、(b) と同様に f^{*c}, f^{*ca}, f^{*p} が定義できる。ただし f^{*c} は $f^{*c} : \mathrm{Cl}\,\mathbf{P}^n \to \mathrm{Cl}\,X,\ V \mapsto V.X$ である。

$H = (x_0) \not\supseteq X$ とすると $((x_i) \not\supseteq X$ となる i は存在する)、$\mathrm{Cl}\,\mathrm{P}^n \approx \mathrm{CaCl}\,\mathrm{P}^n \approx \mathrm{Pic}\,\mathrm{P}^n$ は H で生成されるので (Proposition 6.4)、上記 3 つの morphism が H において等価になればよい。

$$f^{*c} : H \mapsto H.X = \sum_Z v_Z(x_0/x_i)Z$$

$$f^{*ca} : D = \{(U_i, x_0/x_i)\} \mapsto D^X = \{(f^{-1}(U_i), x_0/x_i)\},\ f^{-1}(U_i) = U_i \cap X$$

$$f^{*p} : \mathscr{L}D = \{(U_i, \mathcal{O}_{U_i}x_i/x_0)\} \to f^*\mathscr{L}D = \{(U_i \cap X, \mathcal{O}_{U_i \cap X}x_i/x_0)\}$$

最後の式は (b) と同様、性質 7 による。また、$H = (x_0) \not\supseteq X \Leftrightarrow x_0 \notin I,\ X = V(I)$ より $x_0/x_i \in K(X) = \mathrm{Frac}\,(S/I)_{(0)}$ と見ることができる。

H に対応する $\mathrm{CaCl}\,\mathrm{P}^n$ の元は $D = \{(U_i, x_0/x_i)\}$ である $(U_i = D_+(x_i))$。なぜなら、D から Weil divisor を作成すると $\sum_V v_V(x_0/x_i)V$ となるが (i は $V \cap U_i \neq \varnothing$ となる i)、$V = V((g))$ となる g に対し ($\mathbf{P}^n$ の divisor はこの形に限る、Exercise I.2.8)、$x_0 \in (g)^r$ となるのは、$g = x_0, r = 1$ に限るからである: $\varphi^P(D) = H$

$\varphi^X(D^X)$ については、$Z \cap (U_i \cap X) \neq \varnothing \Leftrightarrow Z \cap U_i \neq \varnothing$ なので、

$$\sum_{Z[Z \cap (U_i \cap X) \neq \varnothing]} v_Z(x_0/x_i)Z = \sum_{Z[Z \cap U_i \neq \varnothing]} v_Z(x_0/x_i)Z = H.X$$

が成り立つ。

さらに、

$$\mathscr{L}^X(D^X) = \mathscr{L}^X(\{(U_i \cap X, x_0/x_i)\}) = \{(U_i \cap X, \mathcal{O}_{U_i \cap X}x_i/x_0)\} = f^*\mathscr{L}D$$

である。

以上により、図式 (15) は可換となる。

2.6.9

(a) Projective curve over k の X の normalization を $\tilde{X}$ とする。

$$\pi : \tilde{X} \to X$$

$$X = \cup_i U_i,\ U_i = \mathrm{Spec}\,A_i,\ \tilde{X} = \cup_i \tilde{U}_i,\ \tilde{U}_i = \mathrm{Spec}\,\tilde{A}_i$$

Theorem II.4.9 から X は finite-type over k であり、よって $\pi : \tilde{X} \to X$ は finite である (Exercise II.3.8)。また、Normalization の構成法からからわかるように (Exercise II.3.8 の証明の最後の式 (18) 参照)、$\pi|_{U_i} : \tilde{U}_i \to U_i,\ \tilde{U}_i = \pi^{-1}(U_i)$ である。

$A_i \hookrightarrow \tilde{A}_i$ が単射なので、local に $\pi^\# : \mathcal{O}_{U_i} \hookrightarrow \pi_*(\mathcal{O}_{U_i})$ も単射であり (Exercise II.2.18(b))、よって $\forall x \in X$ に対して、$x \in \exists U_i$ とすると $\pi^\#_x : \mathcal{O}_{U_i,x} \hookrightarrow (\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{U}_i})_x$ も単射となる。よって全体として $\pi^\# : \mathcal{O}_X \hookrightarrow \pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ は単射となり

$$\pi^\# : \mathcal{O}_X \hookrightarrow \pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

すると

$$A_i \subseteq \tilde{A}_i \subseteq \operatorname{Frac} A_i = K(X) \Rightarrow K(X) = \operatorname{Frac} A_i \subseteq \operatorname{Frac} \tilde{A}_i \subseteq K(X)$$

$$\Rightarrow K(\tilde{X}) = K(X) = K$$

従って

$$\mathcal{O}_X \hookrightarrow \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} \hookrightarrow \mathscr{K}$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}_X^* \hookrightarrow \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^* \hookrightarrow \mathscr{K}^*$$

このとき$\forall U \subseteq X$に対して、$\mathcal{O}_X^*(U) \hookrightarrow \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*(U) \hookrightarrow \mathscr{K}^*(U)$から$\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*(U)/\mathcal{O}_X^*(U) \hookrightarrow \mathscr{K}^*(U)/\mathcal{O}_X^*(U)$が得られ[9]、presheafとして$(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^*)^- \hookrightarrow (\mathscr{K}^*/\mathcal{O}_X^*)^-$が成り立つが、Exercise II.1.4よりsheaf化しても単射となる:

$$\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^* \hookrightarrow \mathscr{K}^*/\mathcal{O}_X^*$$

Exercise II.1.6(a)から

$$0 \to \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^* \to \mathscr{K}^*/\mathcal{O}_X^* \to (\mathscr{K}^*/\mathcal{O}_X^*)/(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^*) = \mathscr{K}^*/\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^* \to 0 \quad \text{(exact)} \tag{16}$$

ここで、$\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^*$はquasi-coherentである。なぜなら$\mathcal{O}_X^*|_{U_i} = A_i^{*\sim}$, $(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*)|_{U_i} = \overline{\pi}_*(\mathcal{O}_{\tilde{U}_i}^*) = (\tilde{A}_i^*)^\sim$より[10]($\overline{\pi} = \pi|_{\tilde{U}_i}$, $\tilde{A}$はAの整閉包、$(\ )^\sim$はDefinition, p.110で定義されたもの)、$\mathcal{O}_X^*$, $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*$はquasi-coherent、よって

$$0 \to \mathcal{O}_X^* \xrightarrow{\iota} \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^* \to \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^* \to 0$$

において(Exercise II.1.6(a))、$\operatorname{coker}\iota = \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^*$はquasi-coherentとなるからである(Proposition 5.7)。

よって式(16)から

$$\Rightarrow 0 \to \Gamma(X, \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^*) \to \Gamma(X, \mathscr{K}^*/\mathcal{O}_X^*) \to \Gamma(X, \mathscr{K}^*/\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*) \to 0 \quad \text{(exact)}$$

となり(Proposition 5.6) [11]、snake lemmaより下記の可換図が得られる。

$$\begin{tikzcd}
 & \ker 0 = 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ker\alpha = \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) = k^* \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \ker\beta = \Gamma(X, \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*) = k^* \arrow[d] \arrow[dddll, bend left, "\delta=0"] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \Gamma(X, \mathscr{K}^*) = K^* \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\alpha"] & \Gamma(X, \mathscr{K}^*) = K^* \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma(X, \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^*) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X, \mathscr{K}^*/\mathcal{O}_X^*) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X, \mathscr{K}^*/\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \operatorname{coker} 0 \arrow[r] & \operatorname{coker}\alpha = \operatorname{Pic} X \arrow[r, "\gamma"] & \operatorname{coker}\beta = \operatorname{Pic}\tilde{X} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

[9] ここでの剰余類は積に関する剰余類である。

[10] Exercise II.5.1の証明の中の性質4参照

[11] Proposition 5.6が使えるのはXがaffineの場合であるが、exact系列性は局所的性質なのでXがaffineのときに言えれば十分である(Exercise I.1.2(c))。

可換図において、$\alpha' : \mathscr{K}^* \to \mathscr{K}^*/\mathcal{O}_X^*$ とすると、$\ker\alpha' = \mathcal{O}_X^* \Rightarrow \ker\alpha = \ker\alpha'(X) = \mathcal{O}_X^*(X)$ $[= k^*]$ である (Theorem I.3.4(a) $\leftarrow$ X: projective curve ゆえ variety と見倣せる)。

$\mathrm{CaDvi}\, X = \Gamma(X, \mathscr{K}^*/\mathcal{O}_X^*)$ であり、$\mathrm{im}\,\alpha$ は X の principal divisor なので、$\mathrm{Pic}\, X = \mathrm{CaCl}\, X = \mathrm{coker}\,\alpha$ となる。β についても同様である。

左下は $\mathrm{coker}\, 0 = \Gamma(X, \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^*)$ である。

$\ker\alpha \approx \ker\beta = k^*$ なので $\delta = 0$ であり ([2], 例 1.8)、従って $(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^*)(X) \hookrightarrow \mathrm{Pic}\, X$ は単射である。

$\mathcal{I} = \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^*$ とすると、nonsingular point P では $\mathcal{I}_P = 0$、X における singular point の集合は閉集合 ($\subsetneq X$) であり (Theorem I.5.3)、$\mathrm{Supp}\,\mathcal{I} \subsetneq X$ ゆえ、次の性質 9 から

$$\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*/\mathcal{O}_X^* = \bigoplus_{P\in X}(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^*)_P/(\mathcal{O}_X^*)_P = \bigoplus_{P\in X}\tilde{\mathcal{O}}_P^*/\mathcal{O}_P^*$$

となる。ここで、最後の等号は $(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})|_{U_i} = \overline{\pi}_*(\mathcal{O}_{\tilde{U}_i}) = (\tilde{A}_i)^\sim$ より、Proposition 5.1(b) から

$$(\overline{\pi}_*\mathcal{O}_{\tilde{U}_i}^*)_P = (\tilde{A}_i^*)_P \overset{\%}{=} \widetilde{(A_i^*)_P} = \widetilde{\mathcal{O}_{U_i,P}^*} = \widetilde{\mathcal{O}_P^*}$$

となるからである ($\overset{\%}{=}$ は [1], Proposition 5.12 による)。

以上まとめると次の exact 系列を得る。

$$0 \to \bigoplus_{P\in X}\tilde{\mathcal{O}}_P^*/\mathcal{O}_P^* \to \mathrm{Pic}\, X \to \mathrm{Pic}\, \tilde{X} \to 0 \tag{17}$$

性質 **9.** Curve X、coherent sheaf $\mathscr{F}$ において $\mathrm{Supp}\,\mathscr{F} \subsetneq X$ のとき

$$\mathscr{F} = \bigoplus_{P\in X} i_P(\mathscr{F}_P) = \bigoplus_{P\in X}\mathscr{F}_P$$

(証明) Curve X は noetherian なので、Exercise II.5.6 より $\mathrm{Supp}\,\mathscr{F}$ は閉集合であり、有限個の closed point からなる。すると $\mathscr{F} \to i_P(\mathscr{F}_P)$ を定義できる。なぜなら

$$\mathscr{F}(U) \to i_P(\mathscr{F}_P)(U) = \begin{cases} \mathscr{F}_P & : P \in U \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

が存在し、これは制限写像と compatible だからである。よって

$$f : \mathscr{F} \to \bigoplus_{P\in \mathrm{Supp}\,\mathscr{F}} i_P(\mathscr{F}_P) = \bigoplus_{P\in X} i_P(\mathscr{F}_P)$$

が定義できる。

このとき

$$(\bigoplus_{P\in X} i_P(\mathscr{F}_P))_Q = \begin{cases} \mathscr{F}_P & : Q = P \in \mathrm{Supp}\,\mathscr{F} \\ 0 & : Q \notin \mathrm{Supp}\,\mathscr{F} \end{cases}$$

より $\mathscr{F}_Q = (\bigoplus_{P\in X} i_P(\mathscr{F}_P))_Q$ となるので、$\mathscr{F} = \bigoplus_{P\in X} i_P(\mathscr{F}_P)$ が得られる。X が curve の場合、$\{P\}^- = P$ から、$i_P(\mathscr{F}_P) = \mathscr{F}_P$ と見られる。(証明終)

(b)

(b-1) Cuspisal curve: $y^2z = x^3$

$X = D_+(z) \cup D_+(y)$ の singular point は $Z = (0,0,1) \in D_+(z)$、$z = 0$ の点は $P_0 = (0,1,0) \in D_+(y)$ である。

$D_+(z)$ では、$D_+(z) = X - P_0 = \operatorname{Spec} A,\ A := k[x,y]/(y^2 - x^3)$ とすると $\operatorname{Frac} A = k(x,y)[y]/(y^2 - x^3)$ であり、

$$\alpha : A \hookrightarrow k[t],\ x \mapsto t^2, y \mapsto t^3$$

$$\beta : k[t] \hookrightarrow \operatorname{Frac} A,\ t \mapsto y/x$$

は単射となる。なぜなら、α は $f = \sum_{i,j\geq 0} a_{i,j}x^iy^j$ のとき $f(t^2,t^3) = \sum_{i,j\geq 0} a_{i,j}t^{2i+3j} = 0$ において低次係数から順次 0 となることがわかるからであり、β においては $y^2 = x^3$ を満たす y/x は任意の値を取りうるので $g(y/x) = 0$ なら多項式として $g = 0$ となるからである。なお $A \approx \operatorname{im} A = k[t^2,t^3]$ である。

A の整閉包は $\tilde{A} = k[t]$ であることを示す。まず $k[t]$ は整閉である。$\beta : k[t] \subseteq \operatorname{Frac} A$ では $t = y/x$ であるが、$t^2 - x = 0$ より t は A 上整ゆえ $k[t] \subseteq \tilde{A}$ となる。一方 $A \subseteq k[t] \subseteq \operatorname{Frac} A$ から $\tilde{A} \subseteq \widetilde{k[t]} = k[t]$ なので、合わせて $\tilde{A} = k[t]$ を得る。

$D_+(y)$ では、$D_+(y) = X - Z = \operatorname{Spec} B,\ B = k[x,z]/(z - x^3) = k[t],\ t = x$ において、$\tilde{B} = k[t]$ となる。

以上により $\tilde{X} = \mathbf{P}^1_k$ となり、$\operatorname{Pic} \tilde{X} = \mathbb{Z}$ が得られる。

$X - Z$ は nonsingular なので $\mathcal{O}_P$ は整閉、$\tilde{\mathcal{O}}_P = \mathcal{O}_P$ となる。

$$\tilde{\mathcal{O}}_Z^*/\mathcal{O}_Z^* = S^{-1}k[t]^*/S^{-1}k[t^2,t^3]^* = \left\{\frac{a + bt + t^2f}{1 + t^2g}\right\}_{a\in k^*, b\in k, f,g\in k[t]}$$

$$S = \alpha(A\backslash(x,y)) = k[t^2,t^3]\backslash(t^2) = \{1 + t^2g\}_{g\in k[t]}$$

ここで、$a \neq 0$ である。なぜなら、$\frac{a+bt+t^2f}{1+t^2g}$ は unit であるが、もし $a = 0$ とすると $\frac{bt+t^2f}{1+t^2g} \cdot \frac{a'+b't+t^2f'}{1+t^2g'} = 1$ となり得ないからである。

$$\theta : \tilde{\mathcal{O}}_Z^*/\mathcal{O}_Z^* \to \mathbf{G}_a,\ \frac{a + bt + t^2f}{1 + t^2g} \mapsto b/a$$

とする。θ は同型である。実際、$\frac{a+bt+t^2f}{1+t^2g} = \frac{a'+t^2f'}{1+t^2g'} \in S^{-1}k[t^2,t^3]^*$ とすると $b = 0$ となり well-define である。逆に $b = 0$ とすると $\frac{a+t^2f}{1+t^2g} \in S^{-1}k[t^2,t^3]^*$ から単射である。全射は自明であり、さらに $\frac{a+bt+t^2f}{1+t^2g} \cdot \frac{a'+b't+t^2f'}{1+t^2g'} = \frac{aa'+(ab'+a'b)t+t^2f"}{1+t^2g"} \mapsto (ab' + a'b)/aa' = b/a + b'/a'$ より準同型でもある。よって $\bigoplus_{P\in X} \tilde{\mathcal{O}}_P^*/\mathcal{O}_P^* = \tilde{\mathcal{O}}_Z^*/\mathcal{O}_Z^* = \mathbf{G}_a$ となる。

以上により式 (17) から

$$0 \to \mathbf{G}_a \to \operatorname{Pic} X \to \mathbb{Z} \to 0$$

が得られる。

(b-2) Nodal curve: $y^2z = x^3 + x^2z$

$D_+(z) = X - P_0 = \operatorname{Spec} A,\ A = k[x, y]/(y^2 - x^3 - x^2)$ は $P_0 = (0, 1, 0)$ を含まないが、$y \to \infty$ とすれば P_0 となるので、ここではそれを含め X を $\operatorname{Spec} A$ として扱う。

$\operatorname{Frac} A = k(x)[y]/(y^2 - x^3 - x^2)$ に対し、

$$\alpha : A \hookrightarrow k[t],\ x \mapsto t^2 - 1, y \mapsto t^3 - t$$

$$\beta : k[t] \hookrightarrow \operatorname{Frac} A,\ t \to y/x$$

は単射となる ((b-1) と同様)。なお、P_0 は $t = \infty$ に対応する。

$\tilde{A} = k[t]$ となることも (b-1) と同様であり、よって $\tilde{X} = \mathbf{P}^1_k$ である。

X において Z 以外は nonsingular なので、やはり (b-1) 同様 $\tilde{\mathcal{O}}^*_P = \mathcal{O}^*_P$ が成り立つ。

Z は A の prime ideal (x, y) に対応しており、

$$S = \alpha(A\backslash(x, y)) = k[t^2 - 1, t^3 - t]\backslash(t^2 - 1) = \{1 + (t^2 - 1)g\}_{g \in k[t]}$$

から

$$\tilde{\mathcal{O}}^*_Z/\mathcal{O}^*_Z = S^{-1}k[t]^*/S^{-1}k[t^2{-}1, t(t^2{-}1)]^* = \left\{\frac{a(t+1) + b(t-1) + (t^2 - 1)f}{1 + (t^2 - 1)g}\right\}_{a,b \in k^*, f,g \in k[t]}$$

となる。ここで $\forall f(t) \in k[t]$ は $f(t) = a(t + 1) + b(t - 1) + (t^2 - 1)g$ と書けるが、もし $a = 0$ だと $\frac{b(t-1)+(t^2-1)f}{1+(t^2-1)g'} \frac{h}{1+(t^2-1)g''} = 1/1$ はあり得ないので ($t = 1$ とすればわかる)、$a \neq 0$ であり、$b \neq 0$ も同様である[12]。

$$\theta : \tilde{\mathcal{O}}^*_Z/\mathcal{O}^*_Z \to k^*,\ \frac{a(t + 1) + b(t - 1) + (t^2 - 1)f}{1 + (t^2 - 1)g} \mapsto -a/b$$

と定義する。実際に定義できるのは、$\frac{a(t+1)+b(t-1)+(t^2-1)f}{1+(t^2-1)g} \in S^{-1}(k[t^2 - 1, t^3 - t])$ なら $a + b = 0 \Rightarrow -a/b = 1$ による。θ が単射となるのは、$-a/b = 1$ とすると $a + b = 0$ より

$$\frac{a(t + 1) + b(t - 1) + (t^2 - 1)f}{1 + (t^2 - 1)g} = \frac{2a + (t^2 - 1)f}{1 + (t^2 - 1)g} \in S^{-1}k[t^2{-}1, t(t^2{-}1)]^* = \mathcal{O}^*_Z$$

だからである。全射は自明であり、さらに

$$(a(t+1)+b(t-1))(a'(t+1)+b'(t-1)) = 2aa'(t+1) - 2bb'(t-1) + (t^2-1)g''$$

$$\Rightarrow \theta(hh') = \frac{aa'}{bb'} = \theta h{\cdot}\theta h',\ h := \frac{a(t + 1) + b(t - 1) + (t^2 - 1)f}{1 + (t^2 - 1)g}, h' := \frac{a'(t + 1) + b'(t - 1) + (t^2 - 1)f'}{1 + (t^2 - 1)g'}$$

[12] ここでは不要だが、逆に $a \neq 0, b \neq 0$ なら $a(t + 1) + b(t - 1) + (t^2 - 1)g$ は unit となる。実際、$(a(t + 1) + b(t - 1) + (t^2 - 1)g)(a^{-1}/4(t + 1) + b^{-1}/4(t - 1)) = 1 + (t^2 - 1)g' \in S$ より、$a(t + 1) + b(t - 1) + (t^2 - 1)g$ は単元である。

から準同型でもあるので、

$$\tilde{\mathcal{O}}_Z^*/\mathcal{O}_Z^* \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_m$$

が成り立つ。
　以上により式 (17) は

$$0 \to \mathbf{G}_m \to \operatorname{Pic} X \to \mathbb{Z} \to 0$$

となる。

2.6.10

$$\mathfrak{C} = \{[\mathscr{F}] | \mathscr{F} : \text{coherent}\},\ \mathfrak{D} = \{[\mathscr{F}] - [\mathscr{F}'] - [\mathscr{F}''] | 0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0\}$$

このとき、γ を

$$\gamma\mathscr{F} = \widetilde{[\mathscr{F}]} \in \mathfrak{C}/\mathfrak{D} = K(X)$$

で定義する。
　$\mathfrak{C}$ は free abelian group なので、その元の表現は一意的である。以下 $\mathfrak{C}$ において、$[\mathscr{F}]$ を単に $\mathscr{F}$ と記す。

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{F} - \mathscr{F}' - \mathscr{F}'' \in D$$
$$\Leftrightarrow \widetilde{\mathscr{F}} - \widetilde{\mathscr{F}'} - \widetilde{\mathscr{F}''} = 0$$
$$\Leftrightarrow \gamma\mathscr{F} - \gamma\mathscr{F}' - \gamma\mathscr{F}'' = 0\ [:= \gamma 0]$$

従って、

$$\gamma\mathscr{F} = \gamma\mathscr{F}',\ \gamma\mathscr{F} = \gamma\mathscr{F}' + \gamma 0\ \Rightarrow 0 \to \gamma 0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}' \to 0\ \Rightarrow \mathscr{F} = \mathscr{F}'' \quad (18)$$

さらに、

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^{\otimes n} \to \mathcal{O}_X^{\otimes n-1} \to 0 \qquad \text{(exact)}$$

より $\gamma\mathcal{O}_X^{\otimes n} = \gamma\mathcal{O}_X^{\otimes n-1} + \gamma\mathcal{O}_X$ が成り立つので、$\gamma\mathcal{O}_X^{\otimes n} = n\gamma\mathcal{O}_X$ である。

　(a) $\mathscr{F} = \tilde{M}$: 有限生成 $k[x]$-module における M の生成元を $x_1, \cdots, x_n$ とすると

$$k[x]^{\otimes n} \twoheadrightarrow M,\ (a_1, \cdots, a_n) \mapsto \sum_i a_i x_i$$

が存在するので

$$0 \to \ker\varphi \to k[x]^{\otimes n} \xrightarrow{\psi} M \to 0 \qquad \text{(exact)}$$

ここで $\ker\psi$ は、pid $k[x]$ 上の free module $k[x]^{\otimes n}$ の部分加群なので、ねじれ部分をもたず、$k[x]^{\otimes r}$ の形をしている (module の構造定理)。従って

$$0 \to k[x]^{\otimes r} \to k[x]^{\otimes n} \to M \to 0 \qquad \text{(exact)}$$

が成り立ち、

$$M = k[x]^{\otimes n-r} \Rightarrow \mathscr{F} = \tilde{M} = \widetilde{k[x]}^{n-r} = \mathcal{O}_X^{n-r}$$

から $\gamma(\mathscr{F}) = (n-r)\gamma(\mathcal{O}_X)$ を得る。これは $\gamma(\mathcal{O}_X)$ が $K(X)$ の生成元であることを示している。

$$\varphi : K(X) \to \mathbb{Z},\ \gamma(\mathscr{F}) \mapsto n - r$$

は式 (18 から) 単射であり、$\gamma\mathcal{O}_X^{\otimes n} = n\gamma\mathcal{O}_X$ より全射でもある。

以上により $K(X) = \mathbb{Z}$ である。

(b) rank を次のように定める。

$$\mathrm{rank} : K(X) \to \mathbb{Z},\ C := \sum_i n_i\gamma(\mathscr{F}_i) \mapsto \sum_i n_i \dim_K \mathscr{F}_\xi$$

$C \in \mathfrak{D}$ のとき、C は $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ を満たす $\mathscr{F} - \mathscr{F}' - \mathscr{F}''$ で生成される。ここで、$\mathscr{F}$ は coherent なので、$\mathscr{F}_\xi$ は有限次元 $\mathcal{O}_\xi = K$ module(K 上 vector space) である。

$0 \to \mathscr{F}'_\xi \to \mathscr{F}_\xi \to \mathscr{F}''_\xi \to 0$ と $\dim_K$ が加法的関数であることから、

$$\dim_K \mathscr{F}_\xi - \dim_K \mathscr{F}'_\xi - \dim_K \mathscr{F}''_\xi = 0$$

が成り立つ。よって $\mathrm{rank}(\mathscr{F} - \mathscr{F}' - \mathscr{F}'') = \dim_K \mathscr{F}_\xi - \dim_K \mathscr{F}'_\xi - \dim_K \mathscr{F}''_\xi = 0$ から rank は well-define である。

$\mathrm{rank}\mathcal{O}_X = \dim_K \mathcal{O}_\xi = \dim_K K = 1$ より、rank は全射となる。

(c) Open immersion $i : U = X - Y \hookrightarrow X$、closed immersion $\iota : Y \hookrightarrow X$ とするとき、次の exact 系列が存在することを示す。

$$K(Y) \xrightarrow{\mu} K(X) \xrightarrow{\nu} (X - Y) \to 0 \qquad \text{(exact)}$$

まず coherent $\mathcal{O}_Y$-module $\mathscr{F}$ に対し ι が proper なので $\mathcal{O}_X$-module $\iota_*\mathscr{F}$ も coherent であり (Caution 5.8.1)

$$\mu : K(Y) \to K(X),\ \gamma\mathscr{F} \mapsto \gamma(\iota_*\mathscr{F})$$

が存在する。

一方、 $\mathcal{O}_X$-module $\mathscr{G}$ が coherent なら $\mathcal{O}_U$-module $i^*\mathscr{G} = i^{-1}\mathscr{G}$ も coherent であり (Proposition 5.8)

$$\nu : K(X) \to K(U),\ \gamma\mathscr{G} \mapsto \gamma(i^*\mathscr{G})$$

が存在する。

逆に $\mathcal{O}_U$-module $\mathscr{H}$ に対し、$\mathcal{O}_X$-module $\mathscr{H}'$ が存在して $i^*\mathscr{H}' = i^{-1}\mathscr{H}' = \mathscr{H}'|_U = \mathscr{H}$ を満たすので (Exercise II.5.15)、ν は全射である。

$P \in U$ に対し

$$(i^*\iota_*\mathscr{F})_P = (\iota_*\mathscr{F})_P = \lim_{P\in V} \mathscr{F}(Y \cap V) = \mathscr{F}(\varnothing) = 0$$

となることから $\operatorname{im}\mu \subseteq \ker\nu$ である。

$\gamma\mathscr{G} \in \ker\nu$ に対し $\gamma(i^*\mathscr{G}) = 0$ とする。すると、式 (18) より

$$i^*\mathscr{G} = \mathscr{G}|_U = 0 \Rightarrow \operatorname{Supp}\mathscr{G} \subseteq Y \tag{19}$$

となる。

Exercise II.1.18 で示したように、$\alpha : \mathscr{G} \to \iota_*\iota^{-1}\mathscr{G}$ が存在するが、これは全射である。

($\because$) $V \subseteq X$ に対し、$\iota^{-1}V = Y \cap V = \operatorname{Spec} A/I$ であり、$\mathscr{G}|_V = M^\sim$, $\bar{\iota} = \iota|_{\iota^{-1}V}$ とすると、Exercise II.5.1 の解答中の性質 4 と Proposition 5.2 から

$$(\iota_*\iota^{-1}\mathscr{G})|_V = \bar{\iota}_*\bar{\iota}^*(\mathscr{G}|_V) = \bar{\iota}_*((M \otimes_A A/I)^\sim) =_A (M/IM)^\sim$$

となる ([1], Exercise 2.2)。Corollary 5.5 と Proposition 5.6 より

$$0 \to IM \to M \to M/IM \to 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \to \widetilde{IM} \to \tilde{M} \overset{\alpha|_V}{\to} \widetilde{M/IM} \to 0$$

ここで $\ker\alpha|_V = \widetilde{IM}$ である。

$M \twoheadrightarrow M/IM$ の全射性から $\tilde{M} \overset{\alpha|_V}{\to} \widetilde{M/IM}$ は全射、よって $\mathscr{G}|_V \to (\iota_*\iota^{-1}\mathscr{G})|_V$ も全射となる。全射性は局所的性質なので $\mathscr{G} \twoheadrightarrow \iota_*\iota^{-1}\mathscr{G}$ は全射となる[13]。($\because$ 終)

ここで $\mathscr{G}_0 = \mathscr{G}$, $\mathscr{G}_1 = \ker\alpha$ とおくと、$\mathscr{G}_0 \supseteq \mathscr{G}_1$ であり、$\gamma(\iota^*\mathscr{G}_0) \in K(Y)$ なので $\iota^*\mathscr{G}_0$ は $\mathcal{O}_Y$-module、$\gamma(\iota_*\iota^*\mathscr{G}_0) \in \operatorname{im}\mu$ である。

以下、$\mathscr{G}_1 \to \iota_*\iota^*\mathscr{G}_1$ に対して同じことを繰り返していくと、

$$\mathscr{G} = \mathscr{G}_0 \supseteq \mathscr{G}_1 \supseteq \mathscr{G}_2 \cdots$$

$$\mathscr{G}_j/\mathscr{G}_{j+1} \in \operatorname{im}\mu$$
$$\mathscr{G}_j|_V = (I^jM)^\sim$$

となる。

このとき、ある $n \geq 0$ に対し、$\mathscr{G}_n = 0$ となることを示す。そのためには、十分大きな n に対して $I^nM = 0$ を示せば

$$\iota_*\iota^*\mathscr{G}_{n-1}|_V = (I^{n-1}M/I^nM)^\sim = (I^{n-1}M)^\sim = \mathscr{G}_{n-1}|_V$$

より

$$\mathscr{G}_n|_V = \ker(\mathscr{G}_{n-1}|_V \to \bar{\iota}_*\bar{\iota}^*\mathscr{G}_{n-1}|_V) = \ker(\mathscr{G}_{n-1}|_V \to \mathscr{G}_{n-1}|_V) = 0$$

[13] $\iota^{-1}V = \varnothing$ のときは $I = A$ であり、排除する必要はない。

となり、X は有限の V でカバーされるので、十分大きな n を取れば $\mathscr{G}_n = 0$ を得る。

$$I^n M = 0 \Leftrightarrow I^n \subseteq \operatorname{Ann} M \overset{*}{\Leftrightarrow} I \subseteq \sqrt{\operatorname{Ann} M} \Leftrightarrow V(I) \supseteq V(\operatorname{Ann} M)$$

であるが、最後の条件は Exercise II.5.6(b) より $V(\operatorname{Ann} M) = V(\operatorname{Supp} \mathscr{G}|_V) \subseteq V \cap Y = V(I)$ ゆえ成立している (式 (19))。なお、$\overset{*}{\Leftrightarrow}$ は A がネーター環ゆえ I が有限生成であることによる。

さて、$0 \to \mathscr{G}_{j+1} \to \mathscr{G}_j \to \mathscr{G}_j/\mathscr{G}_{j+1} \to 0$ から $\gamma(\mathscr{G}_j) = \gamma(\mathscr{G}_{j+1}) + \gamma(\mathscr{G}_j/\mathscr{G}_{j+1})$ なので

$$\gamma(\mathscr{G}) = \sum_{0 \le j \le n-1} \gamma(\mathscr{G}_j/\mathscr{G}_{j+1})$$

であり、$\mathscr{G}_j/\mathscr{G}_{j+1} \in \operatorname{im} \mu$ から $\gamma(\mathscr{G}) \in \operatorname{im} \mu$ を得る。以上により

$$K(Y) \to K(X) \to (X - Y) \to 0 \qquad \text{(exact)}$$

が成り立つ。

2.6.11

(a) $D = \sum_i n_i P_i$ が effective のとき、対応する subscheme of codimension 1 を

$$(Y, \mathcal{O}_D),\ Y = \{P_i\}_i,\ \mathcal{O}_D := \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathscr{I}_Y \overset{\text{Prop.6.18}}{=} \mathcal{O}_X/\mathscr{L}(-D)$$

とする:

$$0 \to \mathscr{L}(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0,\ \text{exact} \tag{20}$$

Exercise II.5.9 解答中の性質 9 から $\mathcal{O}_Y = \bigoplus_i \mathcal{O}_{Y,P_i}$ となるが、このとき $\mathcal{O}_{Y,P_i} = k(P_i)^{n_i}$ が成り立つ。

($\because$) X の covering として $\{U_i\}_i,\ P_i \in U_i, U_i = \operatorname{Spec} A^i$ とできる。D に対する Cartier Divisor を $(U_i, f_i),\ f_i := t_i^{n_i}, t_i \in \mathcal{O}_{P_i}$: local parameter とする。このとき $\mathcal{O}_{Y,P_i} = \mathcal{O}_{X,P_i}/\mathscr{L}(-D)_{P_i} = A^i_{\mathfrak{p}_i}/(t_i^{n_i})$ であるが (P_i と対応する A^i の prime ideal を $\mathfrak{p}_i$ とした)、$A^i_{\mathfrak{p}_i}/(t_i)^{n_i} = \widehat{A^i_{\mathfrak{p}_i}}/(t_i)^{n_i}$ ([1], Proposition 10.15) であり、$\dim \widehat{A^i_{\mathfrak{p}_i}} = \dim A^i_{\mathfrak{p}_i} = 1$ なので (Theorem I.5.4.A)、Theorem I.5.5A から

$$\widehat{A^i_{\mathfrak{p}_i}}/(t_i)^{n_i} = k[[t]]/\mathfrak{m}^{n_i} = k^{n_i} = k(P_i)^{n_i}$$

となる。($\because$ 終)

以上により $\mathcal{O}_D = \bigoplus_i k(P_i)^{n_i}$ なので、$\psi(D) = \gamma(\mathcal{O}_D)$ を得る。

Effective divisor $D_1 \sim D_2$ に対して、$\mathscr{L}(-D_1) = \mathscr{L}(-D_2)$ より、$\mathcal{O}_{D_1} = \mathcal{O}_{D_2} \Rightarrow \psi(D_1) = \psi(D_2)$ が成り立つ。

一般の divisor $D_1 \sim D_2$ に対しては、$D'_j = D_j + D,\ j = 1, 2$ が effective となるようなある effective divisor D をとることができる。よって $D'_1 \sim D'_2 \Rightarrow \psi(D'_1) = \psi(D'_1)$ であり、ψ は定義から準同型なので $\psi(D_1) = \psi(D_1)$ が成り立つ。

従って $\psi : \mathrm{Cl}\, X \to K(X)$ が定義できる。

(b) 後出の Exercise III.6.8 から、coherent $\mathscr{F}$ は quotient of a locally free sheaf (of finite rank) である。よって locallly free scheme $\mathscr{E}_0$ が存在し、$\mathscr{E}_0 \twoheadrightarrow \mathscr{F}$ は全射となる。

$$0 \to \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_0 \to \mathscr{F} \to 0 \quad \text{exact}$$

ここで $\mathscr{E}_1 = \ker(\mathscr{E}_0 \to \mathscr{F})$ は、捩れのない $\mathscr{E}_0$ の submodule なので locally free である。

Exercise II.5.16(a) より $\wedge^{r_i}\mathscr{E}_i$ は rank 1 かつ locally free なので、$\wedge^{r_i}\mathscr{E}_i \in \mathrm{Pic}\, X,\ \det \mathscr{F} = \wedge^{r_0}\mathscr{E}_0 \otimes (\wedge^{r_1}\mathscr{E}_1)^{-1} \in \mathrm{Pic}\, X$ である。

さて

$$0 \to \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_0 \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F} \to 0 : \text{exact},\ 0 \to \mathscr{E}'_1 \to \mathscr{E}'_0 \xrightarrow{\sigma} \mathscr{F} \to 0 : \text{exact}$$

のとき

$$\wedge^{r_0}\mathscr{E}_0 \otimes (\wedge^{r_1}\mathscr{E}_1)^{-1} = \wedge^{r'_0}\mathscr{E}'_0 \otimes (\wedge^{r'_1}\mathscr{E}'_1)^{-1}$$

となることを示す。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{E}_0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathscr{E}_0 \oplus \mathscr{E}'_0 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \mathscr{E}'_0 \arrow[r] \arrow[d, "0'"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

ここで、$\beta : (a, a') \mapsto \alpha(a) + \sigma(a')$ と定義すると、$\alpha(a)$ の部分が全射なので β も全射、上図式は可換、2 つの行は exact である。

$\ker \alpha = \mathscr{E}_1,\ \ker 0' = \mathscr{E}'_0$ であり、$\mathscr{E} := \ker \beta$ とすると、snake lemma から

$$0 \to \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}'_0 \to \mathrm{coker}\, \alpha = 0 : \text{exact}$$

が得られる。よって

$$\det \mathscr{E}'_0 = \det \mathscr{E} \otimes (\det \mathscr{E}_1)^{-1}$$

となる[14]。同様にして

$$\det \mathscr{E}_0 = \det \mathscr{E} \otimes (\det \mathscr{E}'_1)^{-1}$$

も成り立つので、

$$\det \mathscr{E} = \det \mathscr{E}'_0 \otimes \det \mathscr{E}_1 = \det \mathscr{E}_0 \otimes \det \mathscr{E}'_1$$

$$\Rightarrow \det \mathscr{E}_0 \otimes (\det \mathscr{E}_1)^{-1} = \det \mathscr{E}'_0 \otimes (\det \mathscr{E}'_1)^{-1}$$

を得る。

[14] $0 \to 0 \to \mathscr{E} \to \mathscr{E} \to 0 \Rightarrow \det \mathscr{E} = \wedge^r \mathscr{E} \otimes \wedge^0 0 = \wedge^r \mathscr{E}$

次に

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0 : \text{exact} \Rightarrow \det \mathscr{F} = \det \mathscr{F}' \otimes \det \mathscr{F}'' \tag{21}$$

となることを示す。

$$0 \to \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_0 \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F} \to 0 : \text{exact}$$

とする。

これをもとに下図式を作成する。$\mathscr{E}_0' = \alpha^{-1}(\mathscr{F}')$ とすると[15] 、$\mathscr{F}' \hookrightarrow \mathscr{F}$ より、$\mathscr{E}_0' \hookrightarrow \mathscr{E}_0$ は単射であり、α が全射ゆえ $\beta = \alpha|_{\mathscr{E}_0'} : \mathscr{E}_0' \twoheadrightarrow \mathscr{F}'$ も全射である。また、ここの部分の可換性は明らかである。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{E}_0' \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \mathscr{E}_0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathscr{E}_0'' \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F}' \arrow[r, "\mu"] & \mathscr{F} \arrow[r, "\nu"] & \mathscr{F}'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\mathscr{E}_0'' = \mathscr{E}_0/\mathscr{E}_0'$ とすると $\delta : \mathscr{E}_0/\mathscr{E}_0' \to \mathscr{F}/\mathscr{F}'$ が自然に定義できる。また α, ν とも全射なので、δ も全射であり、この部分も可換である。

snake lemma より

$$0 \to \mathscr{E}_1' := \ker \beta \to \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_1'' := \ker \delta \to 0$$

が得られる。また、

$$0 \to \mathscr{E}_0' \to \mathscr{E}_0 \to \mathscr{E}_0'' \to 0$$

$$0 \to \mathscr{E}_1' := \ker \beta \to \mathscr{E}_0' \to \mathscr{F}' \to 0$$

$$0 \to \mathscr{E}_1'' := \ker \delta \to \mathscr{E}_0'' \to \mathscr{F}'' \to 0$$

が成り立つ。

よって

$$\det \mathscr{E}_1 = \det \mathscr{E}_1' \otimes \det \mathscr{E}_1''$$

$$\det \mathscr{E}_0 = \det \mathscr{E}_0' \otimes \det \mathscr{E}_0''$$

$$\det \mathscr{F} = \det \mathscr{E}_0 \otimes (\det \mathscr{E}_1)^{-1}$$

$$\det \mathscr{F}' = \det \mathscr{E}_0' \otimes (\det \mathscr{E}_1')^{-1}$$

$$\det \mathscr{F}'' = \det \mathscr{E}_0'' \otimes (\det \mathscr{E}_1'')^{-1}$$

から

$$\det \mathscr{F}' \otimes \det \mathscr{F}'' = \det \mathscr{F}$$

[15]Sheaf に対して $\alpha^{-1}(\mathscr{F})$ の定義は明確にはなされていないが、明らかである。

が成立するので

$$\det : K(X) \to \operatorname{Pic} X,\ \sum_i n_i \gamma(\mathscr{F}_i) \mapsto \otimes_i (\det \mathscr{F}_i)^{\otimes n_i}$$

が定義できる。

D が effective のとき $0 \to \mathscr{L}(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0$ なので

$$\det \psi(D) = \det \mathcal{O}_D = \det \mathcal{O}_X \otimes (\det \mathscr{L}(-D))^{-1}$$
$$= \mathcal{O}_X \otimes (\mathscr{L}(-D))^{-1} = \mathcal{O}_X \otimes \mathscr{L}(D) = \mathscr{L}(D)$$

となる[16]。

一般の D に対しては、$D = D_+ - D_-$ とすると、$\psi, \det$ の準同型性から

$$\det(\psi(D)) = \det(\psi(D_+) - \psi(D_-)) = \det \psi(D_+) \otimes (\det \psi(D_-))^{-1}$$
$$= \mathscr{L}(D_+) \otimes (\mathscr{L}(D_-))^{-1} = \mathscr{L}(D_+ - D_-)$$
$$= \mathscr{L}(D)$$

が成り立つ。

(c) まず、$\mathscr{L}(\exists D)^{\oplus r} \to \mathscr{F}$ を証明する。
(証明) X の生成元 η とすると、$r := \operatorname{rank} \mathscr{F}$ より $\mathscr{F}_\eta = \mathcal{O}_\eta^{\oplus r}$ であり、Exercise II.5.7(a) から

$$\mathcal{O}_U^{\oplus r} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}|_U,\ \eta \in U,\ \exists U \subsetneq X$$

となる。

$X - U$ は有限個の closed point $\{P_i\}_i$ からなり、対応して Weil divisor $D = \sum_i P_i$、および Cartier divisor を (U_i, f_i) とする。D が effective なので対応する Cartier divisor も effective、すなわち $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ である (Definition, p.145)。

ここに $(U, 1)$ を追加し、U_i を縮小して P_i を含み他の P_j を含まないようにできる。例えば U_i が P_j を含む場合は、$U_i \cap P_j^c$ とすればよい。また、U_i' が affine となるように縮小できる。

このようにしても $(U_i', f_i'), (U, 1),\ f_i' = f_i|_{U_i'}$ は Cartier divisor である。
($\because$) $X = \bigcup_i U_i' \cup U$ であり、元々$f_i/f_j \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ だったので、$f_i'/f_j' \in \mathcal{O}^*(U_i' \cap U_j')$ である。また、$\forall x \in U \cap U_i'$ に対し $v_x(f_i'|_{U \cap U_i'}) = 0$ ゆえ、次の性質 10 から $f_i'|_{U \cap U_i'}/1 = f_i'|_{U \cap U_i'} \in \mathcal{O}^*(U \cap U_i')$ である。($\because$ 終)

U_i', f_i' を改めて U_i, f_i とし、$U_i = \operatorname{Spec} A^i$ とおく。f_i は A^i において $P_i = V(f_i)$ に対応するもので、$D(f_i) = U \cap U_i \subseteq U$ となる。実際、$P := \mathfrak{p} \in D(f_i) \subseteq U_i \Leftrightarrow f_i \notin \mathfrak{p} \Leftrightarrow v_P(f_i) = 0 \Leftrightarrow P \neq P_i \Leftrightarrow P \in U_i - P_i = U_i \cap U$ である。

$\mathcal{O}_U^{\oplus r} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}|_U$ より $\mathscr{F}(U)$ は r-tupple section $\oplus_{1 \le j \le r} t_j$ から成る。すると、$t_j' := t_j|_{D(f_i)} \in \mathscr{F}(D(f_i))$ から $f_i^{n_{ij}} t_j' \in \mathscr{F}(U_i)$ に拡張でき (Lemma II.5.3(b))、$e = \sum_j \max_i n_{ij}$ とすると、$f_i^e t_j' \in \mathscr{F}(U_i)$ が成り立つ。

$$\mathcal{O}_{U_i}^{\otimes e} f_i^e t_j' \to \mathscr{F}|_{U_i} \otimes \mathcal{O}_{U_i}^{\otimes e} = \mathscr{F}|_{U_i}$$

[16] $\mathscr{L}(0) = \mathscr{L}(D - D) = \mathscr{L}(D) \otimes (\mathscr{L}(D))^{-1} = \mathcal{O}_X,\ \mathscr{L}(-D) = \mathscr{L}(0 - D) = \mathscr{L}(0) \otimes (\mathscr{L}(D))^{-1} = (\mathscr{L}(D))^{-1}$。また $\mathscr{L}$ が invertible のとき $\det \mathscr{L} = \wedge^1 \mathscr{L} = \mathscr{L}$。

$$\Rightarrow (\mathscr{L}(-D)|_{U_i})^{\otimes e} t'_j = \mathscr{L}(-eD)|_{U_i} t'_j \to \mathscr{F}|_{U_i}$$

j について合わせると

$$\mathscr{L}(-eD)|_{U_i}^{\oplus r} \to \mathscr{F}|_{U_i}$$

を得る。

U に関しては既に $\mathscr{L}(-eD)|_U^{\oplus r} = \mathcal{O}_U^{\oplus r} \to \mathscr{F}|_U$ が成立していたので、よって $\mathscr{L}(-eD)^{\oplus r} \to \mathscr{F}$ であり、eD を改めて D とおけば、D は effective で

$$\mathscr{L}(-D)^{\oplus r} \to \mathscr{F}$$

となる。(証明終)

次に、$\mathscr{L}(-D)^{\oplus r} \to \mathscr{F}$ が単射であることを示す。
($\because$) $\varphi : \mathcal{O}_X^{\oplus r} \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}(D)$ が成り立つが、この $\ker\varphi$ は捩れのない local free module の submodule なのでやはり locally free module である。

$l = \operatorname{rank}\ker\varphi$ として $\mathcal{O}_X^{\oplus r}/\ker\varphi = \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}(D)$ の generic point η での stalk をとると

$$\mathcal{O}_\eta^{\oplus r}/(\ker\varphi)_\eta = \mathscr{F}_\eta \otimes \mathscr{L}(D)_\eta$$

$$\Rightarrow k^r/k^l = k^r \otimes_k k = k^r \Rightarrow l = 0$$

よって $\ker\varphi = 0$ となり、$\varphi : \mathcal{O}_X^{\oplus r} \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}(D)$ は単射である。locally free module は flat なので (性質 11)、$\mathscr{L}(-D)^{\oplus r} \to \mathscr{F}$ は単射である。($\because$ 終)

$\mathscr{L}(-D)^{\oplus r} \hookrightarrow \mathscr{F}$ から

$$0 \to \mathscr{L}(-D)^{\oplus r} \to \mathscr{F} \to \mathscr{T} \to 0 : \text{ exact}, \quad \mathscr{T} = \mathscr{F}/\mathscr{L}(-D)^{\otimes r} \tag{22}$$

が得られる。ここで、

$$\operatorname{rank}\mathscr{T} = \dim_K \mathscr{T}_\eta = \dim_K(\mathscr{F}_\eta/\mathscr{L}(-D)_\eta^{\oplus r}) = r - r = 0$$

である。

D の effective 性からの $\psi(D) = \gamma(\mathcal{O}_D)$、式 (22) からの $\gamma(\mathscr{F}) = r\gamma(\mathscr{L}(-D)) + \gamma(\mathscr{T})$、式 (20) からの $\gamma(\mathcal{O}_X) = \gamma(\mathscr{L}(-D)) + \gamma(\mathcal{O}_D)$ を用いると

$$\gamma(\mathscr{F}) - r\gamma(\mathcal{O}_X) = r\gamma(\mathscr{L}(-D)) + \gamma(\mathscr{T}) - r\gamma(\mathcal{O}_X)$$

$$= r(\gamma(\mathscr{L}(-D)) - \gamma(\mathcal{O}_X)) + \gamma(\mathscr{T}) = -r(\gamma(\mathcal{O}_D)) + \gamma(\mathscr{T})$$

$$= -r\psi(D) + \gamma(\mathscr{T})$$

を得る。この中で第 1 項は明らかに $r\psi(D) \in \operatorname{im}\psi$ であるが、第 2 項 $\gamma(\mathscr{T})$ も次に示すように $\operatorname{im}\psi$ に属す。

($\because$) $\eta \notin \operatorname{Supp}\mathscr{T}$ ゆえ $\operatorname{Supp}\mathscr{T} \subsetneq X$ であり ($\operatorname{Supp}\mathscr{T}$ は閉集合、Exercise II.5.6)、$\mathscr{L}(-D)$ は coherent なので coker である $\mathscr{T}$ も coherent、よって Exercise II.6.9 の解答中の性質 9 より $\mathscr{T} = \bigoplus_{P \in \operatorname{Supp}\mathscr{T}} i_P(I_P)$ となり、$P \in U_i$ に対し

$$I_P = \mathscr{T}_P = \mathscr{F}_P/\mathscr{L}(-D)_P^r = \mathcal{O}_P^r/\mathscr{L}(-D)_P^r = (\mathcal{O}_D)_P^r$$

である。$(\mathcal{O}_D)_P$ は (a) で示したように $k(P)^{n_P}$ に等しいので、$\gamma(\mathscr{T}) \in \operatorname{im}\psi$ となる。($\because$ 終)

以上により

$$\gamma(\mathscr{F}) - r\gamma(\mathcal{O}_X) \in \operatorname{im}\psi$$

である。

性質 10. X が normal, noetherian, separated のとき、$v_Y(f) = 0,\ Y \cap U \neq \varnothing,\ f \in K^*,\ \forall Y$: prime divisor ならば $f \in \mathcal{O}^*(U)$

(証明) $f \in \mathcal{O}(U)$ を示せばよい。なぜなら、もしこれが成立すれば、$f^{-1} \in K^*,\ v_Y(f^{-1} = -v_Y(f) = 0$ より $f^{-1} \in \mathcal{O}^*(U)$ だからである。

$Y = \{\eta\}^-$ とし、$U = \bigcup_i U_i,\ U_i = \operatorname{Spec} A^i,\ \eta \in U_i$ とする。

X は normal なので、A^i の任意の prime ideal $\mathfrak{p}_x$ に対して、$A^i_{\mathfrak{p}_x}$: 整閉であり、よって A^i: normal より U_i は p. 130 の $(*)$ を満たす。また $Y \cap U_i = V(\mathfrak{p}_\eta)$ は U_i における prime divisor となる。

$v_Y(f) = 0 \Rightarrow v_{Y\cap U_i}(f|_{U_i}) = 0$ より $f|_{U_i} \in \mathcal{O}_{U_i,\eta} = A^i_{\mathfrak{p}_\eta}$ となるが、$Y \cap U_i \neq \varnothing$ を満たす Y の全体は A^i における $\mathfrak{p}$, $\operatorname{height}(\mathfrak{p}) = 1$ なる $\mathfrak{p}$ 全体に一致するので

$$f|_{U_i} \in \bigcap_{\operatorname{height}(\mathfrak{p})=1} A^i_{\mathfrak{p}} = A^i = \mathcal{O}(U_i) \Rightarrow f \in \mathcal{O}(U)$$

である。(証明終)

性質 11. rank が一定な locally free module は flat である。

(証明) $r = \operatorname{rank}(\mathscr{E})$ で

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0 \ \ \text{exact}$$

とする。すると $\forall x \in X$ に対し

$$0 \to \mathscr{F}'^{\oplus r}_x \to \mathscr{F}^{\oplus r}_x \to \mathscr{F}''^{\oplus r}_x \to 0 \ \ \text{exact}$$

であり

$$(\mathscr{F} \otimes \mathscr{E})_x = \mathscr{F}_x \otimes \mathcal{O}_x^{\oplus r} = \mathscr{F}_x^{\oplus r}$$

から

$$0 \to (\mathscr{F}' \otimes \mathscr{E})_x \to (\mathscr{F} \otimes \mathscr{E})_x \to (\mathscr{F}'' \otimes \mathscr{E})_x \to 0 \ \ \text{exact}$$

となるので

$$0 \to \mathscr{F}' \otimes \mathscr{E} \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{E} \to \mathscr{F}'' \otimes \mathscr{E} \to 0 \ \ \text{exact}$$

が得られる。(証明終)

(d) 次の系列が exact で split していることを示す。

$$0 \to \operatorname{Pic} X = \operatorname{Cl} X \xrightarrow{\psi} K(X) \xrightarrow{\text{rank}} \mathbb{Z} \to 0 : \text{exact} \tag{23}$$

Effective D に対して $\psi(D) = 0$ とすると

$$\gamma(\mathcal{O}_D) = \gamma(\mathcal{O}_X/\mathscr{L}(-D)) = 0 \Rightarrow \gamma(\mathcal{O}_X) - \gamma(\mathscr{L}(-D)) = 0 \Rightarrow \mathcal{O}_X = \mathscr{L}(-D)$$

より得られる $\mathcal{O}_{U_i} f_i = \mathcal{O}_{U_i}$ から f_i は unit、従って $v_P(f_i) = 0 \Rightarrow D = 0$ ゆえ ψ は単射である。

一般の D に対しては、$D = D_+ - D_-$ とすると、ψ は effective $\operatorname{Pic} X$ に対して単射だったので、$0 = \psi(D) = \psi(D_+) - \psi(D_-) \Rightarrow D_+ = D_- \Rightarrow D = 0$ より ψ は単射である。

Effective D に対して、$\operatorname{rank} \psi(D) = \operatorname{rank} \gamma(\mathcal{O}_D) = \operatorname{rank}(\gamma(\mathcal{O}_X/\mathscr{L}(-D))) = 0$ であり、一般の D に対しては、$\psi, \operatorname{rank}$ は準同型なので、$D = D_+ - D_-$ とすると、$\operatorname{rank} \psi(D) = \operatorname{rank} \psi(D_+) - \operatorname{rank} \psi(D_-) = 0 - 0 = 0$、よって $\operatorname{im} \psi \subseteq \ker \operatorname{rank}$ が成り立つ。

一方、$\operatorname{rank} \mathscr{F} = \dim_K \mathscr{F}_\eta = 0$ とすると、(c) より

$$\operatorname{im} \psi \ni \gamma(\mathscr{F}) - \operatorname{rank} \mathscr{F} \gamma(\mathcal{O}_X) = \gamma(\mathscr{F})$$

となる。よって、$\operatorname{im} \psi = \ker \operatorname{rank}$ であり、系列 (23) は exact である。

$\phi : \mathbb{Z} \to K(X),\ n \mapsto n\gamma(\mathcal{O}_X)$ とすると、$\operatorname{rank} \phi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ なので、系列 (23) は split している。従って、

$$K(X) = \operatorname{Pic} X \oplus \mathbb{Z}$$

が成立する。

2.6.12

Sheaf の deg を次のように定義する。

$$\deg : \operatorname{Coh} X \xrightarrow{\gamma} K(X) \xrightarrow{\det} \operatorname{Pic} X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Cl} X \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

この deg は次に示すように (1), (2), (3) を満たす。
(1) $\mathscr{L}(D)$ に対する deg は

$$\deg : \mathscr{L}(D) \mapsto \gamma(\mathscr{L}(D)) \mapsto \det \mathscr{L}(D) = \mathscr{L}(D) \approx D \mapsto \deg D$$

ゆえ、$\deg \mathscr{L}(D) = \deg D$ である。
(2) $\det \mathscr{F} = \mathscr{L}(D),\ D = \sum_P n_P P$ とすると、

$$\deg : \mathscr{F} \to \gamma(\mathscr{F}) \to \det(\mathscr{F}) \approx \mathscr{L}(D) \to \deg D = \sum_P n_P$$

$$\Rightarrow \deg \mathscr{F} = \sum_P n_P$$

である。
　D が effective のとき

$$(\mathcal{O}_D)_\eta = \mathcal{O}_\eta/\mathscr{L}(-D)_\eta = \mathcal{O}_\eta/(\mathcal{O}_\eta f_i) \approx K/K = 0$$

が成り立つ。一般の場合には $D = D_+ - D_-$ とかけ、ψ が準同型なので

$$\psi(D)_\eta = \psi(D_+)_\eta - \psi(D_-)_\eta = \gamma(\mathcal{O}_{D_+})_\eta - \gamma(\mathcal{O}_{D_-})_\eta = 0$$

である。また、前問 (b) より

$$\det \mathscr{F} = \mathscr{L}(D) = \det \psi(D)$$

なので、$\mathscr{F},\ \psi(D)$ は det, rank とも一致し、前問 (d) の

$$K(X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic} X \oplus \mathbb{Z},\ \gamma(\mathscr{F}) \overset{\sim}{\mapsto} (\det \mathscr{F}, \operatorname{rank} \mathscr{F})$$

を用いれば、

$$\mathscr{F} = \psi(D)$$

を得る。このとき、

$$\mathscr{F} = \psi(D) = \sum_{P \in Y} \gamma(k(P)^{\oplus n_P}),\ Y = \{P | n_P \neq 0\},$$

$k(P)$ は skyscraper ゆえ

$$\mathscr{F}_Q = \begin{cases} k(P)^{\oplus n_P} & : Q = \exists P \in Y \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

から $Q \in \operatorname{Supp} \mathscr{F} \Leftrightarrow Q = \exists P \in Y$、すなわち $Y = \operatorname{Supp} \mathscr{F}$ である。
　すると、

$$\mathscr{F}_P = (\psi(D))_P = k(P)^{\oplus n_P}$$

$$\Rightarrow \operatorname{length} \mathscr{F}_P = \operatorname{length} k(P)^{\oplus n_P} = \dim_k k(P)^{\oplus n_P} = n_P$$

ゆえ、

$$\deg \mathscr{F} = \sum_P n_P = \sum_P \operatorname{length} \mathscr{F}_P$$

が成り立つ。
(3) 完全系列

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0 :\ \text{exact}$$

に対して、式 (21) から $\det \mathscr{F} = \det \mathscr{F}' \otimes \det \mathscr{F}''$ が成り立つが、$\det \mathscr{F} = \mathscr{L}(D)$ 等とすると

$$\mathscr{L}(D) = \mathscr{L}(D') \otimes \mathscr{L}(D'') = \mathscr{L}(D' + D'')$$

$$\Rightarrow D = D' + D'' \Rightarrow \deg(D) = \deg(D') + \deg(D'')$$

$$\Rightarrow \deg \mathscr{F} = \deg \mathscr{F}' + \deg \mathscr{F}'$$

従って、deg は準同型である。

(1)∼(3) を満たす $\deg : \mathrm{Coh}\, X \to \mathbb{Z}$ の一意性について。

(1), (2) により $\deg \mathscr{L}(D)$, $\deg(T)$, T : torsion sheaf については一意的に決まる。式 (22) の

$$0 \to \mathscr{L}(D)^{\oplus r} \to \mathscr{F} \to \mathscr{T} \to 0 : \text{ exact}$$

と (3) より

$$\deg \mathscr{F} = r \deg \mathscr{L}(D) + \deg \mathscr{T}$$

が成り立つので[17] 、$\deg \mathscr{F}$ も一意的に決まる。

References

[1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald: Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, 1963

[2] 河田敬義: ホモロジー代数 I, 岩波, 1976

[3] Lawrence Washington: Elliptic Curves, Chapman & Hall/CRC, 2003

[4] 松坂和夫: 代数系入門, 岩波, 1976

[17] $0 \to \mathscr{G}^{\oplus(r-1)} \to \mathscr{G}^{\oplus r} \to \mathscr{G} \to 0 : \text{exact} \Rightarrow \gamma(\mathscr{G}^{\oplus r}) = \gamma(\mathscr{G}^{\oplus(r-1)}) + \gamma(\mathscr{G}) \Rightarrow \deg \mathscr{G}^{\oplus r} = r \deg \mathscr{G}$