2 Schemes

2.5 Sheaves of Modules

2.5.1

$$\check{\mathscr{E}} := \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathcal{O}_X)$$

(**a**) Morphism

$$\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)$$

が存在する。
($\because$) $\mathscr{F} := \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)$ とおく。φ を次のように定義する。
$\forall U \subseteq X$ に対し

$$\varphi(U) : \mathscr{E}(U) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}((\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathcal{O}_X))|_U, \mathcal{O}_U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathscr{E}|_U, \mathcal{O}_U), \mathcal{O}_U)$$

$$s \mapsto (t : \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathscr{E}|_U, \mathcal{O}_U) \to \mathcal{O}_U)$$

$$t(V) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathscr{E}|_V, \mathcal{O}_V) \to \mathcal{O}(V),\ V \subseteq U$$

$$(f_V : \mathscr{E}|_V \to \mathcal{O}_V) \mapsto t(V)(f_V) = (f_V(V))(s|_V) \in O(V)$$

ここで f_V がsheaf morphism(制限写像と compatible) なので、t も sheaf morphism となる:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathscr{E}|_V, \mathcal{O}_V) \ni (f_V : \mathscr{E}|_V \to \mathcal{O}_V) & \xrightarrow{t(V)} & f_V(V)(s|_V) \in \mathcal{O}(V) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_W}(\mathscr{E}|_W, \mathcal{O}_W) \ni (f_V|_W : \mathscr{E}|_W \to \mathcal{O}_W) & \xrightarrow{t(W)} & f_V|_W(W)(s|_W) = f_V(W)(s|_W) \in \mathcal{O}(W)
\end{array}$$

よって φ も次に示すように sheaf morphism となる:

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{E}(V) \ni s|_V & \xrightarrow{\varphi(V)} & (t|_V : \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathscr{E}_V, \mathcal{O}_V) \to \mathcal{O}_V) \in \mathscr{F}(V) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{E}(W) \ni s|_W & \xrightarrow{\varphi(W)} & (t|_W : \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_W}(\mathscr{E}_W, \mathcal{O}_W) \to \mathcal{O}_W) \in \mathscr{F}(W)
\end{array}$$

($\because$ 終)

$X = \bigcup U$ に対し $\mathscr{E}|_U = \mathcal{O}_U^n$ とする。このとき、性質 (1) から

$$\check{\mathscr{E}}|_U = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathscr{E}|_U, \mathcal{O}_U) = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U^n, \mathcal{O}_U)$$

$$= (\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_U))^n = \mathcal{O}_U^n \tag{1}$$

より $\check{\mathscr{E}}$ も locally free であり、よって

$$\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\check{\mathscr{E}}, \mathcal{O}_X)|_U = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_U}(\check{\mathscr{E}}|_U, \mathcal{O}_U) = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U^n, \mathcal{O}_U) = \mathcal{O}_U^n = \mathscr{E}|_U$$

が成り立つ。従って任意の $x \in X$ に対し

$$\mathscr{E}_x = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\check{\mathscr{E}}, \mathcal{O}_X)_x$$

となり、φ が存在することと合わせると、

$$\mathscr{E} \approx \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)$$

すなわち

$$\check{\check{\mathscr{E}}} \approx \mathscr{E}$$

を得る。

性質 **1.**

$$\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathscr{F}) \approx \mathscr{F} \tag{2}$$

(証明) まず

$$\sigma_X : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}(X) \tag{3}$$

が存在することを示す。

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathscr{F})$ に属す $\phi_X : \mathcal{O}_X \to \mathscr{F}$ は sheaf morphism である。このとき、$\sigma_X(\phi_X)$ を次式で定義する:

$$\sigma_X : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathscr{F}) \to \mathscr{F}(X)$$

$$(\phi_X : \mathcal{O}_X \to \mathscr{F}) \mapsto \phi_X(X)(1_{\mathcal{O}(X)})$$

逆に、$s \in \mathscr{F}(X)$ が与えられれば $\psi(X)(1_{\mathcal{O}(X)}) = s$ を満たす $\mathcal{O}(X)$-morphism $\psi(X)$ が一意的に定まる。さらに、$V \subseteq X$ に対しては、$\psi(V)$ を $\psi(V)(1_{\mathcal{O}(V)}) = s|_V$ で定義すると、この $\psi(V)$ も一意的である。すると

$$(\psi(X)(a_X))|_V = (a_X\psi(X)(1_{\mathcal{O}(X)}))|_V = a_V s|_V = \psi(V)(a_V),\ a_V = \rho_{XV} a_X \in \mathcal{O}(V)$$

となるので、ψ は制限写像と compatible であり、$\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathscr{F})$ となる。よって σ_X は module morphism として全射であり、$\psi(V)$ の一意性から単射でもあるので、σ_X は同型である。

式 (3) による

$$\sigma_U : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, \mathscr{F}|_U) \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}(U) \tag{4}$$

から

$$\sigma : \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathscr{F}) \to \mathscr{F}$$

が得られる ($\sigma(U) := \sigma_U$)。

$\phi_U : \mathcal{O}_U \to \mathscr{F}$ が sheaf morphism で制限写像と compatible なので

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, \mathscr{F}|_U) \ni \phi_U \arrow[r, "\sigma(U)"] \arrow[d] & \phi_U(U)(1_{\mathcal{O}(U)}) \in \mathscr{F}(U) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_V, \mathscr{F}|_V) \ni \phi_U|_V \arrow[r, "\sigma(V)"] & \phi_U|_V(V) = \phi_U(V)(1_{\mathcal{O}(V)}) \in \mathscr{F}(V)
\end{tikzcd}$$

から、σ も制限写像と compatible で sheaf morphism となる。式 (4) から stalk が等しくなり、sheaf morphism が存在するので、

$$\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathscr{F}) \approx \mathscr{F}$$

である。

(**b**) まず

$$\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F} \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \tag{5}$$

が存在することを示す。
($\because$) $U \subseteq X$ のとき、$\varphi^U \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathscr{E}|_U, \mathcal{O}_U)$ と $s \in \mathscr{F}(U)$ の対に、$\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{F})(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathscr{E}|_U, \mathscr{F}|_U)$ の次の元 ϕ_U を対応させる。

$$\phi_U(V) : \mathscr{E}(V) \to \mathscr{F}(V),\ e \mapsto \varphi^U(V)(e)s|_V,\ \forall V \subseteq U$$

この ϕ_U は、φ^U が sheaf morphism なので制限写像と compatible であり、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathscr{E}|_U, \mathscr{F}|_U)$ に属す。また、双線形写像なので

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathscr{E}|_U, \mathcal{O}_U) \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathscr{F}(U) = (\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F})^{\mathrm{pre}}(U)$$

$$\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathscr{E}|_U, \mathscr{F}|_U) = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{F})(U)$$

が存在する。この写像も、ϕ_U と φ^U が sheaf morphism なので、制限写像と compatible となる。

よって、

$$(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F})^{\mathrm{pre}} \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$$

が存在し、従って

$$\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F} \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$$

も存在する。
($\because$ 終)

$\mathscr{E}$ が locally free なので、X のカバー $X = \bigcup U$ に対し、$\mathscr{E}|_U = \mathcal{O}_U^n$ と書ける。すると、

$$(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F})^{\mathrm{pre}}(U) = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}(U)}(\mathscr{E}, \mathcal{O}_X)(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathscr{F}(U)$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathscr{E}|_U, \mathcal{O}_U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathscr{F}(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U^n, \mathcal{O}_U) \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathscr{F}(U)$$
$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_U)^n \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathscr{F}(U) \overset{\#}{=} \mathcal{O}(U)^n \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathscr{F}(U)$$
$$= (\mathcal{O}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathscr{F}(U))^n = \mathscr{F}(U)^n$$

ここで $\overset{\#}{=}$ は性質 (1) による。一方、

$$(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{F}))(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathscr{E}|_U, \mathscr{F}|_U)$$
$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U^n, \mathscr{F}|_U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, \mathscr{F}|_U)^n = \mathscr{F}(U)^n$$

より

$$(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F})^{\mathrm{pre}}(U) = (\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{F}))(U)$$

が成立する。

よって、

$$(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F})^{\mathrm{pre}}_x = (\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{F}))_x, \ \forall x \in X$$

が成り立ち

$$(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F})_x = (\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{F}))_x$$

となるので、式 (5) と併せて

$$\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F} \approx \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$$

を得る。

(**c**) まず

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{G}))$$

の存在を示す。

$\psi : \mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ に対し、$\varphi(\psi) : \mathscr{F} \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{G})$ を (以下、$\varphi(\psi)$ を $\varphi\psi$ とも記す)

$$\begin{aligned}
&(\varphi\psi)(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathscr{E}|_U, \mathscr{G}|_U) \\
&\qquad s \mapsto ((\varphi\psi)(U))(s) : \mathscr{E}|_U \to \mathscr{G}|_U \\
&\qquad\qquad (((\varphi\psi)(U))(s))(V) : \mathscr{E}(V) \to \mathscr{G}(V), \ \forall V \subseteq U \\
&\qquad\qquad\qquad t \mapsto (((\varphi\psi)(U))(s))(V)(t) := \psi(V)(\theta(V)(t \otimes s|_V))
\end{aligned}$$

で定義する。ここで、θ は sheafification morphism $\theta : (\mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F})^{\mathrm{pre}} \to \mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F}$ である。

$((\varphi\psi)(U))(s)$ の restriction map との compatibility は、ψ, θ が compatible なので下図式から明らかである。

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}(V) \ni t \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \psi(V)(\theta(V)(t \otimes s|_V)) \in \mathscr{G}(V) \arrow[d, mapsto] \\
\mathscr{E}(W) \ni t|_W \arrow[r, mapsto] & \psi(W)(\theta(W)(t|_W \otimes s|_W)) \in \mathscr{G}(W)
\end{tikzcd}$$

従って $((\varphi\psi)(U))(s) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathscr{E}|_U, \mathscr{G}|_U)$ である。

そして $\varphi\psi$ の restriction map との compatibility も、$((\varphi\psi)(U))(s)$ の compatibility を用いて同様に証明できるので、$\varphi\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{G}))$ となる。よって、φ の存在が示された。

次に φ が単射であることを示す。$\varphi(\psi) = 0$ とすると

$$(((\varphi(\psi))(X))(s))(X)(t) = \psi(X)(\theta(X)(t \otimes s)) = 0,\ \forall s, \forall t$$

なので、$\psi(X)\theta(X) = 0$ となり、よって $\forall U \subseteq X$ に対して $\psi(U)\theta(U) = \rho_{XU}(\psi(X)\theta(X)) = 0$ から $\psi\theta = 0$ が成り立つ。すると sheafification の U. P. から $\psi = 0$ を得る。

最後に φ が全射であることを示す。Sheaf morphism として

$$\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{G})$$

が与えられると

$$\alpha(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}|_U, \mathscr{G}|_U)$$

$$s \mapsto \alpha(U)(s) : \mathscr{E}|_U \to \mathscr{G}|_U$$

$$(\alpha(U)(s))(V) : \mathscr{E}(V) \to \mathscr{G}(V),\ V \subseteq U$$

$$t \mapsto (\alpha(U)(s))(V)(t)$$

となるので

$$\sigma : (\mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F})^{\mathrm{pre}} \to \mathscr{G}$$

を次のように定義できる。

$$\sigma(U) : \mathscr{E}(U) \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$$

$$t \otimes s \mapsto (\alpha(U)(s))(U)(t)$$

ここで $(t, s) \mapsto (\alpha(U)(s))(U)(t)$ の双線形性を用いた。

α が sheaf morphism なので、σ も restriction map と compatible である。

さらに sheafification の U. P. から map $\theta : (\mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F})^{\mathrm{pre}} \to \mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F}$ を用いると

$$\sigma = \delta\theta$$

を満たす sheaf morphism

$$\delta : \mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F} \to \mathscr{G}$$

が一意的に存在する。

ここで得られた δ は $\varphi(\delta) = \alpha$ を満たすことを示す。
$\forall s \in \mathscr{F}(U),\ \forall t \in \mathscr{E}(V),\ \forall V \subseteq U$ に対し

$$(((\varphi(\delta))(U))(s))(V)(t) = \delta(V)(\theta(V)(t \otimes s|_V)) = \sigma(V)(t \otimes s)$$

$$= (\alpha(V)(s|_V))(V)(t) = (\alpha(U)(s))|_U(V)(t) = (\alpha(U)(s))(V)(t)$$

から

$$(\varphi(\delta))(U)(s)(V) = \alpha(U)(s)(V) \Rightarrow (\varphi(\delta))(U)(s) = \alpha(U)(s)$$

$$\Rightarrow \varphi(\delta)(U) = \alpha(U) \Rightarrow \varphi(\delta) = \alpha$$

を得る[1]。
なお、$\mathscr{E}$ は locally free でなくても

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F}, \mathscr{G}) \approx \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{G}))$$

は成立する。

(**d**) $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ に対し、Y のカバーの一つ V で $\mathscr{E}|_V = \mathcal{O}_V^n$ とする。

$$\overline{f} = f|_U : U = f^{-1}(V) \to V$$

とおく。

$$f_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathscr{E})|_V \overset{(10)}{=} \overline{f}_*((\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathscr{E})|_U) = \overline{f}_*(\mathscr{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} (f^*\mathscr{E})|_U) \overset{(11)}{=} \overline{f}_*(\mathscr{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \overline{f}^*(\mathscr{E}|_V))$$

$$= \overline{f}_*(\mathscr{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \overline{f}^*(\mathcal{O}_V^n)) \overset{@}{=} \overline{f}_*(\mathscr{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_U^n) = \overline{f}_*((\mathscr{F}|_U)^n) = (\overline{f}_*(\mathscr{F}|_U))^n = ((f_*\mathscr{F})|_V)^n$$

$$(f_*\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{E})|_V \overset{(9)}{=} (f_*\mathscr{F})|_V \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathscr{E}|_V = (f_*\mathscr{F})|_V \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{O}_V^n = ((f_*\mathscr{F})|_V \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{O}_V)^n = ((f_*\mathscr{F})|_V)^n$$

ここで、$\overset{@}{=}$ は、一般に $f : X \to Y$ に対して

$$f^*\mathcal{O}_Y = f^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X \tag{6}$$

が成り立つことによる。

---

[1] 一般に、sheaf $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ に対して

$$\mathscr{F}(U) \overset{\pm}{=} \mathscr{G}(U),\ \forall U \subseteq X \Rightarrow \mathscr{F} = \mathscr{G}$$

である。ここで、$\overset{\pm}{=}$ は実際に=であることが重要で、単に $\cong$ では成立するとは限らない。

以上により、$\mathscr{E}|_V = \mathcal{O}_V^n,\ Y = \bigcup V$ となる V に関しては

$$(f_*\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{E})(V) \overset{\sim}{\to} (f_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathscr{E}))(V)$$

が成立する。従って、任意の点において stalk が一致する。

$$f_*\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{E} \overset{\%}{\to} f_*\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*f^*\mathscr{E} \overset{(13)}{\to} f_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathscr{E})$$

より、両者の間に sheaf morphism が存在するので、

$$f_*\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{E} \approx f_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathscr{E})$$

が成立する。なお、$\overset{\%}{\to}$ は p. 110 の Adjoint Property

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathscr{G}, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}))$$

において、$\mathscr{G} \leftarrow \mathscr{E},\ \mathscr{F} \leftarrow f^*\mathscr{E}$ と代入すれば得られる $\mathscr{E} \to f_*f^*\mathscr{E}$ を用いている。

性質 **2.**

$$(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G})_x \overset{\cong}{=} \mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{G}_x,\ x \in X \tag{7}$$

(証明) $(\mathscr{F}(U), \mathscr{G}(U)) \to \mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{G}_x,\ (s,t) \mapsto s_x \otimes_{\mathcal{O}_x} t_x$ が双線形写像なので、$\mathscr{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathscr{G}(U) \to \mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{G}_x,\ (s,t) \mapsto s_x \otimes_{\mathcal{O}_x} t_x$ が存在する。従って、$\mathscr{H} = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G},\ \mathscr{H}^- = (\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G})^{\mathrm{pre}}$ とおくと、$x \in U \subseteq X$ に対し次の図式が得られる。ここで 3 つの区域は可換である。

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}^-(U) \arrow[r, "\theta_U"'] \arrow[rr, bend left, "\gamma_U"] \arrow[dr, "\mu'_U"'] & \mathscr{H}(U) \arrow[r, "\sigma_U"'] \arrow[d, "\mu_U"] & \mathscr{F}_x \otimes \mathscr{G}_x \\
& \mathscr{H}_x \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

まず

$$\alpha : \mathscr{H}_x \to \mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{G}_x,\ h_x \mapsto s_x \otimes t_x$$

は順極限の U.P. から得られる。

次に

$$\beta : \mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{G}_x \to \mathscr{H}_x$$

を定義する。$s_x \otimes t_x \in \mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{G}_x$ とすると、$s_x = s_U \in \mathscr{F}(U),\ t_x = t_U \in \mathscr{G}(U)$ とみなせる $x \in \exists U \subseteq X$ が存在し ([1], Exercise 2.15 よりこのような s_U, t_U が一意的に存在するとみなせる)、$s_x \otimes_{\mathcal{O}_x} t_x$ に対して $s_U \otimes_{\mathcal{O}(U)} t_U \in \mathscr{H}'(U)$ が一意的に存在する。

すると、$\gamma_U = \alpha\mu'_U$ から

$$s_U \otimes t_U \overset{\mu'_U}{\mapsto} h_x \overset{\alpha}{\mapsto} s_x \otimes t_x$$

となる $h_x \in \mathscr{H}_x$ が一意に存在するので、

$$\beta : \mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{G}_x \to \mathscr{H}_x,\ s_x \otimes t_x \mapsto h_x$$

が存在する。

作り方から

$$\alpha\beta = \mathrm{id}_{\mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{G}_x},\ \beta\alpha = \mathrm{id}_{\mathscr{H}_x}$$

となるのは明らかである。

性質 **3.** $f : X \to Y$ に対し

$$f^{-1}(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{G}) = f^{-1}\mathscr{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathscr{G} \tag{8}$$

が成り立つ。特に、$U \subseteq X$ のとき

$$(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G})|_U = \mathscr{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathscr{G}|_U \tag{9}$$

(証明) 順極限への写像 $\mathscr{F}(V) \to f^{-1}\mathscr{F}$, $\mathscr{G}(V') \to f^{-1}\mathscr{G}$, $\mathcal{O}_Y(V") \to f^{-1}\mathcal{O}_X$ において、$W = V \cap V' \cap V" \supseteq f(U)$ をとれることから、$V, V', V"$ は等しくでき

$$f^{-1}\mathscr{F}(U) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y(U)} f^{-1}\mathscr{G}(U) = \lim_{V \supseteq f(U)} \mathscr{F}(V) \otimes_{\lim_{V" \supseteq f(U)} \mathcal{O}_Y(V")} \lim_{V' \supseteq f(U)} \mathscr{G}(V')$$

$$= \lim_{W \supseteq f(U)} (\mathscr{F}(W) \otimes_{\mathcal{O}_Y(W)} \mathscr{G}(W)) = f^{-1}(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{G})(U)$$

となる ([3], 6 章 5 節, 例題 11, p.316)。

従って

$$(f^{-1}\mathscr{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathscr{G})^{\mathrm{pre}}(U) = (f^{-1}(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{G}))^{\mathrm{pre}}(U)$$

が等式で成り立つので、presheaf として等しく、よって sheaf としても等しい:

$$f^{-1}\mathscr{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathscr{G} = f^{-1}(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{G})$$

性質 **4.** $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ のとき、

$$\overline{f} = f|_{f^{-1}(V)} : f^{-1}(V) \to V,\ V \subseteq Y$$

とすると

$$(f_*\mathscr{F})|_V = \overline{f}_*(\mathscr{F}|_{f^{-1}(V)}) \tag{10}$$

$$(f^*\mathscr{G})|_{f^{-1}(V)} = \overline{f}^*(\mathscr{G}|_V) \tag{11}$$

が成り立つ[2]。

[2] $f^{-1}(V) = \varnothing$ のときは、式 (10), (11), (12) とも $0 = 0$ となるが、やはり成立する。

(証明) $\forall W \subseteq V$ とすると、$\overline{f}^{-1}(W) = f^{-1}(W),\ \overline{f}^{-1}(W) \subseteq \overline{f}^{-1}(V)$ であり、

$$(f_*\mathscr{F})|_V(W) = (f_*\mathscr{F})(W) = \mathscr{F}(f^{-1}(W))$$

$$(\overline{f}_*(\mathscr{F}|_{f^{-1}(V)}))(W) = \mathscr{F}|_{f^{-1}(V)}(\overline{f}^{-1}(W)) = \mathscr{F}(\overline{f}^{-1}(W)) = \mathscr{F}(f^{-1}(W))$$

より $(f_*\mathscr{F})|_V(W) = (\overline{f}_*(\mathscr{F}|_{f^{-1}(V)}))(W)$ である。この恒等射は当然制限写像と compatible なので式 (10) は成立する。

式 (11) に関しては、$U = f^{-1}(V)$ に対してまず

$$(f^{-1}\mathscr{G})|_U = \overline{f}^{-1}(\mathscr{G}|_V) \tag{12}$$

を示す。
$(\because)$ $W \subseteq U$ に対して、$\overline{f}(W) = f(W) \subseteq V$ より

$$(\overline{f}^{-1}(\mathscr{G}|_V))^{\mathrm{pre}}(W) = \varinjlim_{W' \supseteq \overline{f}(W)} \mathscr{G}|_V(W') = \varinjlim_{W' \supseteq f(W)} \mathscr{G}|_V(W')$$

$$\overset{\$}{=} \varinjlim_{W' \supseteq f(W)} \mathscr{G}(W') = (f^{-1}\mathscr{G})^{\mathrm{pre}}(W) \to (f^{-1}\mathscr{G})(W) = (f^{-1}\mathscr{G})|_U(W)$$

から $(\overline{f}^{-1}(\mathscr{G}|_V))^{\mathrm{pre}} \to (f^{-1}\mathscr{G})|_U$ が存在し、従って

$$\overline{f}^{-1}(\mathscr{G}|_V) \to (f^{-1}\mathscr{G})|_U$$

が成り立つ。なお、$\overset{\$}{=}$ は、$W' \supseteq f(W)$ の極限を W' は渡るので、$V \supseteq f(W)$ から $W' \subseteq V$ となるからである。

一方、$x \in U$ に対し

$$\overline{f}^{-1}(\mathscr{G}|_V)_x = (\mathscr{G}|_V)_{f(x)} = \mathscr{G}_{f(x)}$$

$$((f^{-1}\mathscr{G})|_U)_x = (f^{-1}\mathscr{G})_x = \mathscr{G}_{f(x)}$$

なので、上式と合わせて

$$\overline{f}^{-1}(\mathscr{G}|_V) = (f^{-1}\mathscr{G})|_U$$

を得る。$(\because$ 終$)$

さて、

$$(f^*\mathscr{G})|_U \overset{(9)}{=} (f^{-1}\mathscr{G})|_U \otimes_{(f^{-1}\mathcal{O}_Y)|_U} \mathcal{O}_X|_U$$

$$\overline{f}^*(\mathscr{G}|_V) = \overline{f}^{-1}(\mathscr{G}|_V) \otimes_{\overline{f}^{-1}\mathcal{O}_V} \mathcal{O}_X|_U = (f^{-1}\mathscr{G})|_U \otimes_{(f^{-1}\mathcal{O}_Y)|_U} \mathcal{O}_X|_U$$

より式 (11) が成立する。

なお、式 (11) では $U \subseteq f^{-1}(V)$ となる開集合 U でも $\overline{f} : U \to V$ とすると、そのまま証明は成り立つ (式 (10) では成立しない)。

性質 5.

$$f_*\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*\mathscr{G} \to f_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G}) \tag{13}$$

(証明) $V \subseteq Y$ に対し

$$(f_*\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*\mathscr{G})^{\mathrm{pre}}(V) = (f_*\mathscr{F})(V) \otimes_{\mathcal{O}_V} (f_*\mathscr{G})(V)$$

$$= \mathscr{F}(f^{-1}(V)) \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathscr{G}(f^{-1}(V) = (\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G})^{\mathrm{pre}}(f^{-1}(V))$$

$$\to (\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G})(f^{-1}(V)) = f_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G})(V)$$

よって

$$(f_*\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*\mathscr{G})^{\mathrm{pre}} \to f_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G})$$

から

$$f_*\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*\mathscr{G} \to f_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G})$$

を得る。

2.5.2

R を K における DVR、極大 ideal を $\mathfrak{m}$、$X = \operatorname{Spec} R = \{(0), \mathfrak{m}\},\ K = \operatorname{Frac} R$ とする。

X の開集合は $\{\varnothing, \{(0)\}, X\}$ なので、$\eta = (0),\ U = \{\eta\}$ とすると、η を含む開集合は U と X、$\mathfrak{m}$ を含む開集合は X のみである。

$$\mathcal{O}(U) = \lim_{\eta \in V} \mathcal{O}(V) = \mathcal{O}_\eta = K$$

$$\mathcal{O}(X) = R$$

(**a**) $\mathcal{O}_X$-module $\mathscr{F}$ が存在するとき。

$$M := \mathscr{F}(X);\ R\text{-module}$$

$$M_\eta = M \otimes_R R_\eta = M \otimes_R K$$

$$L := \mathscr{F}(U) = \mathscr{F}_\eta;\ K\text{-module}$$

このとき、商加群の U.P. から $\rho_{XU} = \rho\mu$ を満たす

$$\rho : M_\eta = M \otimes_R K \to \mathscr{F}_\eta = L$$

が一意に存在する。ここで、μ は局所化の準同型写像である。

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho_{XU}"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathscr{F}_\eta = L \\ M_\eta \arrow[ur, "\exists!\rho"'] & \end{tikzcd} \tag{14}$$

逆に $M : R$-module、$L : K$-module、$\rho : M \otimes_R K \to L$ が存在するとき。$\mathscr{F}$ を次のように定義する。$\eta = (0) \subseteq R$ とする。

$$\mathscr{F}(X) = M$$

$$\mathscr{F}(U) = L$$

ここで

$$\rho_{XL} = \rho\mu : \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(U)$$

が制限写像となり、$\mathscr{F}$ は sheaf である。

(**b**) 次式が成立する。

$$\mathscr{F}\text{: quasi-coherent} \Leftrightarrow \varphi : \tilde{M} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F},\ M = \Gamma(X, \mathscr{F}) : R\text{-module} \overset{**}{\Longleftrightarrow} \varphi_\eta : M_\eta \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_\eta$$

なお、φ_η は $\rho_{XU} = \varphi_\eta \mu$ を満たすので、既に述べた ρ の一意性から $\rho = \varphi_\eta$ である。また $\overset{**}{\Longleftarrow}$ が成立するのは、$X = \{\eta, \mathfrak{m}\}$ において、$M_\eta \approx \mathscr{F}_\eta$ であり、

$$M_\mathfrak{m} = M = \mathscr{F}(X) = \lim_{\mathfrak{m} \in V} \mathscr{F}(V) = \mathscr{F}_\mathfrak{m}$$

から ($\mathfrak{m}$ を含む開集合は X のみ)、$\mathscr{F}$ と $\tilde{M}$ は stalk で一致し、Exe. 5.3 より $\tilde{M} \to \mathscr{F}$ が成り立つからである。

2.5.3

まず、$\tilde{M} \to \mathscr{F}$ の global section を取ることにより

$$\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \mathscr{F}) \to \mathrm{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathscr{F}))$$

が存在するのは明らかである。

$\varphi : M \to \mathscr{F}(X)$ とし、$X = \bigcup D(f)$ に対して φ_f を

$$\varphi_f : \tilde{M}(D(f)) = M_f \to \mathscr{F}(D(f))$$

$$m/f^i \mapsto \varphi(m)|_{D(f)}/f^i$$

と定義する。ここで、$\mathscr{F}(D(f))$ は $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$-module なので $1/f^i \in A_f$ より $\varphi(m)|_{D(f)}/f^i \in \mathscr{F}(D(f))$ である。特に $\varphi_f(m/1) = \varphi(m)|_{D(f)}$ である。

$D(f) \cap D(g) = D(fg)$ なので、Theorem 3.3, Step 3, p.88 より $(\varphi_f)_{fg} = (\varphi_g)_{fg}$ が成立すれば、φ_f から $\tilde{M} \to \mathscr{F}$ を構成できる。

$$(\varphi_f)_{fg} : (M_f)_{fg} = M_{fg} \ni \frac{m}{(fg)^i} = \frac{m/1}{(fg)^i}$$

$$\mapsto \frac{\varphi_f(m/1)|_{D(fg)}}{(fg)^i} = \frac{(\varphi(m)|_{D(f)})|_{D(fg)}}{(fg)^i} \overset{***}{=} \frac{\varphi(m)|_{D(fg)}}{(fg)^i} \in \mathscr{F}(D(fg))$$

ここで $\overset{***}{=}$ は $\mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(D(f)) \to \mathscr{F}(D(fg))$ と $\mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(D(fg))$ が等しいことによる。よって

$$(\varphi_f)_{fg}(\frac{m}{(fg)^i}) = \frac{\varphi(m)|_{D(fg)}}{(fg)^i} = (\varphi_g)_{fg}(\frac{m}{(fg)^i})$$

より

$$(\varphi_f)_{fg} = (\varphi_g)_{fg}$$

を得る。

従って、$\tilde{M} \to \mathscr{F}$ であり、

$$\beta : \mathrm{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathscr{F})) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \mathscr{F})$$

の存在が示された。

$\alpha\beta = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_A(M,\Gamma(X,\mathscr{F}))}$ を示す。
$\beta(\varphi) : \tilde{M} \to \mathscr{F}$ は

$$\varphi_f : \tilde{M}(D(f)) \to \mathscr{F}(D(f)), m/f^i \mapsto \varphi(m)|_{D(f)}/f^i$$

から得られた sheaf morphism であり、その global section

$$M \to \mathscr{F}(X), m \mapsto \varphi(m)$$

は φ である。global section を取ることが α なので $\alpha\beta(\varphi) = \varphi$ となる。

次に $\beta\alpha = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M},\mathscr{F})}$ を示す。
Sheaf morphism $\sigma : \widetilde{M} \to \mathscr{F}$ に対し $\alpha(\sigma) = \sigma(X)$ であり、$\sigma(X)|_{D(f)} = \sigma(D(f))$ を glue した sheaf morphism は σ に他ならない (sheaf 構成の一意性)。よって $\beta\alpha = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M},\mathscr{F})}$ である。

以上により

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \mathscr{F}) \approx \mathrm{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathscr{F}))$$

が成り立つ。

2.5.4

$\mathcal{O}_X$-module $\mathscr{F}$ を quasi-coherent とすると、$\forall x \in X$ に対し $x \in U$, $U = \mathrm{Spec}\, A$ となる open affine U が存在し、$\mathscr{F}|_U = \tilde{M}$, $M : A$-module とできる (Proposition 5.4)。

M が A-module ゆえ M の生成元 $\{m_i\}_{i \in I}$ が存在し、

$$\varphi : A^I \twoheadrightarrow M,\ \{\oplus a_i\} \mapsto \sum a_i m_i$$

となるので

$$\ker\varphi \hookrightarrow A^I \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} M \to 0 : \mathrm{exact}$$

が得られる。ここで、$\ker\varphi \subseteq A^I$ も A-module なので、同様に $\psi : A^J \twoheadrightarrow \ker\varphi$ となる A^J が存在し、$\psi : A^J \twoheadrightarrow \ker\varphi = \mathrm{im}\psi \hookrightarrow A^I$ と見なせる。よって、

$$A^J \xrightarrow{\psi} A^I \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} M \to 0 : \text{exact} \tag{15}$$

$$M = A^I/\mathrm{im}\psi = \operatorname{coker}\psi$$

である。Proposition 5.2(a) より

$$\mathcal{O}_U^J \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathcal{O}_U^I \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathscr{F}|_U \to 0 : \text{exact}$$

から $\mathscr{F}|_U = \mathcal{O}_U^I/\ker\tilde{\varphi} = \mathcal{O}_U^I/\mathrm{im}\tilde{\psi} = \operatorname{coker}\tilde{\psi}$ を得る。

逆に $\forall x \in X$ に対し、$\mathscr{F}|_U = \mathcal{O}_U^I/\mathrm{im}\,\tilde{\psi}$、すなわち

$$\mathcal{O}_U^J \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathcal{O}_U^I \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathscr{F}|_U \to 0 : \text{exact}$$

とする。$\mathcal{O}_U^I, \mathcal{O}_U^J$ は quasi-coherent なので Proposition 5.7 より $\operatorname{coker}\tilde{\psi} = \mathscr{F}|_U$ は quasi-coherent、よって $\mathscr{F}$ 自体も quasi-coherent である。

X が noetherian とする。Proposition 3.2 より A は noetherian である。$\mathscr{F}$ が coherent ならば、Proposition 5.4 から M は有限生成 A-module で

$$0 \to \ker\varphi \to A^I \xrightarrow{\varphi} M \to 0 : \text{ exact}, \ |I| < \infty$$

とかけるが、X が neotherian なので noetherian A^I の sub A-module $\ker\varphi$ は有限生成であり、式 (15) と同様にして

$$A^J \xrightarrow{\psi} A^I \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} M \to 0 : \text{exact}, \ |I| < \infty, |J| < \infty$$

を得る。よって Proposition 5.2(a) から

$$\mathcal{O}_U^J \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathcal{O}_U^I \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathscr{F}|_U \to 0 : \text{exact}$$

が得られ、

$$\mathscr{F}|_U = \mathcal{O}_U^I/\mathrm{im}\,\tilde{\psi} = \operatorname{coker}\tilde{\psi}, \ \tilde{\psi} : \mathcal{O}_U^J \to \mathcal{O}_U^I, \ |I| < \infty, |J| < \infty$$

となる。

逆は明らかである。

2.5.5

(**a**) $X = \operatorname{Spec} k[x], \ Y = \operatorname{Spec} k$ とし、$k \to k[x]$ に対応する morphism を $f : X \to Y$ とする。

$\mathscr{F} = \mathcal{O}_X = \widetilde{k[x]}$ において $k[x]$ は有限生成 $k[x]$-module ゆえ $\mathscr{F}$ は coherent である。

一方 $f_*\mathscr{F}$ は quasi-coherent なので (Proposition 5.8(c))、ある k-module N によって $f_*\mathscr{F} = \tilde{N}$ とかけ (Y の非空開集合は Y のみ)、$\Gamma(Y, f_*\mathscr{F}) = \tilde{N}(Y) = N$ となるが、$(f_*\mathscr{F})(Y) = \mathcal{O}_X(X) = k[x]$ ゆえ $N = k[x]$ である。$k[x]$ は有限生成 k-module ではないので、$f_*\mathscr{F}$ は coherent ではない。

(**b**) $f : X \to Y$ を closed immersion とする。

Y の任意の open affine $V = \operatorname{Spec} B$ に対し、$U = f^{-1}(V)$ とおくと、closed immersion は local property なので (Exercise 2.4.3 の証明における性質 2)、f の制限 $f_U : U \to V$ も closed immersion となる。

よって $f(U) = \operatorname{Spec} B/\mathfrak{b},\ \mathfrak{b} \subseteq B$ とかけ (Exercise 3.11(b) or Corollary 5.10)、$B/\mathfrak{b}$ は有限生成 B-module なので (生成元は $1_{B/\mathfrak{b}}$)、Exercise 3.4 より f は finite である。

(**c**) Noetherian scheme 間の finite morphism を $f : X \to Y$ とする。

Exercise II.3.4 より、Y の任意の affine affine $V = \operatorname{Spec} B$ に対して $U = f^{-1}(V) = \operatorname{Spec} A$ とかける。

また $\mathscr{F}$ は coherent なので、$\mathscr{F}|_U = \tilde{M},\ M$: finitely generated A-module となる。このとき $\overline{f} = f|_U : U \to V$ とおくと性質 (4) から

$$(f_*\mathscr{F})|_V = \overline{f}_*(\mathscr{F}|_U) = \overline{f}_*(\tilde{M}) = \widetilde{{}_B M}$$

が得られる。

M は有限生成 A-module であり、A は有限生成 B-module なので、${}_B M$ は有限生成 B-module となる。従って $f_*\mathscr{F}$ は coherent である。

2.5.6

(**a**) $m_\mathfrak{p}$ は germ であり $m \in M = \tilde{M}(X)$ は global section なので $m_\mathfrak{p} = m|_{V_\mathfrak{p}} = m/1 \in M_\mathfrak{p}$ である ($\mathfrak{p} \in \exists V_\mathfrak{p}$)。

$$\mathfrak{p} \notin \operatorname{Supp} m \Leftrightarrow m_\mathfrak{p} = m/1 = 0 \Leftrightarrow \exists t \in \mathfrak{p}^c, tm = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{p}^c \cap \operatorname{Ann} m \neq \varnothing \Leftrightarrow \mathfrak{p} \not\supseteq \operatorname{Ann} m \Leftrightarrow \mathfrak{p} \notin V(\operatorname{Ann} m)$$

従って

$$\operatorname{Supp} m = V(\operatorname{Ann} m) \tag{16}$$

である。

(**b**)M の生成元を $\{m^i\}_{i \in I},\ |I| < \infty$ とすると

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} \tilde{M} \Leftrightarrow M_\mathfrak{p} \neq 0 \Leftrightarrow m^i_\mathfrak{p} \neq 0, \exists i \in I \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} m^i, \exists i \in I$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann} m^i), \exists i \in I \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in \bigcup_{i \in I} V(\operatorname{Ann} m^i) = V(\bigcap_{i \in I} \operatorname{Ann} m^i)$$

ここで

$$a \in \operatorname{Ann} M \Leftrightarrow aM = 0 \Leftrightarrow am^i = 0,\ \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow a \in \operatorname{Ann} m^i,\ \forall i \in I \Leftrightarrow a \in \bigcap_{i \in I} \operatorname{Ann} m^i$$

から $\operatorname{Ann} M = \bigcap_{i \in I} \operatorname{Ann} m^i$ なので

$$\operatorname{Supp} \mathscr{F} = V(\operatorname{Ann} M) \tag{17}$$

が成立する。

(**c**) X は noetherian なので

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i,\ U_i = \operatorname{Spec} A_i,\quad |I| < \infty$$

とかけ、

$$\mathscr{F}|_{U_i} = \tilde{M}_i,\ M_i : \text{finitely generated } A_i\text{-module}$$

となる (Proposition 5.4)。
上記 (b) から

$$\operatorname{Supp} \mathscr{F} \cap U_i = \operatorname{Supp} \mathscr{F}|_{U_i} = V(\operatorname{Ann} M_i)$$

は U_i における閉集合となるので、Exercise 2.3.5 の性質 3. から $\operatorname{Supp} \mathscr{F}$ は X で閉集合である。

(**d**) $X = \operatorname{Spec} A$ は noetherian なのでその部分集合 U も noetherian、よって Proposition 5.8(c) から $i_*(\mathscr{F}|_U)$ は quasi-coherent である。
このとき、Exercise II.1.20 より得られる

$$0 \to \mathscr{H}_Z^0(\mathscr{F}) \hookrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} i_*(\mathscr{F}|_U) : \text{ exact}$$

において $\ker \varphi$ は quasi-coherent であり、$\mathscr{H}_Z^0(\mathscr{F}) \approx \ker \varphi$ より、$\mathscr{H}_Z^0(\mathscr{F})$ も quasi-coherent となる。
$\Gamma_Z(\mathscr{F})$ は $\Gamma_Z(X, \mathscr{F})$ のことと思われるが、A は noetherian なので $\mathfrak{a}$ は有限生成であり、

$$m \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \Leftrightarrow \mathfrak{a}^n m = 0,\ \exists n > 0 \Leftrightarrow a^l m = 0,\ \forall a \in \mathfrak{a},\ \exists l > 0$$

$$\Leftrightarrow a \in \sqrt{\operatorname{Ann} m},\ \forall a \in \mathfrak{a} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\operatorname{Ann} m}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{\operatorname{Ann} m} \Leftrightarrow V(\mathfrak{a}) = Z \supseteq V(\operatorname{Ann} m) = \operatorname{Supp} m \Leftrightarrow m \in \Gamma_Z(\mathscr{F})$$

より $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \Gamma_Z(\mathscr{F})$ となる。
さて、$\mathscr{H}_Z^0(\mathscr{F})$ は quasi-coherent なので、

$$\mathscr{H}_Z^0(\mathscr{F}) = (\mathscr{H}_Z^0(\mathscr{F}))(X)^\sim = \Gamma_{Z \cap X}(X, \mathscr{F}|_X)^\sim = \Gamma_Z(X, \mathscr{F})^\sim = \Gamma_Z(\mathscr{F})^\sim$$

であり、よって今示したことから

$$\mathscr{H}_Z^0(\mathscr{F}) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)^\sim$$

を得る。

(**e**) X の open affine covering の一つを $U = \operatorname{Spec} A$ とすると

$$Z \cap U = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a},\ \mathscr{F}|_U = \tilde{M}$$

とかける。

A が noetherian のとき、$\mathscr{F}$ が quasi-coherent ならば前述の (d) から

$$\mathscr{H}_Z^0(\mathscr{F})|_U = \mathscr{H}_{Z\cap U}^0(\mathscr{F}|_U) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)^\sim$$

となるので、$\mathscr{H}_Z^0(\mathscr{F})$ は quasi-coherent である。

$\mathscr{F}$ が coherent のときは $\mathscr{F}|_U = \tilde{M}$ となる M は finitely generated A-module である。A が noetherian なので M も noetherian、よって M の submodule $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ も finitely generated A-module となる。ゆえに $\mathscr{H}_Z^0(\mathscr{F})|_U = \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)^\sim$ から $\mathscr{H}_Z^0(\mathscr{F})$ は coherent である。

2.5.7

X の開被覆の一つを $U = \operatorname{Spec} A$ とし、$\mathscr{F}|_U = \tilde{M}$、$M$: finitely generated A-module、M の生成元を $\{m_j\}_{j\in J},\ |J| < \infty$ とする。

(**a**) $x \in U$ に対応する A の prime ideal を $\mathfrak{p}$ とする。$\mathscr{F}_x = \mathcal{O}_x^I$ のとき $M_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}^I$ は free module であり、各 m_j に対応する $M_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}^I$ の元 $\{m_j/1\}_{j\in J}$ はその生成元なので、$M_{\mathfrak{p}}$ の rank $|I|$ は $|J|$ 以下で有限である。$n := |I|$ とおく。

m_j の $M_{\mathfrak{p}}$ への像を

$$m_j/1 = \oplus_{i\in I} a_{ij}/f_{ij} \in A_{\mathfrak{p}}^n,\ a_{ij} \in A,\ f_{ij} \in A - \mathfrak{p} \tag{18}$$

とする。$\{m_j/1\}_{j\in J}$ は $A_{\mathfrak{p}}^n$ を生成するので、$A_{\mathfrak{p}}^n$ の基底 $\{e_i = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0)\}_{i\in I}$ は

$$e_i = \sum_{j\in J} (b_{ij}/g_{ij})(m_j/1),\ b_{ij} \in A,\ g_{ij} \in A - \mathfrak{p},\ i \in I \tag{19}$$

とかける。

ここで $h = \prod_{i\in I, j\in J} f_{ij} g_{ij}$ とすると $h \notin \mathfrak{p}$ である。式 (18)、(19) から $m_j/1$ は A_h^n に属し、

$$M_h \ni m/h^r = (\sum_j a_j m_j)/h^r = \sum_j (a_j/h^r)(m_j/1)$$

より $M_h \subseteq A_h^n$ となり、かつ $\{m_j/1\}_{j\in J}$ は M_h を生成する。

一方、A_h^n の任意の元は

$$\sum_{i\in I}(c_i/h^{k_i})e_i = \sum_{i\in I}(c_i/h^{k_i})\sum_{j\in J}(b_{ij}/g_{ij})(m_j/1)$$

$$= \sum_{j\in J}\sum_{i\in I}(c_ib_{ij})/(h^{k_i}g_{ij})(m_j/1),\ c_i \in A$$

とかけ、$\sum_{i\in I}(c_ib_{ij})/(h^{k_i}g_{ij}) \in A_h$ となるので、これは M_h に属す。

以上により $M_h = A_h^n$ となることがわかった。よって

$$F|_{D(h)} = (F|_U)|_{D(h)} = \widetilde{M}|_{D(h)} = \widetilde{M_h} = \widetilde{A_h^n} = \widetilde{A_h}^n = \mathcal{O}_{D(h)}{}^n$$

を得る[3] 。

(**b**) 上記 (a) より明らかである。

(**c**) Invertible sheaf $\mathscr{E}$ において、$x \in X$ とすると、式 (1) から $\check{\mathscr{E}}$ も invertible sheaf なので

$$(\mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \check{\mathscr{E}})_x = \mathscr{E}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \check{\mathscr{E}}_x = \mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_x = \mathcal{O}_x$$

である。一方、Exercise II.5.1(c) において $\mathscr{F} \Leftarrow \check{\mathscr{E}},\ \mathscr{G} \Leftarrow \mathcal{O}_X$ とすれば $\mathscr{E} \otimes \check{\mathscr{E}} \to \mathcal{O}_X$ が得られるので

$$\mathscr{E} \otimes \check{\mathscr{E}} \approx \mathcal{O}_X$$

が成り立つ。

逆に $\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G} = \mathcal{O}_X$ とすると、$x \in X$ に対し $\mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{G}_x = \mathcal{O}_x$ となる。Local ring $\mathcal{O}_x$ の極大 ideal $\mathfrak{m}$ に対し $k := \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}$ とすると

$$k = k \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_x = k \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{G}_x = (k \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{F}_x) \otimes_k (k \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{G}_x)$$

が得られるが、$k \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{F}_x,\ k \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{G}_x$ は k-ベクトル空間であり、次元の積が 1 なので、結局それぞれの次元が 1 である。従って、$k \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{F}_x$ は k 上一つの元で生成される。

[1], Exercise 2.2 より $k \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{F}_x = \mathscr{F}_x/(\mathfrak{m}\mathscr{F}_x)$ なので、$\mathscr{F}_x/(\mathfrak{m}\mathscr{F}_x)$ が $k = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}$ 上一つの元で生成されることになるが、すると [1], Proposition 2.8 から $\mathscr{F}_x$ が $\mathcal{O}_x$ 上一つの元 v で生成される:

$$\mathscr{F}_x = \mathcal{O}_x v$$

ここで $a \in \operatorname{Ann} \mathscr{F}_x \subseteq \mathcal{O}_x$ とすると $a\mathscr{F}_x = 0$ となるが、すると

$$a\mathcal{O}_x = a(\mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{G}_x) = (a\mathscr{F}_x) \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathscr{G}_x = 0$$

より $a = a1 = 0$ となる。よって、$\mathscr{F}_x \approx \mathcal{O}_x$ が成り立つ。

既に示した (b) から $\mathscr{F}|_U \approx \mathcal{O}|_U$ が得られるので、$\mathscr{F}$ は invertible である。

[3] $\widetilde{M_h} = (\widetilde{M}(D(h)))^{\sim} = \Gamma(D(h), \widetilde{M}|_{D(h)})^{\sim} = \widetilde{M}|_{D(h)}$

2.5.8

(**a**) $U=\{x\in X|\varphi(x)<n\}$ が開集合であることを示す。
X の開被覆を $\{U_i\}_{i\in I}$ とすると

$$U:\text{open}\Leftrightarrow U\cap U_i:\text{open},\ \forall i\in I$$

より、本題は local で考えてよく、$X=\operatorname{Spec}A,\ x=\mathfrak{p}\subseteq A$ とできる。
$\mathscr{F}$ は coherent なので有限生成 A-module M を用いて $\mathscr{F}=\tilde{M}$ とかける。M の生成元を $\{m_j\}_{j\in J},\ |J|<\infty$ とおく。
$r:=\varphi(x)<n$ とすると、[1], Exercise 2.2 より

$$\mathscr{F}_x\otimes_{\mathcal{O}_x}k(x)=M_\mathfrak{p}\otimes_{A_\mathfrak{p}}A_\mathfrak{p}/\mathfrak{m}_\mathfrak{p}=M_\mathfrak{p}/(\mathfrak{m}_\mathfrak{p}M_\mathfrak{p})$$

は r 次元ベクトル空間であり、その基底を与える $M_\mathfrak{p}$ の原像 $\{e_1,\cdots,e_r\}$ は $A_\mathfrak{p}$ 上 $M_\mathfrak{p}$ を生成する ([1], Proposition 2.8)。このとき、$m_j/1\in M_\mathfrak{p}$ は

$$m_j/1=\sum_i b_{ij}/g_{ij}e_i,\ b_{ij}\in A,g_{ij}\in A-\mathfrak{p} \tag{20}$$

とかける。他方 e_i は $M_\mathfrak{p}$ の元であり、$\{m_j\}_{j\in J}$ が M の生成元なので

$$e_i=(\sum_j a_{ij}m_j)/f_i=\sum_j(a_{ij}/f_i)m_j,\ a_{ij}\in A,f_i\in A-\mathfrak{p}$$

とかける。ここで

$$h=\prod_{ij}f_ig_{ij}\notin\mathfrak{p}$$

とすると、$x=\mathfrak{p}\in D(h)$ なので、e_i は M_h の元とみなせる。$m_j/1$ も同様である。

$\mathfrak{q}\in D(h)$ に対して $M_\mathfrak{q}$ は $A_\mathfrak{q}$ 上 $\{e_1,\cdots,e_r\}$(の像) で生成できる。——(%)
($\because$) $e_i,\ m_j/1$ は M_h とみなせるが、$M_h\to M_\mathfrak{q}$ よりそれら (の像) は $M_\mathfrak{q}$ の元となる。$M_\mathfrak{q}$ の任意の元は

$$m/c=\sum_j d_jm_j/c=\sum_{ij}(d_jb_{ij})/(cg_{ij})e_i,\ d_j\in A,\ c\in A-\mathfrak{q}$$

とかけるが、もし $g_{ij}\in\mathfrak{q}$ とすると $h\in\mathfrak{q}$ となってしまい $\mathfrak{q}\in D(h)$ に反する。よって $g_{ij}\notin\mathfrak{q}$ であり、従って $cg_{ij}\notin\mathfrak{q}$ となることから、m/c は $A_\mathfrak{q}$ 上 $\{e_1,\cdots,e_r\}$ で生成される。($\because$ 終)
$M_\mathfrak{q}$ が $A_\mathfrak{q}$ 上 $\{e_1,\cdots,e_r\}$ で生成されることから、$M_\mathfrak{q}/(\mathfrak{m}_\mathfrak{q}M_\mathfrak{q})$ の次元は r 以下、すなわち、$\varphi(\mathfrak{q})\leq r$ から $\mathfrak{q}\in U$ となり、よって

$$x\in D(h)\subseteq U$$

を得る。これは U が開集合であることを示している。

(**b**) まず、$\varphi^{-1}(n)$ が開集合であることを示す (ここでは X は connected でなくてもよい)。
($\because$) $U = \varphi^{-1}(n) \neq \varnothing$ とする。$\mathscr{F}$ が locally free なので、$x \in U$ に対し $\mathscr{F}_x$ は free であり、すると前演習 Exercise II.5.7(a) より

$$\mathscr{F}|_V = \mathcal{O}_V^r,\ \exists r > 0,\ \exists V \ni x$$

となる。すると

$$\varphi(x) = \dim_{k(x)} \mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x) = \dim_{k(x)} \mathcal{O}_x^r \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x) = \dim_{k(x)} k(x)^r = r \quad (21)$$

であり、一方 $\varphi(x) = n$ だったので、$r = n$ である。よって、$\mathscr{F}|_V = \mathcal{O}_V^n$ より式 (21) と同様にして $\varphi(y) = n,\ \forall y \in V$ が成り立ち、$V \subseteq U$ から U は開集合となる。($\because$ 終)
さて、φ が定数関数でないとすると、$|\mathrm{Im}\,\varphi| \geq 2$ であり、$\mathrm{Im}\,\varphi \subseteq \mathbb{Z}$ には最小数 n が存在する。すると

$$X = \varphi^{-1}(n) \cup \bigcup_{i>n} \varphi^{-1}(i)$$

より X は disjoint な 2 つの開集合の和集合となり connectivity に反する。
従って φ は定数関数である。

(**c**) (a) における記法を用いる。
$\varphi(X) = n$ とする。Local に証明すればよいので、$X = \mathrm{Spec}\,A$ としてよい。
(%) に示したことから、$\forall \mathfrak{q} \in D(h)$ に対して $M_\mathfrak{q}$ は $A_\mathfrak{q}$ 上 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ で生成される (今の場合は $r = n$ である)。従って $M_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}M_\mathfrak{q}$ は $\{e_1, \cdots, e_n\}$(の像) で生成されるが、$M_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}M_\mathfrak{q}$ は n 次元ベクトル空間なので $\{e_1, \cdots, e_n\}$ はそこで基底をなすはずである。

$\{m_j\}_{j \in J}$ は M を生成するので式 (20) より M_h は A_h 上 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ で生成されるが、それらは基底をなす。
($\because$) M_h における線形従属式 $\sum_i a_i/h^{n_i} e_i = 0,\ a_i \in A$ が成り立つとすると、$h \notin \mathfrak{q}$ よりこの式は $M_\mathfrak{q}$ の式とみなせる。分母を払った式を $\sum_i a'_i e_i = 0$ とすると、これを $M_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}M_\mathfrak{q}$ へ移すと $\{e_1, \cdots, e_n\}$ は基底をなすので、係数=0、すなわち $a'_i \in \mathfrak{q}$ であり、$a'_i = a_i h^t$ より $a_i \in \mathfrak{q}$ となる。

$$A_h \supseteq \mathfrak{q} : prime\,ideal \Leftrightarrow h \notin \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{q} \in D(h)$$

から

$$\mathfrak{N}(A_h) = \bigcap_{\mathfrak{q} \subseteq A_h} \mathfrak{q} = \bigcap_{\mathfrak{q} \in D(h)} \mathfrak{q} \ni a_i$$

となるが、X が reduced なので $\mathfrak{N}(A_h) = (\mathfrak{N}(A))_h = 0$ より $a_i = 0$、すなわち $\{e_1, \cdots, e_n\}$ は基底をなす。($\because$ 終)

従って M_h は free、すなわち $M_h = A_h^n$ であるが、Corollary 5.5 から $\widetilde{M_h} = \widetilde{A_h^n}$ となる。

$$\tilde{M}|_{D(h)} = \widetilde{M_h} = \widetilde{A_h^n} = \mathcal{O}_{D(h)}^n$$

において、$x = \mathfrak{p} \in D(h)$ だったので、$\mathscr{F} = \tilde{M}$ は locally free である。

2.5.9

(**a**) 118 頁の定義に述べてあるように、$m \in M_d$ は自然に global section $m/1 \in \Gamma(X, \tilde{M}(d))$ を与えるので[4]、

$$M \to \Gamma_* \tilde{M} = \oplus_{d \in \mathbf{Z}} \Gamma(X, \tilde{M}(d))$$

が存在する。

(**b**) Example 4.8.1 から $X = \operatorname{Proj} S$ は projective over A である。

$\mathscr{F} = \tilde{M},\ N = \Gamma_* \mathscr{F}$ とする。$N = M$ とは限らないが、Proposition 5.15 より $\tilde{N} = \tilde{M}$ なので

$$M' \hookrightarrow N \ \Rightarrow\ \tilde{M}' \hookrightarrow \tilde{N} = \tilde{M} \ \Rightarrow\ \tilde{M}'(n) \hookrightarrow \mathscr{F}(n)$$

であり、Theorem 5.19 の証明をなぞることができ、M は有限生成 A-module としてよい。以下、断らない限り系列は exact である。

$$0 \to M^{i-1} \to M^i \to M^i/M^{i-1} \to 0 \tag{22}$$

$$\Rightarrow\ 0 \to M_d^{i-1} \to M_d^i \to (M^i/M^{i-1})_d \to 0 \tag{23}$$

一方、Proj の場合でも funtor $\tilde{}$ は exact 性を保存するので[5]、式 (22) より

$$0 \to \tilde{M}^{i-1} \to \tilde{M}^i \to (M^i/M^{i-1})^\sim \to 0$$

$$\Rightarrow\ 0 \to \tilde{M}^{i-1}(n) \to \tilde{M}^i(n) \to (M^i/M^{i-1})^\sim(n) \to 0$$

$$\Rightarrow\ 0 \to \Gamma(X, \tilde{M}^{i-1}(n)) \to \Gamma(X, \tilde{M}^i(n)) \to \Gamma(X, (M^i/M^{i-1})^\sim(n)) \tag{24}$$

となる。

一般に $\varphi : M \to N$ に対して

$$\begin{tikzcd} M_d \ni m_d \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \varphi(m_d) \in N_d \arrow[d, mapsto] \\ \Gamma(X, \tilde{M}(d)) \ni m_d/1 \arrow[r, mapsto] & \varphi(m_d)/1 \in \Gamma(X, \tilde{N}(d)) \end{tikzcd}$$

[4] $M(d)_0$ は d 次の元からなるため、$M_d \to \Gamma(X, \tilde{M}(d))$ は次数を保存する morphism である。

[5] Exact 系列について

$$L \to M \to N \ \Rightarrow\ L_\mathfrak{p} \to M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p} \ \Rightarrow\ L_{(\mathfrak{p})} \to M_{(\mathfrak{p})} \to N_{(\mathfrak{p})} \ \Rightarrow\ \tilde{L}_\mathfrak{p} \to \tilde{M}_\mathfrak{p} \to \tilde{N}_\mathfrak{p} \ \Rightarrow\ \tilde{L} \to \tilde{M} \to \tilde{N}$$

は可換なので、式 (23), (24) より

$$
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& \ker\alpha \arrow[r] \arrow[d] & \ker\beta \arrow[r] \arrow[d] & \ker\gamma \arrow[d] \arrow[dddll, bend right] & \\
& M_d^{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & M_d^i \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & (M^i/M^{i-1})_d \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma(X, \tilde{M}^{i-1}(d)) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X, \tilde{M}^i(d)) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X, (M^i/M^{i-1})^{\sim}(d)) \arrow[d] & \\
& \operatorname{coker}\alpha \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}\beta \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}\gamma \arrow[d] & \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

を得る。(a) から $\alpha, \beta\,\gamma$ は存在する。行、列は全て exact であり、また snake lemma から

$$\ker\alpha \to \ker\beta \to \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma$$

も exact である。

ここで γ が isomorphism なら β も isomorphism となる。($\because$) γ: isomorphism より $\ker\gamma = 0,\ \operatorname{coker}\gamma = 0$、また帰納法の仮定から α も isomorphism ゆえ $\ker\alpha = 0,\ \operatorname{coker}\alpha = 0$ である。よって

$$0 \to \ker\beta \to 0 : \ \text{exact}$$

$$0 \to \operatorname{coker}\beta \to 0 : \ \text{exact}$$

となり、β は全単射である。($\because$ 終)

以上により γ が isomorphism であることを示せばよい。これは $M^i/M^{i-1} = (S/\mathfrak{p}_i)(n_i)$ から

$$(M^i/M^{i-1})_d = (S/\mathfrak{p}_i)(n_i)_d = (S/\mathfrak{p}_i)_{n_i+d}$$

$$\Gamma(X, (M^i/M^{i-1})^{\sim}(d)) = \Gamma(X, ((S/\mathfrak{p}_i)(n_i)^{\sim}(d)) = \Gamma(X, (S/\mathfrak{p}_i)^{\sim}(n_i + d))$$

なので、Theorem 5.19 の記法に従えば $S_n = S'_n$ を示すことになる。

Theorem 5.19 証明の最後にある通り S' は有限生成 S-module なので、生成元を $\{s'_i\}_{i\in I},\ |I| < \infty$ とすると、$s'_i \in S'$ から、証明にあるように $S_{\geq n_i} s'_i \subseteq S_{\geq n_i}$ が成り立つ。ここで $d_0 = \max_i\{\deg s'_i + n_i\}$ とおけば $S'_{\geq d_0} \subseteq S_{\geq d_0}$ となる。

一方、$S' \supseteq S$ だったので、結局

$$S'_n = S_n,\ n \geq d_0$$

が成立する。

(**c**) $\mathcal{C}_{\mathrm{qfg}}$ を quasi-finitely generated S-modules modulo $\approx$ のカテゴリー、$\mathcal{C}_{\mathrm{coh}}$ を coherent $\mathcal{O}_X$-module のカテゴリーとする。

$$\alpha : \mathcal{C}_{\mathrm{qfg}} \to \mathcal{C}_{\mathrm{coh}},\ M \mapsto \tilde{M}$$

$$\beta : \mathcal{C}_{\mathrm{coh}} \to \mathcal{C}_{\mathrm{qfg}},\ \mathscr{F} \mapsto \Gamma_* \mathscr{F}$$

が定義できることを示す。

$M \in \mathcal{C}_{\mathrm{qfg}}$ とすると $\sigma : M_{\geq d} \xrightarrow{\sim} M'_{\geq d},\ \exists M'$: finitely generated S-module である。

まず $\varphi : \widetilde{M} \to \widetilde{M'}$ を次のように定義する。開集合 $U \subseteq X$ に対し、$\mathfrak{p} \in U$ とすると $f \notin \mathfrak{p}$ となる生成元 $f \in S_1$ が存在するので

$$s \in \tilde{M}(U) \ \Rightarrow s_{\mathfrak{p}} = m/t = mf^d/(tf^d) \overset{\sim}{\mapsto} m'/(tf^d) \in \tilde{M}'(U),\ t \notin \mathfrak{p} \tag{25}$$

が得られるが、ここでもし $f \notin \mathfrak{p}$ でなく別の $g \notin \mathfrak{p}$ を用いたとすると

$$g^d \sigma(f^d m) = \sigma(g^d f^d m) = f^d \sigma(g^d m) \Rightarrow \sigma(mf^d)/tf^d = \sigma(mg^d)/tg^d$$

が成り立つので、$\varphi(U) : \tilde{M}(U) \hookrightarrow \tilde{M}'(U)$ は well-define に定義できる。

φ は制限写像と compatible なので sheaf morphism である ((∵) $s \mapsto s'$ に対して $f \notin \mathfrak{p} \in V \subseteq U$ は $s|_V \mapsto s'|_V$ にも使えるので、$s|_V \mapsto s'|_V$ と $s \mapsto s'$ は V で等しい)。

同様に sheaf morphism $\psi : \tilde{M}' \hookrightarrow \tilde{M}$ も存在し、$\psi\varphi = \mathrm{id}_{\tilde{M}},\ \varphi\psi = \mathrm{id}_{\tilde{M}'}$ なので $\tilde{M} \cong \tilde{M}'$ を得る。

なお、式 (25) と同様にして

$$M \approx N \ \Rightarrow \ \tilde{M} \cong \tilde{N}$$

となるので、$\alpha : \mathcal{C}_{\mathrm{qfg}} \to \mathcal{C}_{\mathrm{coh}}$ が定義できる。

次に、$\mathscr{F}$ を coherent とすると、Theorem 5.19 の証明から $\mathscr{F} = \tilde{M}$ となる有限生成 S-module が存在する。(b) より $\Gamma_* \mathscr{F} = \Gamma_* \tilde{M} \approx M$ ゆえ $\Gamma_* \mathscr{F} \in \mathcal{C}_{\mathrm{qfg}}$ となるので、$\beta : \mathcal{C}_{\mathrm{coh}} \to \mathcal{C}_{\mathrm{qfg}},\ \mathscr{F} \mapsto \Gamma_* \mathscr{F}$ が存在する。

(b) より $\Gamma_* \tilde{M} \approx M$ なので $\beta\alpha = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_{\mathrm{qfg}}}$ である。一方 Proposition 5.15 より $(\Gamma_* \mathscr{F})^\sim = \mathscr{F}$ なので $\alpha\beta = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_{\mathrm{coh}}}$ である。従って $\mathcal{C}_{\mathrm{qfg}}$ と $\mathcal{C}_{\mathrm{coh}}$ は同値となる。

2.5.10

(**a**) $S = A[x_0, \cdots, x_r]$ を A 上多項式環、I をその斉次イデアルとする。

$$s \in \overline{I} \Rightarrow x_i^{n_i} s \in I \Rightarrow f x_i^{n_i} s = x_i^{n_i} f s \in I, f \in S \Rightarrow fs \in \overline{I}$$

$$s,t \in \overline{I} \Rightarrow x_i^{n_i}s, x_i^{m_i}s \in I \Rightarrow x_i^{n_i+m_i}(s+t) = x_i^{m_i}x_i^{n_i}s + x_i^{n_i}x_i^{m_i}t \in I$$
$$\Rightarrow s+t \in \overline{I}$$

より $\overline{I}$ はイデアルである。また

$$s = \oplus_{d\geq 0}s_d \in \overline{I} \Rightarrow x_i^{n_i}s = x_i^{n_i} \oplus_{d\geq 0} s_d = \oplus_{d\geq 0}x_i^{n_i}s_d \in I$$

において、$x_i^{n_i}s_d$ は斉次ゆえ $x_i^{n_i}s_d \in I \Rightarrow s_d \in \overline{I}$ となることから、$\overline{I}$ は斉次イデアルである。

(**b**) Closed subscheme $Y \subseteq X$ と $\mathscr{I}_Y = \widetilde{I}$ は 1 対 1 に対応している (Proposition 5.9)。従って

$$\widetilde{I^1} = \widetilde{I^2} \Leftrightarrow \overline{I^1} = \overline{I^2}$$

を示せばよい。
($\Rightarrow$) 斉次元 s に対し $d_s = \deg s$ とおくと

$$s \in \overline{I^1} \Rightarrow t := x_i^{n_i}s \in I^1 \Rightarrow s/1 = t/x_i^{n_i} \in I^1_{x_i} \Rightarrow s/x_i^{d_s} \in I^1_{(x_i)}$$

ここで、

$$I^1_{(x_i)} = \widetilde{I^1}|_{D_+(x_i)} = \widetilde{I^2}|_{D_+(x_i)} = I^2_{(x_i)}$$

から

$$s/x_i^{d_s} \in I^2_{(x_i)} \Rightarrow s/x_i^{d_s} = r/x_i^{d_r},\ r \in I^2 \Rightarrow x_i^n s = x_i^m r \in I^2 \Rightarrow s \in \overline{I^2}$$

となり $\overline{I^1} = \overline{I^2}$ が成り立つ。
($\Leftarrow$) まず、$I_{(x_i)} = \overline{I}_{(x_i)}$ を示す。実際

$$s/x_i^{d_s} \in \overline{I}_{(x_i)}, s \in \overline{I} \Rightarrow x_i^{n_i}s \in I \Rightarrow s/x_i^{d_s} \in I_{(x_i)}$$

である。
すると

$$\widetilde{I}|_{D_+(x_i)} = (I_{(x_i)})^{\sim} = (\overline{I}_{(x_i)})^{\sim} = \widetilde{\overline{I}}|_{D_+(x_i)}$$

であり、$I \hookrightarrow \overline{I} \Rightarrow \widetilde{I} \hookrightarrow \widetilde{\overline{I}}$ と合わせて (Exercise II.5.9(b) の解答の脚注)、$\widetilde{I} = \widetilde{\overline{I}}$ を得る。

従って

$$\overline{I^1} = \overline{I^2} \Rightarrow \widetilde{I^1} = \widetilde{\overline{I^1}} = \widetilde{\overline{I^2}} = \widetilde{I^2}$$

が成り立つ。

(**c**) Closed subscheme $Y \subseteq X$ に対して $I = \Gamma_* \mathscr{I}_Y$ とすると $\widetilde{I} = \mathscr{I}_Y$ である (Proposition 5.9 より $\mathscr{I}_Y$ は quasi-coherent)。

$$s \in \overline{I} \subseteq S \Rightarrow t := x_i^{n_i} s \in I \Rightarrow s/1 = t/x_i^{n_i} \in I_{x_i}$$

において、$d_s = \deg s$ とすると

$$s/1 \in I(d_s)_{(x_i)} = I(d_s)^{\sim}(D_+(x_i))$$

$$\Rightarrow s \in I(d_s)^{\sim}(X) \subseteq \Gamma_* \widetilde{I} = \Gamma_* \mathscr{I}_Y = I$$

より、$\overline{I} = I$ となるので、$I = \Gamma_* \mathscr{I}_Y$ は saturated である。

Y に対応する ideal を J とすると、

$$J \subseteq \overline{J} \overset{(b)}{=} \overline{I} = I$$

から $\Gamma_* \mathscr{I}_Y$ は Y に対応する max ideal である。

(**d**) S の saturated homogeneous ideal I に対し $X = \operatorname{Proj} S$ の closed subscheme $Y = \operatorname{Proj} S/I$ が得られる (Exercise II.3.12(b))。

ここで、前述の (c) から $\Gamma_* \mathscr{I}_Y$ は Y を定義する saturated homogeneous ideal なので、この対応は全射である。

また、(b) よりそのような saturated homogeneous ideal は一つなので、単射でもある。

2.5.11

$S \times_A T$ は graded ring で、$\deg(S_d \otimes_A T_d) = d$ であり、$\deg f = \deg g = d$ のとき $\deg(f \otimes_A g) = d$ である。

(i) $\operatorname{Proj}(S \times_A T) = X \times_A Y$ の証明

$\operatorname{Proj}(S \times_A T)$ は $D_+(f \otimes g)$, $\deg f = \deg g \geq 1$, $f \in S, g \in T$ でカバーされる。実際、$S \times_A T = \oplus_{d \geq 0}(S_d \otimes_A T_d)$ は $f \otimes g$ で生成されるので、もしカバーできなくて $\mathfrak{p} \ni f \otimes g$, $\deg f = \deg g \geq 1, \forall f \in S, \forall g \in T$ となる $\mathfrak{p}$ が存在したとすると、$\mathfrak{p} \supseteq (S \times_A T)_+$ となってしまうからである。

まず、$\deg f = \deg g = d \geq 1$, $f \in S, g \in T$ に対し、

$$S_{(f)} \otimes_A T_{(g)} \xrightarrow{\sim} (S \times_A T)_{(f \otimes g)}$$

$$s/f^n \otimes t/g^m \mapsto (f^m s \otimes g^n t)/(f \otimes g)^{n+m}, \ \deg s = dn, \deg t = dm \tag{26}$$

を示す。

(well-define 性)

$$(S_{(f)}, T_{(g)}) \to (S \times_A T)_{(f \otimes g)}, \ (s/f^n, t/g^m) \mapsto (f^m s \otimes g^n t)/(f \otimes g)^{n+m}$$

は

$$s'/f^{n'} = s/f^n \Rightarrow f^{n+i}s' = f^{n'+i}s,\ t'/g^{m'} = t/g^m \Rightarrow g^{m+j}t' = g^{m'+j}t$$

に対して

$$(f^m s \otimes g^n t)(f \otimes g)^{n'+m'+i+j} = (f^{m'}s' \otimes g^{n'}t')(f \otimes g)^{n+m+i+j}$$

となることから、

$$(f^m s \otimes g^n t)/(f \otimes g)^{n+m} = (f^{m'}s' \otimes g^{n'}t')/(f \otimes g)^{n'+m'}$$

が得られるので well-define である。
　双線形でもあるので、式 (26) は well-define となる。

　(全射性)
　$(s \otimes t)/(f \otimes g)^n \in (S \times_A T)_{(f \otimes g)}$, $\deg s = \deg t = dn$ に対しては $s/f^n \otimes t/g^n \in S_{(f)} \otimes_A T_{(g)}$ が対応する。

　(単射性)

$$(S \times_A T)_{(f \otimes g)} \ni (f^m s \otimes g^n t)/(f \otimes g)^{n+m} = 0 \Rightarrow (f^m s \otimes g^n t)(f \otimes g)^r = 0 \text{ at } S \times_A T$$

よって、$S \times_A T \to S \otimes T \to S_f \otimes T_g$ から $S_f \otimes T_g$ において $(f^m s/1 \otimes g^n t/1)(f \otimes g)^r = 0$ であり、

$$(s/f^n \otimes t/g^m)(f \otimes g)^{n+m+r} = (f^m s/1 \otimes g^n t/1)(f \otimes g)^r = 0$$

となる。$f \otimes g$ は $S_f \otimes T_g$ において単元なので $s/f^n \otimes t/g^m = 0$ である。$s/f^n \otimes t/g^m \in S_{(f)} \otimes_A T_{(g)}$ なので、式 (26) は単射である。

　以上により $S_{(f)} \otimes_A T_{(g)} = (S \times_A T)_{(f \otimes g)}$ が成立し

$$D_+(f) \times_A D_+(g) = D_+(f \otimes g)$$

を得る。これらを貼り合わせれば

$$X \times_A Y = \mathrm{Proj}(S \times_A T)$$

を得る。なお、$\phi : D_+(f) \times_A D_+(g) \to D_+(f \otimes g)$ と $\phi' : D_+(f') \times_A D_+(g') \to D_+(f' \otimes g')$ の $D_+(ff') \times_A D_+(gg') \to D_+(ff' \otimes gg')$ への制限が一致するので、貼り合わせは可能となる。

　(ii) $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S \times_A T)}(1) = p_1^* \mathcal{O}_X(1) \otimes_{X \times Y} p_2^* \mathcal{O}_Y(1)$ の証明

$$\mathcal{O}_{X \times Y}(D_+(f \otimes g)) = (S \times_A T)_{(f \otimes g)}$$

$$p_1^{-1}\mathcal{O}_X(D_+(f \otimes g)) = \lim_{W \supseteq p_1(D_+(f) \times D_+(g))} \mathcal{O}_X(W) = \lim_{W \supseteq D_+(f)} \mathcal{O}_X(W) = S_{(f)}$$

$$p_2^{-1}\mathcal{O}_Y(D_+(f\otimes g)) = T_{(g)}$$
$$p_1^{-1}\mathcal{O}_X(1)(D_+(f\otimes g)) = S(1)_{(f)}$$
$$p_2^{-1}\mathcal{O}_Y(1)(D_+(f\otimes g)) = T(1)_{(g)}$$

を用いて得られる

$$p_1^*\mathcal{O}_X(1)\otimes_{\mathcal{O}_{X\times Y}} p_2^*\mathcal{O}_Y(1)$$
$$= p_1^{-1}\mathcal{O}_X(1)\otimes_{p_1^{-1}\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_{X\times Y}\otimes_{\mathcal{O}_{X\times Y}} p_2^{-1}\mathcal{O}_Y(1)\otimes_{p_2^{-1}\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_{X\times Y}$$
$$= p_1^{-1}\mathcal{O}_X(1)\otimes_{p_1^{-1}\mathcal{O}_X} p_2^{-1}\mathcal{O}_Y(1)\otimes_{p_2^{-1}\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_{X\times Y}$$

を $D_+(f\otimes g)$ に作用させると、

$$p_1^*\mathcal{O}_X(1)(D_+(f\otimes g))\otimes_{\mathcal{O}_{X\times Y}(D_+(f\otimes g))} p_2^*\mathcal{O}_Y(1)(D_+(f\otimes g))$$
$$= S(1)_{(f)}\otimes_{S_{(f)}} T(1)_{(g)}\otimes_{T_{(g)}}(S\times_A T)_{(f\otimes g)}$$

となる。

これが $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S\times_A T)}(1)(D_+(f\otimes g)) = (S\times_A T)(1)_{(f\otimes g)}$ と等しいことを示す。
$(\because)$

$$S(1)_{(f)}\otimes_{S_{(f)}} T(1)_{(g)}\otimes_{T_{(g)}}(S\times_A T)_{(f\otimes g)} \xrightarrow{\sim} (S\times_A T)(1)_{(f\otimes g)}$$
$$s/f^n\otimes t/g^n\otimes((s'\otimes t')/(f\otimes g)^n) \overset{\equiv}{\mapsto} (ss'\otimes tt')/(f\otimes g)^{2n}$$
$$\deg f = \deg g = d,\ \deg s = \deg t = nd+1,\ \deg s' = \deg t' = nd$$

実際、$S_f\otimes T_g$ において $(s\otimes t)/(f\otimes g)^n = s/f^n\otimes t/g^n$ なので

$$s/f^n\otimes t/g^n\otimes((s'\otimes t')/(f\otimes g)^n) = (s\otimes t)/(f\otimes g)^n\otimes((s'\otimes t')/(f\otimes g)^n)$$
$$= (ss'\otimes tt')/(f\otimes g)^{2n}$$

であり、これらは $S(1)_{(f)}\otimes T(1)_{(g)} = (S\times_A T)(1)_{(f\otimes g)}$($\leftarrow$ 式 (26) から導出) に属す。

また、$(s\otimes t)/(f\otimes g)^n\in(S\times_A T)(1)_{(f\otimes g)}$ に対しては $\deg s = \deg t = nd+1$ なので $s/f^n\otimes t/g^n\otimes 1 = s/f^n\otimes t/g^n\otimes(f^n\otimes g^n)/(f\otimes g)^n$ を対応させればよく、

$$s/f^n\otimes t/g^n\otimes(f^n\otimes g^n)/(f\otimes g)^n \overset{\equiv}{\mapsto} (f^n s\otimes g^n t)/(f\otimes g)^{2n} = (s\otimes t)/(f\otimes g)^n$$

となる。($\because$ 終)

従って、

$$(p_1^*\mathcal{O}_X(1)\otimes_{\mathcal{O}_{X\times Y}} p_2^*\mathcal{O}_Y(1))^{\mathrm{pre}}(D_+(f\otimes g)) = \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S\times_A T)}(1)(D_+(f\otimes g))$$

であり、やはり貼り合わせ可能なので

$$(p_1^*\mathcal{O}_X(1)\otimes_{\mathcal{O}_{X\times Y}} p_2^*\mathcal{O}_Y(1))^{\mathrm{pre}} = \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S\times_A T)}(1)$$

が得られる。よって、左辺の pre-sheaf は sheaf となり

$$p_1^*\mathcal{O}_X(1) \otimes_{\mathcal{O}_{X\times Y}} p_2^*\mathcal{O}_Y(1) = \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S\times_A T)}(1)$$

を得る。

(iii) $A[X_0, \cdots, X_r] \to S$ が全射なので、Exercise II.3.12(a) から closed immersion (projective embedding)

$$X = \mathrm{Proj}\, S \hookrightarrow \mathbf{P}_A^r = \mathrm{Proj}\, A[X_0, \cdots, X_r]$$

が存在する。

$$A[Z_{0,0}, \cdots, Z_{r,s}] \twoheadrightarrow \oplus_{d\geq 0} A[X_0, \cdots, X_r]_d \otimes_A A[Y_0, \cdots, Y_r]_d$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}_A^r \times_A \mathbf{P}_A^s \hookrightarrow \mathbf{P}_A^N$$

$\{x_i \otimes_A y_j\}_{i,j}$ は $S \times_A T$ の生成元なので、全射 $A[X_0, \cdots, X_r] \otimes_A A[Y_0, \cdots, Y_r] \twoheadrightarrow S \times_A T$ が存在することから

$$\mathrm{Proj}\,(S \times_A T) \cong X \times_A Y \hookrightarrow \mathbf{P}_A^r \times_A \mathbf{P}_A^s \hookrightarrow \mathbf{P}_A^N$$

を得る。

2.5.12

(**a**) Immersion $i : X \to \mathbf{P}_Y^r,\ j : X \to \mathbf{P}_Y^s$ に対し $\mathscr{L} \cong i^*\mathcal{O}(1),\ \mathscr{M} \cong j^*\mathcal{O}(1)$ とする。

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{P}_Y^N & \\
 & \mathbf{P}_Y^r \times_Y \mathbf{P}_Y^s \arrow[u, "\psi"'] \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
\mathbf{P}_Y^r \arrow[dr] & X \arrow[l, "i"'] \arrow[r, "j"] \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[d] & \mathbf{P}_Y^s \arrow[dl] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

Fiber product の U.P. から $i = p_1\varphi,\ j = p_2\varphi$ となる。

$\psi : \mathbf{P}_Y^r \times_Y \mathbf{P}_Y^s \to \mathbf{P}_Y^N$ は closed immersion である。実際、closed immersion は local property なので (Exercise 2.4.3 の証明における性質 2)、$Y = \mathrm{Spec}\, B$ とすると、$B[z_{00}, \cdots, z_{rs}] \twoheadrightarrow B[x_0, \cdots, x_r] \times_{\mathbf{Z}} B[y_0, \cdots, y_s]$ は全射ゆえ、ψ は closed immersion である (Exercise II.3.12(a))。

$$\mathscr{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{M} = i^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^r}(1) \otimes_{\mathcal{O}_X} j^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^s}(1)$$

$$\stackrel{(29)}{=} \varphi^* p_1^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^r}(1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \varphi^* p_2^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^s}(1) \stackrel{(28)}{=} \varphi^*(p_1^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^r}(1) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^r \times \mathbf{P}_Y^s}} p_2^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^s}(1))$$

$$\stackrel{\text{Exe.5.11}}{=} \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^r \times \mathbf{P}_Y^s}(1) \stackrel{\text{Prop.5.12(c)}}{=} \varphi^* \psi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^N}(1) = (\psi\varphi)^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^N}(1) \tag{27}$$

[Proposition 5.12(c) の適用について]

Y は scheme なので、まず $Y = \operatorname{Spec} B$ とする。$\mathbf{P}_Y^r \times_Y \mathbf{P}_Y^s \to \mathbf{P}_Y^N$ に対応する ring homomorphism は

$$B[\cdots z_{ij} \cdots] \to B[\cdots x_i y_j \cdots] = B[\cdots x_i \cdots] \times_B B[\cdots y_j \cdots]$$

より全射である。従って Exercise II.3.12(a) から $U = \mathbf{P}_Y^r \times_Y \mathbf{P}_Y^s$ であり ($\mathbf{P}_Y^r \times \mathbf{P}_Y^s = \operatorname{Proj}(B[\cdots x_i \cdots] \times_B B[\cdots y_j \cdots])$ に注意)、$\psi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^N}(1) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^r \times_Y \mathbf{P}_Y^s}(1)$ となる。

一般の Y に対しては、$V = \operatorname{Spec} B$ を $\mathbf{P}_Y^N$ のカバーの一つとし、$W = \psi^{-1}(V)$ とすると、式 (11) より $(\psi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^N}(1))|_W = \overline{\psi}^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^N}(1)|_V)$ となり、今示した local な結果からこれは $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^r \times \mathbf{P}_Y^s}(1)|_W$ に等しい。よって $(\psi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^N}(1))|_W = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^r \times_Y \mathbf{P}_Y^s}(1)|_W$ となり、この結果を張り合わせれば、

$$\psi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^N}(1) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_Y^r \times_Y \mathbf{P}_Y^s}(1)$$

を得る。

Immersion i, j に対し、次の性質 9 より $\varphi = i \times j$ は immersion である。ψ は closed immersion ゆえ、$\psi\varphi$ は immersion、よって式 (27) より $\mathscr{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{M}$ は very ample である。

性質 **6.** $f : X \to Y$ に対し

$$f^*(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{G}) = f^* \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* \mathscr{G} \tag{28}$$

(証明) 性質 3 より

$$f^*(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{G}) = f^{-1}(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{G}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X = f^{-1}\mathscr{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathscr{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$
$$= f^{-1}\mathscr{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathscr{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X = f^* \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* \mathscr{G}$$

性質 **7.** $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ と Z 上の sheaf $\mathscr{F}$ に対し

$$(fg)^* \mathscr{F} = g^* f^* \mathscr{F} \tag{29}$$

$$(fg)^{-1} \mathscr{F} = g^{-1} f^{-1} \mathscr{F} \tag{30}$$

(証明) 先に式 (30) を示す。
まず

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(W) & \xrightarrow{\rho_{WW'}} & \mathscr{F}(W') \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_W^U} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{W'}^{U'}} \\ f^{-1}\mathscr{F}(V) = \varinjlim_{W \supseteq f(V)} \mathscr{F}(W) & \xrightarrow{\rho'_{VV'}} & \varinjlim_{W' \supseteq f(V')} \mathscr{F}(W') = f^{-1}\mathscr{F}(V) \end{array} \tag{31}$$

は可換である。実際、[1], Exercise 2.14 の記法を用いれば

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "\mu_{ij}"] \arrow[d, "\mu_i"'] \arrow[dr, "\mu'_i"] & M_j \arrow[d, "\mu'_j"] \\
M/\sim \arrow[r, "\varphi"] & M'/\approx
\end{tikzcd} \tag{32}$$

において、$M = \oplus_{i\in I} M_i, M' = \oplus_{i\in I'} M_i,\ I \subseteq I'$ のとき、M, M' の同値関係 $\sim, \approx$ は、任意の i, j に対し x_i と $\mu_{ij}x_i$ を同一視する同値関係なので、$x \sim y \Rightarrow x \approx y$ の関係にある。よって、$\mu'_i = \mu'_j\mu_{ij},\ \varphi\mu_i = \mu'_i$ が成り立つので、$\varphi\mu_i = \mu'_j\mu_{ij}$ より、可換となる。

次に

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(W) \arrow[d, "\nu^V_W"'] \arrow[drr, "\mu^U_W"] & & \\
\varinjlim_{W\supseteq f(V)} \mathscr{F}(W) = f^{-1}\mathscr{F}(V) \arrow[rr, "\exists!\psi^U_V"] \arrow[d, "\lambda^U_V"'] & & \varinjlim_{W\supseteq fg(U)} \mathscr{F}(W) = (fg)^{-1}\mathscr{F}(U) \\
\varinjlim_{V\supseteq g(U)} (f^{-1}\mathscr{F})(V) = g^{-1}f^{-1}\mathscr{F}(U) \arrow[urr, "\exists!\psi^U"'] & &
\end{tikzcd}$$

において、順極限の U.P. から $\mu^U_W = \psi^U_V\nu^V_W$ となる ψ^U_V が存在する。

この ψ^U_V は $\psi^U_V = \psi^U_{V'}\rho^1_{VV'}$ を満たす ($\rho^1_{VV'} : f^{-1}\mathscr{F}(V) \to f^{-1}\mathscr{F}(V')$ は制限写像、下図式参照)。なぜなら、順極限の上図式 (32) の $\varphi\mu_i = \mu'_i$ に相当する $\rho^1_{VV'}\nu^V_W = \nu^{V'}_W$ が成り立ち、また $\mu^U_W = \psi^U_V\nu^V_W = \psi^U_{V'}\nu^{V'}_W = (\psi^U_{V'}\rho^1_{VV'})\nu^V_W$ から、順極限の U.P. における一意性より $\psi^U_V = \psi^U_{V'}\rho^1_{VV'}$ だからである。

よって、やはり順極限の U.P. から $\psi^U_V = \exists!\psi^U\lambda^U_V$ を満たす

$$\psi^U : g^{-1}f^{-1}\mathscr{F}(U) \to (fg)^{-1}\mathscr{F}(U)$$

が存在する。

このとき、$\psi : g^{-1}f^{-1}\mathscr{F} \to (fg)^{-1}\mathscr{F}$ が sheaf morphism(制限写像と compatible) であることを示す。

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(W) \arrow[rr, dotted, "\rho_{WW'}"] \arrow[d, "\nu^V_W"'] \arrow[ddr, "\mu^U_W"] \arrow[drr, "\nu^{V'}_W"] & & \mathscr{F}(W') \arrow[d, "\nu^{V'}_{W'}"'] \arrow[ddr, "\mu^{U'}_{W'}"] & \\
f^{-1}\mathscr{F}(V) \arrow[rr, dotted, "\rho^1_{VV'}"] \arrow[dd, "\lambda^U_V"'] \arrow[dr, "\psi^U_V"] & & f^{-1}\mathscr{F}(V') \arrow[dd, "\lambda^{U'}_{V'}"'] \arrow[dr, "\psi^{U'}_{V'}"] & \\
& (fg)^{-1}\mathscr{F}(U) \arrow[rr, dotted, "\rho^3_{UU'}"] & & (fg)^{-1}\mathscr{F}(U') \\
g^{-1}f^{-1}\mathscr{F}(U) \arrow[ur, "\psi^U"] \arrow[rr, dotted, "\rho^2_{UU'}"] & & g^{-1}f^{-1}\mathscr{F}(U') \arrow[ur, "\psi^{U'}"'] &
\end{tikzcd}$$

において、図式 (31) を適用すると、

$$\nu^{V'}_{W'}\rho_{WW'} = \rho^1_{VV'}\nu^V_W$$
$$\mu^{U'}_{W'}\rho_{WW'} = \rho^3_{UU'}\mu^U_W$$
$$\lambda^{U'}_{V'}\rho^1_{VV'} = \rho^2_{UU'}\lambda^U_V$$

が得られる。これらと、既に得られた

$$\mu^U_W = \psi^U_V\nu^V_W$$
$$\psi^U_V = \psi^U\lambda^U_V$$
$$\mu^{U'}_{W'} = \psi^{U'}_{V'}\nu^{V'}_{W'}$$
$$\psi^{U'}_{V'} = \psi^{U'}\lambda^{U'}_{V'}$$

を用いれば、まず

$$\psi^{U'}_{V'}\rho^1_{VV'}\nu^V_W = \rho^3_{UU'}\psi^U_V\nu^V_W$$

となるが、このとき $\forall a \in f^{-1}\mathscr{F}(V)$ に対しては $a = \nu^V_W(b)$ となる $W,\ b$ が存在するので ([1], Exercise 2.15)

$$\psi^{U'}_{V'}\rho^1_{VV'} = \rho^3_{UU'}\psi^U_V$$

が成り立つ。すると、これらの可換式から

$$\rho^3_{UU'}\psi^U\lambda^U_V = \psi^{U'}\rho^2_{UU'}\lambda^U_V$$

が成立するが、同様の論法により

$$\rho^3_{UU'}\psi^U = \psi^{U'}\rho^2_{UU'}$$

を得る。よって

$$g^{-1}f^{-1}\mathscr{F} \to (fg)^{-1}\mathscr{F}$$

は sheaf morphism である。

一方、$\forall x \in X$ に対して

$$(g^{-1}f^{-1}\mathscr{F})_x = (f^{-1}\mathscr{F})_{g(x)} = \mathscr{F}_{fg(x)} = ((fg)^{-1}\mathscr{F})_x$$

なので、式 (30) が成立する。

これを用いると

$$g^*f^*\mathscr{F} = g^{-1}(f^*\mathscr{F}) \otimes_{g^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X = g^{-1}(f^{-1}\mathscr{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_Y) \otimes_{g^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$
$$= g^{-1}f^{-1}\mathscr{F} \otimes_{g^{-1}f^{-1}\mathcal{O}_Z} g^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_{g^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X = (fg)^{-1}\mathscr{F} \otimes_{(fg)^{-1}\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_X$$
$$= (fg)^*\mathscr{F}$$

が成り立つ。

性質 **8.** Immersion は stable under base change である。

(証明) 下図式は $X \times_U (U \times_S Y) = X \times_S Y$ ゆえ fiber product の合成であるが、open immersion(o.i.) と closed immersion(c.i.) は base change で保存されるので、それらの合成も base change で保存される。

$$
\begin{tikzcd}
 & X \times_S Y \arrow[dl] \arrow[dr, "o.i."] & & \\
X \arrow[dr, "o.i."] & & U \times_S Y \arrow[dl] \arrow[dr, "c.i."] & \\
 & U \arrow[dr, "c.i."] & & Y \arrow[dl] \\
 & & S &
\end{tikzcd}
$$

性質 **9.** Immersion の product は immersion である。

(証明) 性質 8 より immersion は stable under base change である。

$i : Z \to Y,\ j : Y \to X$ を immersion とすると、開集合 $V \subseteq Y$ に対して、$i(Z) = C \cap V,\ Y \supseteq C$: closed であり、$j$ は像への位相同型なので $j(i(Z)) = j(C) \cap j(V) \subseteq X,\ j(C)$: closed, $j(V)$: open から ji は immersion である (The Stacks project Lemma 26.24.3)。

以上により Exercise II.4.8 の前提 (a)-(c) を満たすので、(d) から immersion の product は immersion である。

(**b**) 記法上 Scheme Z は整数環 $\mathbb{Z}$ と混同しやすいので、ここでは Z を W に変える。$\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}},\ \mathbf{P}^r_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$ 等は明らかな場合は単に $\times,\ \mathbf{P}^r$ 等と記す。

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, bend left, "\varphi"] & Y \arrow[dr, "j"] \arrow[rr, bend left, "g"] & & \\
\mathbf{P}^r_Y \arrow[r, "1\times j"'] \arrow[d, "1\times g"'] \arrow[ur, bend left, "\alpha"] & \mathbf{P}^r_W \times_W \mathbf{P}^s_W \arrow[r, "q_2"'] \arrow[dl, "q_1"] \arrow[d, "\psi\times 1"] & \mathbf{P}^s_W \arrow[r, "\beta"] & W \arrow[ddl] \\
\mathbf{P}^r_W & \mathbf{P}^N_W \arrow[d] \arrow[urr, "\gamma"] & & \\
 & \mathbf{P}^N \arrow[r] & \operatorname{Spec}\mathbb{Z} &
\end{tikzcd}
$$

ここで、$\psi : \mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^s \to \mathbf{P}^N,\ N = rs + r + s$ は Segre embedding である。また、$\mathbf{P}^r_W \times_W \mathbf{P}^s_W = \mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^s_W$ に注意すると、例えば、

$1 \times j : \mathbf{P}^r_Y \to \mathbf{P}^r_W \times_W \mathbf{P}^s_W$

が存在する。$\varphi := (1 \times j)i$ とする。

$$f = \alpha i,\ g = \beta j$$

$1 \times j,\ \varphi$ における fiber product の Universal Property から

$$q_2(1 \times j) = j\alpha$$

$$q_1\varphi = (1 \times g)i$$

$\psi : \mathbf{P}^r \times_{\mathbb{Z}} \mathbf{P}^s \hookrightarrow \mathbf{P}^N$ を Segre embedding とすると、$\psi \times 1$ における fiber product の Universal Property から

$$\gamma(\psi \times 1) = \beta q_2$$

となる。

$$gf = \beta j\alpha i = \beta q_2(1 \times j)i = \gamma(\psi \times 1)(1 \times j)i$$

であり、$\iota := (\psi \times 1)(1 \times j)i$ は immersion である。

式 (27) の最後の $\varphi^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r_Y \times \mathbf{P}^s_Y}(1) = (\psi\varphi)^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^N_Y}(1)$ に相当する等式を用いると

$$\varphi^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r_W \times_W \mathbf{P}^s_W}(1) = \iota^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^N_W}(1)$$

であるが、一方

$$\varphi^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r_W \times_W \mathbf{P}^s_W}(1) = \varphi^*(q_1^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r_W}(1) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r_W \times_W \mathbf{P}^s_W}} q_2^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^s_W}(1))$$

$$= i^*(1 \times g)^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r_W}(1) \otimes_{\mathscr{O}_X} f^*j^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^s_W}(1) \overset{\%}{=} i^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r_Y}(1) \otimes_{\mathscr{O}_X} f^*\mathscr{M} = \mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} f^*\mathscr{M}$$

より

$$\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} f^*\mathscr{M} = \iota^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^N_W}(1)$$

が得られる。なお、$\overset{\%}{=}$ は次の性質 10 による。

性質 **10.** $f : X \to Y,\ X, Y$: scheme に対し、

$$(1 \times f)^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^r_Y}(1) = \mathscr{O}_{\mathbf{P}^r_X}(1)$$

である。

(証明) X, Y は affine としてよいので (この場合を証明できれば、(a) の証明における [Proposition 5.12(c) の適用について] と同様、貼り付け可能)、$X = \operatorname{Spec} A,\ Y = \operatorname{Spec} B$ とする。

f に対応する morphism を $\varphi : B \to A$ とおくと

$$1 \otimes \varphi : \mathbb{Z}[x_0, \cdots, x_r] \otimes B = B[x_0, \cdots, x_r] \to \mathbb{Z}[x_0, \cdots, x_r] \otimes A = A[x_0, \cdots, x_r]$$

が $1 \times f : \mathbf{P}^r_X \to \mathbf{P}^r_Y$ に対応している。

$S := B[x_0, \cdots, x_r],\ T := A[x_0, \cdots, x_r]$ とすると $S \to T$ であり、T の prime ideal $\mathfrak{p}$ は

$$\mathfrak{p} \supseteq (1 \otimes \varphi)(S_+) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \supseteq T_+$$

を満たす。実際、$1 \otimes \varphi$ は次数を保存するので $T_+ \supseteq (1 \otimes \varphi)(S_+)$ から $(\Leftarrow)$ は自明であり、$\mathfrak{p} \supseteq (1 \otimes \varphi)(S_+)$ ならば $(1 \otimes \varphi)(S_+) \ni x_i$ ゆえ $\mathfrak{p} \supseteq T_+$ となるからである。よって Exercise II.2.14 における U は $\mathbf{P}^r_Y$ に等しく、Proposition 5.12(c) から

$$(1 \times f)^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^r_Y}(1) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^r_X}(1)$$

を得る。

2.5.13

$X = \operatorname{Proj} S,\ Y = \operatorname{Proj} S^{(d)}$ とおく。
$f \in S_d$ とすると

$$S_{(f)} = S^{(d)}_{(f)},\ s/f^i \leftrightarrow s/f^i \tag{33}$$

より

$$\operatorname{Proj} S|_{D^X_+(f)} = \widetilde{S}|_{D^X_+(f)} = \widetilde{S_{(f)}} = \widetilde{S^{(d)}_{(f)}} = \widetilde{S^{(d)}}|_{D^Y_+(f)} = \operatorname{Proj} S^{(d)}|_{D^Y_+(f)}$$

を満たすので (Proposition 5.5)、$D^X_+(f) = D^Y_+(f),\ f \in S_d$ である。よって、これらは貼り合わせられるので、$X = Y$、すなわち

$$\operatorname{Proj} S = \operatorname{Proj} S^{(d)}$$

を得る。
さらに、式 (33) と同様にして $S(d)_{(f)} = S^{(d)}(1)_{(f)},\ f \in S_d$ が得られ

$$\mathcal{O}_X(d)|_{D^X_+(f)} = \widetilde{S(d)_{(f)}} = \widetilde{S^{(d)}(1)_{(f)}} = \mathcal{O}_Y(1)|_{D^Y_+(f)}$$

となるが、これも貼り合わせ可能なので、

$$\mathcal{O}_X(d) = \mathcal{O}_Y(1)$$

が成り立つ。

2.5.14

Connected normal closed subscheme $i : X \hookrightarrow Y = \mathbf{P}^r_k$ に対応して $k[x_0, \cdots, x_r] \twoheadrightarrow k[x_0, \cdots, x_r]/I,\ I = \Gamma_* \mathscr{I}_X$ が存在する (Corollary 5.16)。

(**a**) X が normal ゆえ $\mathcal{O}_x = S_{(x)}$ は integral である。

$S_{(x)}$ が integral ならば $S(d)_{(x)}$ も integral である。

($\because$) $x = \mathfrak{p}$ とし、$S(d)_{(x)}$ において

$$\frac{f}{s}\cdot\frac{g}{t} = 0,\ f,g \in \mathfrak{p},\ s,t \notin \mathfrak{p},\ \deg s = \deg f - d, \deg t = \deg g - d$$

とする。$S_{(x)}$, $S(d)_{(x)}$ は S_x の部分環なので、$S_{(x)}$, $S(d)_{(x)}$ の演算は S_x の演算で考えてもよい。

$x_i \notin \mathfrak{p}$ となる x_i が存在するので (でないと $\mathfrak{p} \supseteq S_+$ となってしまう)、

$$\frac{f}{s}\cdot\frac{g}{t} = 0 \Rightarrow \frac{f}{s}\cdot\frac{g}{t}\cdot\frac{1}{x_i^d} = 0 \Rightarrow \frac{f}{sx_i^d}\cdot\frac{g}{tx_i^d} = 0$$

であるが、$S_{(x)}$ は integral なので、$f/(sx_i^d)$, $g/(tx_i^d)$ のいずれかは 0 であり、一般性を失うことなく $f/(sx_i^d) = 0$ とする。すると、

$$\frac{f}{s} = \frac{f}{sx_i^d}\cdot\frac{x_i^d}{1} = 0$$

となり、$S(d)_{(x)}$ は integral となる。($\because$ 終)

次に

$$\bigcap_{\max\ \mathfrak{m}\subseteq \mathrm{S(d)}} S(d)_{(\mathfrak{m})} = S_d \tag{34}$$

を示す。

($\because$) まず、

$$\bigcap_{\max\ \mathfrak{m}\subseteq \mathrm{S(d)}} S(d)_{(\mathfrak{m})} \subseteq S(d) \tag{35}$$

となる。なぜなら、$g \in \bigcap_{\mathfrak{m}} S(d)_{(\mathfrak{m})}$ に対し

$$I = \{a \in S(d) | ag \in S(d)\}$$

は $S(d)$ の ideal であり、もし $I \subseteq \exists\mathfrak{m}$ とすると、

$$g = b/t,\ b \in S(d), t \in S(d) - \mathfrak{m} \Rightarrow gtt' = bt' \in S(d),\ t' \in S(d) - \mathfrak{m} \Rightarrow tt' \in I \subseteq \mathfrak{m}$$

となって矛盾なので、

$$I = S(d) \Rightarrow 1 \in I \Rightarrow 1g = g \in S(d)$$

となるからである。

式 (35) の左辺は d 次なので、$\bigcap_{\mathfrak{m}} S(d)_{(\mathfrak{m})} \subseteq S_d$ である。一方、$S_d \subseteq S(d)_{(\mathfrak{m})}$ から、$S_d \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m}} S(d)_{(\mathfrak{m})}$、よって

$$\bigcap_{\max\ \mathfrak{m}\subseteq \mathrm{S(d)}} S(d)_{(\mathfrak{m})} = S_d$$

となる。($\because$ 終)

式 (34) において、既に示したように $S(d)_{(\mathfrak{m})}$ は integral なので、S_d も integral となる。

任意の d に対し S_d が integral のとき、S も integral となる。
($\because$) $fg = 0$ となる $f \neq 0, g \neq 0$ が存在すると仮定して、$\deg f + \deg g$ が最小となるものをとる (整域性の判定には斉次元 f, g を用いれば十分であるのは、graded ring の斉次 prime ideal の判定と全く同様である)。

もし $\deg f = \deg g$ とすると $S_{\deg f}$ の整域性に反するので、$d = \deg g - \deg f > 0$ である。このとき、$S_d = 0$ とすると $S_{\geq d} = 0$ となり、$g \neq 0$ に反する。よって $S_d \ni y \neq 0$ となる y が存在し、$yf \cdot g = 0$ が得られる。$S_{\deg g}$ の整域性から $yf = 0$ となるが、これは $\deg f + \deg g$ の最小性に反する。

以上により S は整域である。($\because$ 終)

$S' = \oplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) = \tilde{S}$ (S の整閉包) を示す。

$x = \mathfrak{p} \in X = \operatorname{Proj} S$ に対して、$f \notin \mathfrak{p},\ f \in S$ とすると f は $S_{(\mathfrak{p})}$ 上超越的である。実際、$\sum_i a_i f^i = 0,\ a_i \in S_{(\mathfrak{p})}$ とすると $\deg a_i = 0$ より次数の比較から $a_i f^i = 0$ となり S は整域ゆえ $a_i = 0$ である。

$f \in S_1$ とすると

$$S_{\mathfrak{p}} = \oplus_i S_{(\mathfrak{p})} f^i = S_{(\mathfrak{p})}[f] \tag{36}$$

と書けるが ($a \in S_d \Rightarrow a = (a/f^d) f^d,\ (a/f^d) \in S_{(\mathfrak{p})}$)、$X$ が normal なので $S_{(\mathfrak{p})}$ は整閉、すると次の性質 11 より $S_{\mathfrak{p}}$ も整閉となる。

このとき、$\mathscr{S} = \oplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(n)$ に対し、$\mathscr{S}_{\mathfrak{p}}$ も整閉である。なぜなら

$$\mathscr{S}_{\mathfrak{p}} = \oplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(n)_{\mathfrak{p}} = \oplus_{n \geq 0} S(n)_{(\mathfrak{p})} = \{f/g \mid \deg f \geq \deg g,\ f, g \in S, g \notin \mathfrak{p}\} \subseteq S_{\mathfrak{p}}$$

において、$a \in \operatorname{Frac} \mathscr{S}_{\mathfrak{p}} = \operatorname{Frac} S_{\mathfrak{p}}$ が $\mathscr{S}_{\mathfrak{p}}$ 上整とすると、当然に $S_{\mathfrak{p}}$ 上整でもある。$S_{\mathfrak{p}}$ は整閉なので、$a \in S_{\mathfrak{p}}$ となる。a は $\mathscr{S}_{\mathfrak{p}}$ 上整なので

$$a^m + b_{m-1} a^{m-1} + \cdots + b_0 = 0,\ b_i \in \mathscr{S}_{\mathfrak{p}},\ b_0 \neq 0$$

であるが、ここでもし $\deg a < 0$ だと $\deg b_i \geq 0$ より次数比較から $a^m = 0,\ m > 1$ となり S の整域性に反する。よって $\deg a \geq 0$ から $a \in \mathscr{S}_{\mathfrak{p}}$ が得られ、$\mathscr{S}_{\mathfrak{p}}$ は整閉となる ($\mathscr{S}$ は normal)。

$S' = \Gamma(X, \mathscr{S})$ が整閉となることを示す。
($\because$) まず、$X = \operatorname{Proj} S = \bigcup_f D_+(f)$ に対し、

$$R := \mathscr{S}(D_+(f)) = \oplus_{n \geq 0} S(n)_{(f)}\ [\supseteq S_{(f)}]$$

が整閉であることを示すために、$x \in \operatorname{Frac} R$ が R 上整とする。

$$J = \{y \in R \mid xy \in R\}$$

は ideal をなすが、$J \subseteq \mathfrak{p} \subseteq S_{(f)} \subseteq R$ となる $\mathfrak{p}$ が存在するとする。

$$\mathscr{S}_{\mathfrak{p}} = \oplus_{n \geq 0} S(n)_{(\mathfrak{p})} = (\oplus_{n \geq 0} S(n)_{(f)})_{(\mathfrak{p})} = R_{(\mathfrak{p})}$$

R 上整 $x \in \operatorname{Frac} R = \operatorname{Frac} R_{(\mathfrak{p})}$ に対し、$R_{(\mathfrak{p})}$ $[\supseteq R]$ が整閉なので ($\mathscr{S}$: normal)

$$x \in R_{(\mathfrak{p})} \cap \operatorname{Frac} R \Rightarrow x = a/s, a \in R, s \notin \mathfrak{p} \Rightarrow tsx = ta, t \notin \mathfrak{p}$$

$$\Rightarrow ts \in J \subseteq \mathfrak{p}$$

これは矛盾なので、$J = S_{(f)} \Rightarrow x \in R$ となり、R は整閉をなす。

次に、一般に、X の affine open covering $X = \bigcup U$ に対し、$\mathscr{H}(U)$ が整閉ならば $\mathscr{H}(X)$ も整閉である:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,\ a_i \in \mathscr{H}(X),\ s = \frac{a}{b} \in \operatorname{Frac} \mathscr{H}(X),\ a, b \in \mathscr{H}(X)$$

$$\Rightarrow s|_U^n + a_{n-1}|_U s|_U^{n-1} + \cdots + a_0|_U = 0,\ a_i|_U \in \mathscr{H}(U),\ s|_U = \frac{a|_U}{b|_U} \in \operatorname{Frac} \mathscr{H}(U)$$

$$\Rightarrow s|_U \in \mathscr{H}(U) \Rightarrow s \in \mathscr{H}(X)$$

よって、$\mathscr{S}(X) = S'$ はその商体において整閉である。$(\because)$ 終

Theorem 5.19 の証明から $S \subseteq S' \subseteq \widetilde{S}$ なので (S が integral だから成立する)、

$$\widetilde{S} \subseteq \widetilde{S}' = S' \subseteq \widetilde{\widetilde{S}} \overset{\$}{=} \widetilde{S} \Rightarrow S' = \widetilde{S}$$

を得る。ここで $\overset{\$}{=}$ は [1], Corollary 5.5 による。同 Corollary 5.5 から $\widetilde{S}$ は S の整閉なので、S' は S の整閉である。

性質 11. R: 整閉 $\Leftrightarrow$ $R[x]$: 整閉。従って、$\mathfrak{p} \not\supseteq S_1$ なら $S_{(\mathfrak{p})}$: 整閉 $\Rightarrow$ $S_{\mathfrak{p}}$: 整閉である (式 (36)) [6]。

(証明) ($\Rightarrow$) $K = \operatorname{Frac} R,\ L = \operatorname{Frac} R[x] = \operatorname{Frac} K[x] = K(x)$ とおき、$f(x) \in L$ を $R[x]$ 上整とする。$R[x] \subseteq K[x]$ より $f(x)$ は $K[x]$ 上整でもあり、$K[x]$ は整閉なので $f(x) \in K[x]$ となる。よって、$K(x)$ における $R[x]$ の整閉包は次式を満たす。

$$\widetilde{R[x]}^{K(x)} \subseteq K[x]$$

一方、[1], Exercise 5.9 において、$A \Leftarrow R, B \Leftarrow K, C \Leftarrow A$ とおけば $R[x] = \widetilde{R[x]}^{K[x]}$ となるが、上式より $\widetilde{R[x]}^{K(x)} = \widetilde{R[x]}^{K[x]}$ なので、

$$R[x] = \widetilde{R[x]}^{K(x)}$$

から $R[x]$ は整閉である。

($\Leftarrow$) $y \in \operatorname{Frac} R \subseteq \operatorname{Frac} R[x]$ が R 上整とすると、y は $R[x]$ 上でも整となり、$R[x]$ 上が整閉なので、

$$y \in R[x] \cap \operatorname{Frac} R$$

[6] 逆は無条件に成立する。

すなわち $y \in R$ を得る。

$\mathfrak{p} \not\supseteq S_1$ なら $\exists f \in S_1 - \mathfrak{p}$ より式 (36) が成立し、$S_{(\mathfrak{p})}$: 整閉 $\Rightarrow S_{\mathfrak{p}}$: 整閉となる。

(**b**) Exercise II.5.9(b) において $M = S$ とすると

$$S_d \stackrel{\sim}{=} \Gamma(X, \mathcal{O}(d)) = S'_d,\ d \geq d_0$$

が得られる。

(**c**) 上記 (b) より

$$S' \approx S \Rightarrow S'_{nd} = S_{nd},\ \forall n > 0, d \gg 0$$

X は noetherian であり、k は代数的閉体、$X \to \operatorname{Spec} k$ は proper なので (Theorem 4.9)、Exercise 4.5(d) より $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$ である。従って、$S_0 = k = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = S'_0$ となり、全ての $n \geq 0$ に対して $S'_{nd} = S_{nd}$ であり、$S'^{(d)} = S^{(d)}$ を得る。

ここで、一般に T が整閉ならば $T^{(d)}$ も整閉であることを示す。
($\because$) $x \in \operatorname{Frac} T^{(d)} \subseteq \operatorname{Frac} T$ が $T^{(d)}$ 上整とする。すると、$T^{(d)} \subseteq T$ なので、x は T 上整でもあり、$x \in \widetilde{T}$ となる。$\widetilde{T} = T$ なので、$x \in T$ より

$$x \in T \cap \operatorname{Frac} T^{(d)} \Rightarrow x = g/f,\ f, g \in T^{(d)} \stackrel{T:integral}{\Longrightarrow} g = xf,\ x \in T,\ f, g \in T^{(d)}$$

となるが、次数比較から $x \in T^{(d)}$ を得る。従って $T^{(d)}$ は整閉である。($\because$ 終)
よって、(a) から S' が整閉なので、$S'^{(d)}$ も整閉、$S^{(d)}$ も整閉である。

Corollary 5.16 から S は homogeneous coordinate ring $k[x_0, \cdots, x_r]/I$ なので、一般公式 $T/I = (\oplus_n T_n)/(\oplus_n I_n) = \oplus_n (T_n/I_n)$ より

$$S^{(d)} = k[x_0, \cdots, x_r]^{(d)}/I^{(d)}$$

となり、

$$\delta : k[y_0, \cdots, y_N] \stackrel{\sigma}{\twoheadrightarrow} k[x_0, \cdots, x_r]^{(d)} \stackrel{\rho}{\twoheadrightarrow} k[x_0, \cdots, x_r]^{(d)}/I^{(d)} = S^{(d)}$$
$$\Rightarrow X = \operatorname{Proj} S^{(d)} \hookrightarrow \operatorname{Proj} (k[x_0, \cdots, x_r])^{(d)} \hookrightarrow \mathbf{P}_k^N$$

を得る。

ここで δ は全射ゆえ $S^{(d)} = k[y_0, \cdots, y_N]/\ker \delta$ であるが、これは $S^{(d)}$ が $X \hookrightarrow \mathbf{P}_k^N$ の homogeneous coordinate ring であることを示している。$S^{(d)}$ が整閉なので、$X \hookrightarrow \mathbf{P}_k^N$ は projectively normal である。

(**d**) X が projectively normal とする。

$$\varphi : T = A[x_0, \cdots, x_r] \twoheadrightarrow S = A[x_0, \cdots, x_r]/I \hookrightarrow \widetilde{S} = S' \tag{37}$$

において、S が整閉ゆえ $S = \widetilde{S}$ なので、$\varphi : T \to S'$ は全射となる。よって n 次部分比較から $\varphi_n : T_n \to S'_n = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ も全射である。Proposition 5.13 より $T_n = \Gamma(\mathbf{P}_A^r, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_A^r}(n))$ なので

$$\varphi_n : \Gamma(\mathbf{P}_A^r, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_A^r}(n)) \twoheadrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$$

は全射となる。

一方、性質 12 より任意の $\mathfrak{p}$ に対し $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = S_{(\mathfrak{p})}$ が整閉ゆえ X は normal である。

逆に、X が normal で、$\varphi_n : T_n = \Gamma(\mathbf{P}^r_A, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^r_A}(n)) \twoheadrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) = S'_n,\ n \geq 0$ が全射とする。

すると $\varphi : T \twoheadrightarrow S \to S'$ が全射となるので、$S \to S'$ は全射である。(a) で示したように、$S \subseteq S' = \widetilde{S}$ なので、結局 $S = \widetilde{S}$ となり、S は整閉、X は projectively normal となる。

性質 **12.** S が整閉ならば $S_{(\mathfrak{p})}$ も整閉である。

(証明) $x \in \operatorname{Frac} S_{(\mathfrak{p})} \subseteq \operatorname{Frac} S$ が $S_{(\mathfrak{p})}$ 上整とする:

$$x^n + d_{n-1}/c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_0/c_0 = 0,\ \deg c_i = \deg d_i, d_i \in S, c_i \in S - \mathfrak{p}$$

$$\Rightarrow (cx)^n + d_{n-1}\frac{c}{c_{n-1}}(cx)^{n-1} + \cdots + d_0\frac{c}{c_0}c^{n-1} = 0,\ c = c_{n-1}\cdots c_0 \in S - \mathfrak{p}$$

係数は $d_i(c/c_i)c^{n-1-i} \in S$ なので、$cx \in \widetilde{S} = S$ であり (S は整閉)、$x \in S_{\mathfrak{p}}$ となる。$\deg x = 0$ より $x \in S_{(\mathfrak{p})}$ を得る。

2.5.15

(**a**) $X = \operatorname{Spec} A,\ \mathscr{F}$: quasi-coherent のとき、$\mathscr{F} = \widetilde{M}, M:$ A-module とかける (Proposition 5.4)。

[1], Exercise 2.17 より A-module は有限生成部分加群の順極限で与えられる:

$$M = \varinjlim M^i = \sum_i M^i = \bigcup_i M^i$$

ここで、M^i は有限生成 A 加群で $M^i \supseteq M^j$, for $i \geq j$ であり、A が noetherian なので M^i も noetherian、$\mathscr{F}^i := \widetilde{M^i}$ は coherent である。

性質 13 より $(\varinjlim M^i)_x = \varinjlim M^i_x,\ x \in X$ なので、

$$\mathscr{F}_x = M_x = (\varinjlim M^i)_x = \varinjlim M^i_x = \varinjlim \mathscr{F}^i_x \overset{\$}{=} (\varinjlim \mathscr{F}^i)_x$$

ここで、$\overset{\$}{=}$ は $\varinjlim \mathscr{F}^i_x = (\varinjlim \mathscr{F}^i)^{\mathrm{pre}}_x = (\varinjlim \mathscr{F}^i)_x$ による。

Exercise II.1.10 より $\varinjlim \mathscr{F}^i = \varinjlim \widetilde{M^i} \to \widetilde{M}$ が存在し、

$$\mathscr{F} = \varinjlim \mathscr{F}^i = \bigcup_i \mathscr{F}^i$$

となる[7]。

[7] $M^i \supseteq M^j \Rightarrow \mathscr{F}^i \supseteq \mathscr{F}^j$, for $i \geq j$

性質 **13.** A-module M、A_x-module N において、$\alpha^i : M^i \to N$ が $\alpha^i = \alpha^j \mu^{ij}$ を満たすとすると ([1], Exercise 2.16 の記法を利用)、

$$(\varinjlim M^i)_x = \varinjlim M^i_x$$

(証明) 下図式において

$$\begin{tikzcd}
M^i \arrow[r, "\rho^i_x"'] \arrow[d, "\mu^i"'] \arrow[rr, bend left, "\alpha^i"] & M^i_x \arrow[r, "\alpha^i_x"'] \arrow[d, "\mu^i_x"'] & N \\
\varinjlim M^i \arrow[r, "\rho_x"] \arrow[urr, bend right=60, "\alpha"'] & (\varinjlim M^i)_x \arrow[ur, "\alpha_x"'] &
\end{tikzcd}$$

$M^i \to M^i_x$ における局所化の U.P.(Universal Property) から

$$\alpha^i = \exists! \alpha^i_x \cdot \rho^i_x, \tag{38}$$

$\varinjlim M^i$ における順極限の U.P. から

$$\alpha^i = \exists! \alpha \cdot \mu^i, \tag{39}$$

$(\varinjlim M^i)_x$ における局所化の U.P. から

$$\alpha = \exists! \alpha_x \cdot \rho_x, \tag{40}$$

準同型 μ^i の局所化 μ^i_x の性質より

$$\rho_x \mu^i = \mu^i_x \rho^i_x$$

が成立する。

従って、$\alpha^i = \alpha\mu^i = \alpha_x \rho_x \mu^i = (\alpha_x \mu^i_x)\rho^i_x$ となるが、式 (38) の α^i_x の一意性から

$$\alpha^i_x = \alpha_x \mu^i_x$$

が成立する。

$\alpha^i_x = \alpha_x \mu^i_x$ を満たす α_x の一意性は、もし g が $\alpha^i_x = g\mu^i_x$ を満たすとすると、

$$\alpha^i_x = g\mu^i_x \Rightarrow \alpha^i_x \rho^i_x = g\mu^i_x \rho^i_x \Rightarrow \alpha^i = g\rho_x \mu^i$$

において式 (39) の α の一意性から $\alpha = g\rho_x$ が得られ、さらに式 (40) の α_x の一意性から得られる $g = \alpha_x$ による。

以上により、順極限の U.P. から $(\varinjlim M^i)_x = \varinjlim M^i_x$ が成り立つ。

(**b**) $X = \operatorname{Spec} A$, A: noetherian, $i : U \hookrightarrow X$, $\mathscr{F}$: coherent on U する。

X は quasi-compact なので、任意の open affine $V \subseteq X$ に対し $i^{-1}(V)$ も quasi-compact で、i は quasi-compact となる。Open immersion i は separated なので、Proposition 5.8(c) から $i_*\mathscr{F}$ は quasi-coherent であり、

$$i_*\mathscr{F} = \widetilde{M},\ M:\ A\text{-module},\ M = \varinjlim M^i = \sum_i M^i = \bigcup_i M^i$$

とできる。ここで M^i は有限生成 A 加群、$\mathscr{F}^i := \widetilde{M^i}$ は coherent である。

また

$$i_*\mathscr{F}|_U = \mathscr{F}$$

である。なぜなら Exercise II.1.18 から $i_*\mathscr{F}|_U \to \mathscr{F}$、

$$(i_*\mathscr{F}|_U)_x = (i_*\mathscr{F})_x = \lim_{x\in V} \mathscr{F}(V\cap U) = \mathscr{F}_x,\ x \in U$$

だからである。

既に示したように U は quasi-compact なので、$U = \bigcup_f D(f)$ は有限個の和集合である。$D(f) = \operatorname{Spec} A_f$ において、A が noetherian ゆえ A_f も noetherian、よって U は locally noetherian、quasi-compact でもあり、noetherian となる。

$$i_*\mathscr{F}(D(f)) = \mathscr{F}(i^{-1}(D(f))) = \mathscr{F}(D(f))$$

$$\overset{\text{Corollary5.5}}{\Longrightarrow} i_*\mathscr{F}|_{D(f)} = \mathscr{F}|_{D(f)}\ \Rightarrow i_*\mathscr{F}|_U = \mathscr{F}$$

において、$\mathscr{F}$ は coherent ゆえ $\mathscr{F}|_{D(f)}$ も coherent なので (Proposition 5.4)、

$$i_*\mathscr{F}|_{D(f)}(D(f)) = M_f \overset{\#}{=} \varinjlim M_f^i$$

は有限生成 A_f 加群である ($\overset{\#}{=}$ は、性質 13)。

$\{M_f^i\}_{i\in I}$ は順系なので、生成元を全て含む M_f^i が存在するが、この i は f に依存しないようにできる (X が有限個の $D(f)$ で覆われるから)。よって

$$i_*\mathscr{F}|_{D(f)} = \widetilde{M^i}|_{D(f)} \Rightarrow i_*\mathscr{F}|_U = \widetilde{M^i}|_U$$

ここで、$\mathscr{F}' := \widetilde{M^i}$ とすれば、これは X 上の coherent sheaf であり、$\mathscr{F}'|_U = \mathscr{F}$ を満たす。

(**c**) Sheaf morphism ρ を次のように定義する。

$$\rho : \mathscr{G} \to i_*\mathscr{G}|_U$$

$$\rho(V) = \rho_{V,U\cap V} : \mathscr{G}(V) \to i_*\mathscr{G}|_U(V) = \mathscr{G}(U\cap V)$$
$$s \mapsto s|_{U\cap V}$$

このとき、$\mathscr{F}' := \rho^{-1} i_*\mathscr{F}$ は次の性質 14 により $\mathscr{G}$ の subsheaf である[8]。$\mathscr{G}$ が quasi-coherent なので、Proposition 5.4 から $\mathscr{F}'[\subseteq \mathscr{G}]$ も quasi-coherent となる。

[8] $\rho^{-1}\mathscr{F}$ とは $(\rho^{-1}\mathscr{F})(V) = \rho_{V,U\cap V}^{-1}\mathscr{F}(V)$ のこと。

$\mathscr{F}'|_U = \mathscr{F}$ は、$V \subseteq U$ に対し $\mathscr{F}'|_U(V) = \rho^{-1}_{V,V\cap V} i_*\mathscr{F}(V) = \mathscr{F}(V)$ による。

後は (b) と全く同様にして、$\mathscr{F}'$ は coherent となる。

性質 14. Sheaf morphism $\varphi : \mathscr{H} \to \mathscr{G}$ において、$\mathscr{F}$ が $\mathscr{G}$ の subsheaf ならば $\varphi^{-1}\mathscr{F}$ は $\mathscr{H}$ の subsheaf である。

(証明) Presheaf となるのは明らかである。Sheaf 条件の (b)-(3) は $\mathscr{H}$ の sheaf 性から成り立つ。

以下 (b)-(4) を示す。

$U = \bigcup_i V_i,\ s_i \in \varphi^{-1}_{V_i}\mathscr{F}(V_i),\ s_i|_{V_i\cap V_j} = s_j|_{V_i\cap V_j}$ とする。$\mathscr{H}$ が sheaf で $s_i \in \mathscr{H}(V_i)$ より $\exists s \in \mathscr{H}(U),\ s|_{V_i} = s_i$ である。

一方、$\varphi_{V_i}s_i \in \mathscr{F}(V_i)$ から

$$(\varphi_{V_i}s_i)|_{V_i\cap V_j} = \varphi_{V_i\cap V_j}s_i|_{V_i\cap V_j} = \varphi_{V_i\cap V_j}s_j|_{V_i\cap V_j} = (\varphi_{V_j}s_j)|_{V_i\cap V_j}$$

なので、

$$\exists t \in \mathscr{F}(U),\ t|_{V_i} = \varphi_{V_i}s_i$$

である。

$$(\varphi_U s)|_{V_i} = \varphi_{V_i}s|_{V_i} = \varphi_{V_i}s_i = t|_{V_i}$$

において、(b)-(3) の一意性から

$$\varphi_U s = t \in \mathscr{F}(U) \Rightarrow s \in \varphi_U^{-1}\mathscr{F}(U)$$

を得る。

(**d**) X は quasi-compact なので、$X = V_1 \cup \cdots \cup V_n,\ V_i :$ open affine とできる。$U_1 = U \cap V_1$ は affine V_1 の open であり、$\mathscr{G}|_{V_1},\ \mathscr{F}|_{U_1}$ はそれぞれ quasi-coherent と coherent である[9]。よって (c) を適用すれば、$\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{G}|_{V_1},\ \mathscr{F}'|_{U_1} = \mathscr{F}|_{U_1}$ を満たす V_1 上の coherent sheaf $\mathscr{F}'$ が存在する。

$\mathscr{F}'|_{U\cap V_1} = \mathscr{F}|_{U\cap V_1}$ なので、$\mathscr{F}, \mathscr{F}'$ は $U^1 = U \cup V_1$ に貼り合せ拡大可能となり、それを coherent subsheaf $\mathscr{F}_1$ of $\mathscr{G}|_{U^1}$ とする。$\mathscr{F}_1|_U = \mathscr{F},\ \mathscr{F}_1|_{V_1} = \mathscr{F}'$ を満たす。

以下同様にして、$\mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{G},\ \mathscr{F}_n|_U = \mathscr{F}$ となる X 上の coherent sheaf $\mathscr{F}_n$ が構成できる。

なお、$\mathscr{G} := i_*\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{F} = \mathscr{G}|_U$ である。

(**e**) U における global section $s \in \mathscr{F}(U)$ で生成される sheaf を $\mathscr{G}^s := \widetilde{\mathcal{O}(U)s}$ とおくと、

$$\mathscr{F}(V) \supseteq \mathscr{G}^s(V) = \mathcal{O}_X(V)s|_V \ni s|_V \tag{41}$$

[9] Proposition 5.4。V_i は $D_+(f)$ に取れ、M が有限生成なら $M_{(f)}$ も有限生成なので $\mathscr{F}|_{U_1}$ は coherent である。

である。すると $\mathscr{G}^s = \widetilde{\mathcal{O}(U)s}$ から $\mathscr{G}^s$ は U 上 coherent となるので、(d) より X 上の coherent $\mathscr{G}^{s\prime}$ が存在し、$\mathscr{G}^{s\prime}|_U = \mathscr{G}^s$, $\mathscr{G}^{s\prime} \subseteq \mathscr{F}$ を満たす。

このとき、$\mathscr{G}^{s\prime} \subseteq \mathscr{F}$ から $\bigcup_{s\in\mathscr{F}(U)} \mathscr{G}^{s\prime} \subseteq \mathscr{F}$ であるが、一方、式 (41) より $s \in \mathscr{G}^s(U) = \mathscr{G}^{s\prime}(U)$ なので $\mathscr{F}(U) \subseteq \bigcup_{s\in\mathscr{F}(U)} \mathscr{G}^{s\prime}(U)$ から

$$\mathscr{F}(U) = \bigcup_{s\in\mathscr{F}(U)} \mathscr{G}^{s\prime}(U)$$

となり、$\mathscr{F}$ は coherent subsheaf $\mathscr{G}^{s\prime}$ の union である。

2.5.16

(**a**) 基底のサイズを求めればよい。$\mathscr{F}|_U = \mathcal{O}|_U^{\oplus n}$ の基底を $\{x_1, \cdots, x_n\}$ とすると、

$$T^r(\mathscr{F})|_U = T^r(\mathscr{F}|_U) = T^r(\mathcal{O}|_U^{\oplus n}) = \mathcal{O}|_U^{\oplus n} \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}|_U^{\oplus n}$$

より $T^r(\mathscr{F})$ は locally free(基底を持つ module) であり、基底のサイズは n^r、

$$S^r(\mathscr{F})|_U = S^r(\mathscr{F}|_U) = S^r(\mathcal{O}|_U^{\oplus n}) = \mathcal{O}|_U^{\oplus n} \cdots \mathcal{O}|_U^{\oplus n}$$

より $S^r(\mathscr{F})$ も locally free であり、基底は $\{x_{i_1} \cdots x_{i_r},\ i_1 \leq \cdots \leq i_r\}$ なので、基底のサイズは ${}_nH_r = \binom{n+r-1}{n-1}$、

$$\wedge^r(\mathscr{F})|_U = \wedge^r(\mathscr{F}|_U) = \wedge^r(\mathcal{O}|_U^{\oplus n}) = \mathcal{O}|_U^{\oplus n} \wedge \cdots \wedge \mathcal{O}|_U^{\oplus n}$$

より $\wedge^r(\mathscr{F})$ も locally free であり、基底は $\{x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_r},\ i_1 < \cdots < i_r\}$ なので、基底のサイズは $\binom{n}{r}$ となる。

(**b**) X の covering $\{U\}$ に対し $\mathscr{F}|_U = (\mathcal{O}_X|_U)^{\oplus n}$ とすると、

$$\wedge^n \mathscr{F}|_U = (\mathcal{O}_X|_U)^{\oplus n} \wedge \cdots \wedge (\mathcal{O}_X|_U)^{\oplus n} \approx \mathcal{O}_X|_U$$

である。また、任意の開集合 V に対して

$$\wedge^r \mathscr{F}(V) \otimes \wedge^{n-r} \mathscr{F}(V) \to \wedge^n \mathscr{F}(V),\ x \otimes y \mapsto x \wedge y$$

なので

$$\wedge^r \mathscr{F} \otimes \wedge^{n-r} \mathscr{F} \to \wedge^n \mathscr{F}$$

である。

さて、開集合 V に対し、

$$\wedge^r \mathscr{F}(V) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_V}(\wedge^{n-r}\mathscr{F}|_V, \wedge^n \mathscr{F}|_V),\ f \to (g|_W \mapsto f_W \wedge g|_W),\ W \subseteq V$$

が定義できるので、

$$\varphi : \wedge^r \mathscr{F} \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\wedge^{n-r}\mathscr{F}, \wedge^n \mathscr{F})$$

が存在する。

従って、後は

$$\wedge^r \mathscr{F}(U) \approx \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X|U}}(\wedge^{n-r}\mathscr{F}|_U, \wedge^n \mathscr{F}|_U)$$

を示せばよい。

$\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X|U}}(\wedge^{n-r}\mathscr{F}|_U, \wedge^n \mathscr{F}|_U)$ とするとき、$\wedge^n \mathscr{F}|_U \approx \mathcal{O}_{X|U}$ より $\sigma(x_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge x_{i_n}) \in \mathcal{O}_{X|U}$ なので、ψ を

$$\psi(\sigma) = \oplus_{i_1<\cdots<i_r} \sigma(x_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge x_{i_n}) x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_r}$$

で定義する。ここで、$\{i_{r+1}, \cdots, i_n\} = \{1, \cdots, n\} - \{i_1, \cdots, i_n\},\ i_{r+1} < \cdots < i_n$ である。

これは準同型 (module として) であり、また単射でもある。実際、$\sigma(x_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge x_{i_n})|_U = 0,\ i_{r+1} < \cdots < i_n$ とすると $\sigma(x_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge x_{i_n})|_V = 0,\ V \subseteq U \Rightarrow \sigma = 0$ となる。

さらに、$\oplus_{i_1<\cdots<i_r} a_{i_1\cdots i_r} x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_r} \in \wedge^r \mathscr{F}(U)$ に対しては、σ を

$$\sigma(x_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge x_{i_n}) = a_{i_1\cdots i_r}(x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_r}) \wedge (x_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge x_{i_n})[\in \wedge^n \mathscr{F}(U)] \quad (42)$$

$$= a_{i_1\cdots i_r}[\in \mathcal{O}_X(U)]$$

で定義すると、ψ の定義から

$$\psi(\sigma) = \oplus_{i_1<\cdots<i_r} \sigma(x_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge x_{i_n}) x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_r} = \oplus_{i_1<\cdots<i_r} a_{i_1\cdots i_r} x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_r}$$

となり、全射である。

従って

$$\wedge^r \mathscr{F}(U) \approx \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\wedge^{n-r}\mathscr{F}|_U, \wedge^n \mathscr{F}|_U)$$

であり、かつ

$$\wedge^r \mathscr{F} \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\wedge^{n-r}\mathscr{F}, \wedge^n \mathscr{F})$$

から

$$\wedge^r \mathscr{F} \approx \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\wedge^{n-r}\mathscr{F}, \wedge^n \mathscr{F})$$

が成り立つ。

一方

$$(\wedge^{n-r}\mathscr{F})\check{} \otimes \wedge^n \mathscr{F} \approx \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\wedge^{n-r}\mathscr{F}, \wedge^n \mathscr{F})$$

より (Exercise II.5.1(b))

$$\wedge^r \mathscr{F} \xrightarrow{\sim} (\wedge^{n-r}\mathscr{F})\check{} \otimes \wedge^n \mathscr{F}$$

が成立する。

$n=2, r=1$ とすると $\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \check{\mathscr{F}} \otimes \wedge^2 \mathscr{F}$ が得られる。

(**c**) 本問は $S(M)$ 上なので「$\otimes$」は本来「$\cdot$」であるが、混同して用いられている。

$F^p := S^p\mathscr{F}' \otimes S^{r-p}\mathscr{F}$ は $S^r\mathscr{F}$ の subsheaf である。任意の開集合 $V \subseteq X$ に対して、

$$F^p_{\mathrm{pre}}(V) = S^p\mathscr{F}'(V) \otimes S^{r-p}\mathscr{F}(V) \xrightarrow{\varphi_0} S^p\mathscr{F}'(V) \otimes S^{r-p}\mathscr{F}"(V)$$

が存在する (tensor の U.P.)。ここで、$\varphi_0 : F^{p+1}_{\mathrm{pre}}(V) \to 0$ となり[10]、sheaf 化の U.P. から $\varphi_0 : F^{p+1}(V) \to 0$ すなわち $F^{p+1}(V) \subseteq \ker\varphi_0$、quotient の U.P. から

$$F^p(V)/F^{p+1}(V) \overset{\varphi^{\mathrm{pre}}(V)}{\longrightarrow} S^p\mathscr{F}'(V) \otimes S^{r-p}\mathscr{F}"(V)$$

が存在する。この morphism は制限写像と compatible なので、presheaf 関係

$$(F^p/F^{p+1})^{\mathrm{pre}} \overset{\varphi^{\mathrm{pre}}}{\to} (S^p\mathscr{F}' \otimes S^{r-p}\mathscr{F}")^{\mathrm{pre}}$$

が成り立ち、sheaf 化により

$$F^p/F^{p+1} \overset{\varphi}{\to} S^p\mathscr{F}' \otimes S^{r-p}\mathscr{F}" \tag{43}$$

を得る。

$\mathscr{F}|_U, \mathscr{F}'|_U, \mathscr{F}"|_U$ が free となる、X をカバーする開集合の一つを U とする。Free module は flat [11]かつ分裂しているので

$$0 \to \mathscr{F}'|_U \to \mathscr{F}|_U \to \mathscr{F}"|_U \to 0 : \text{ exact}$$

において $\mathscr{F}|_U = \mathscr{F}'|_U \oplus \mathscr{F}"|_U$ が成り立つ。すると

$$\begin{aligned}
F^p|_U &= S^p\mathscr{F}'|_U \otimes S^{r-p}\mathscr{F}|_U \\
&= S^p\mathscr{F}'|_U \otimes (\oplus_{0\le i\le r-p} S^i\mathscr{F}'|_U \otimes S^{r-p-i}\mathscr{F}"|_U) \\
&= S^p\mathscr{F}'|_U \otimes S^{r-p}\mathscr{F}"|_U \oplus S^p\mathscr{F}'|_U \otimes (\oplus_{1\le i\le r-p} S^i\mathscr{F}'|_U \otimes S^{r-p-i}\mathscr{F}"|_U) \\
&= S^p\mathscr{F}'|_U \otimes S^{r-p}\mathscr{F}"|_U \oplus F^{p+1}|_U
\end{aligned}$$

から

$$F^p|_U/F^{p+1}|_U = S^p\mathscr{F}'|_U \otimes S^{r-p}\mathscr{F}"|_U$$

が得られる。よって、式 (43) と合わせて

$$F^p/F^{p+1} = S^p\mathscr{F}' \otimes S^{r-p}\mathscr{F}"$$

---

[10] $S^n\mathscr{F} \to S^n\mathscr{F}"$ は言わば $(\mathscr{F} \to \mathscr{F}")^{\otimes n}$ である。従って、$S\mathscr{F}' \otimes S^{q-1}\mathscr{F} \to S(\mathscr{F}'/\mathscr{F}') \otimes S^{q-1}(\mathscr{F}/\mathscr{F}') = 0$ から、$F^{p+1} = S^{p+1}\mathscr{F}' \otimes S^{r-p-1}\mathscr{F}(V) = S^p\mathscr{F}' \otimes S\mathscr{F}' \otimes S^{r-p-1}\mathscr{F} \to S^p\mathscr{F}' \otimes 0 \otimes S^{r-p-1}\mathscr{F}" = 0$ となる。

[11] $\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X = \mathscr{F}$ より $\mathcal{O}_X$ は flat。[1], Exercise 2.4 より $\mathcal{O}_X^n$ は flat。

を得る。
　このとき $F^0 = S^r\mathscr{F}$ であり、F^p は finite filtration となる。

(**d**) (c) と全く同様にして

$$\wedge^r\mathscr{F} = G^0 \supseteq G^1 \supseteq \cdots \supseteq G^r \supseteq G^{r+1} = 0$$

$$G^p/G^{p+1} = \wedge^p\mathscr{F}' \otimes \wedge^{r-p}\mathscr{F}" \tag{44}$$

が成り立つ。

　Rank n の locally free sheaf $\mathscr{F}$ は $\wedge^r\mathscr{F} = 0,\ r > n$ を満たす。なぜなら $\mathscr{F}|_U$ が free なので $\wedge^r\mathscr{F}|_U = 0$ となるからである。
　式 (44) において、$r = n, p = 0$ とすると

$$G^0 = \wedge^n\mathscr{F}" \oplus (\wedge\mathscr{F}' \otimes \wedge^{n-1}\mathscr{F}") \oplus \cdots \oplus \wedge^n\mathscr{F}'$$

が得られるが、$\mathscr{F}', \mathscr{F}"$ の rank がそれぞれ $n', n"$ なので $(n = n' + n")$、この式は

$$\wedge^n\mathscr{F} = \wedge^{n'}\mathscr{F}' \otimes \wedge^{n"}\mathscr{F}"$$

となる。

(**e**) 性質 6 より

$$f^*T^n\mathscr{F} = T^n f^*\mathscr{F}$$

である。

　さて、$U \subseteq X$ に対し $\mathscr{I}_2(U) := \{a \otimes b - b \otimes a | a, b \in \mathscr{F}(U)\}$ とすると、容易にわかるように $\mathscr{I}_2$ は $\mathscr{F} \otimes \mathscr{F}$ の subsheaf となる。これを n 重にしたものを $\mathscr{I}$ とする。
　性質 15 から

$$0 \longrightarrow \mathscr{I} \longrightarrow T^n\mathscr{F} \longrightarrow S^n\mathscr{F} \longrightarrow 0 : \text{exact}$$

$$\Rightarrow f^*\mathscr{I} \longrightarrow f^*T^n\mathscr{F} \longrightarrow f^*S^n\mathscr{F} \longrightarrow 0 : \text{exact}$$

であるが、一方、次の完全列も存在する。

$$0 \longrightarrow f^*\mathscr{I} \longrightarrow T^n f^*\mathscr{F} \longrightarrow S^n f^*\mathscr{F} \longrightarrow 0 : \text{exact}$$

すると snake lemma より

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \ker\alpha \arrow[r] \arrow[d] & \ker\beta \arrow[r] \arrow[d] & \ker\gamma \arrow[d] \arrow[dddll, bend right] & \\
 & f^*\mathscr{I} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & f^*T^n\mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & f^*S^n\mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & f^*\mathscr{I} \arrow[r] \arrow[d] & T^nf^*\mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d] & S^nf^*\mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \operatorname{coker}\alpha \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}\beta \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}\gamma \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

が可換となるが ([1], Proposition 2.10 において u の単射性条件がない場合)、α, β は共に全単射ゆえ $\operatorname{coker}\alpha = 0$, $\ker\beta = 0$, $\operatorname{coker}\beta = 0$ から $\ker\gamma = 0, \operatorname{coker}\gamma = 0$、よって γ も全単射となる。

従って

$$f^*S^n\mathscr{F} \approx S^nf^*\mathscr{F}$$

を得る。

$$f^* \wedge^n \mathscr{F} = \wedge^n f^*\mathscr{F}$$

も同様にして証明できる。

[別解]

性質 16 より $f^*(\mathscr{F}/\mathscr{I}) = f^*\mathscr{F}/f^*\mathscr{I}$ なので

$$f^*(S^n\mathscr{F}) = f^*(T^n\mathscr{F}/\mathscr{I}) = f^*(T^n\mathscr{F})/f^*(\mathscr{I}) = T^nf^*\mathscr{F}/f^*(\mathscr{I}) = S^nf^*\mathscr{F}$$

を得る。

性質 **15.** $f : X \to Y$ に対し、f^{-1} は exact functor、f^* は right exact functor である。

(証明) まず $f : X \to Y$ において、Y 上で $\mathscr{G} \to \mathscr{H}$ とすると、[1], Exercise 2.18 から $f^{-1}\mathscr{G} \to f^{-1}\mathscr{H}$ が存在し、従って $f^*\mathscr{G} \to f^*\mathscr{H}$ も存在する。

Y 上の完全系列

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}" \to 0 : \text{exact}$$

に対し、

$$0 \to \mathscr{F}'_y \to \mathscr{F}_y \to \mathscr{F}"_y \to 0 : \text{exact}$$

も完全なので、$y = f(x) \in Y$ とするとき

$$0 \to (f^{-1}\mathscr{F}')_x \to (f^{-1}\mathscr{F})_x \to (f^{-1}\mathscr{F}")_x \to 0 : \text{exact}$$

$$\Rightarrow\ 0 \to f^{-1}\mathscr{F}' \to f^{-1}\mathscr{F} \to f^{-1}\mathscr{F}" \to 0 : \text{exact}$$

よって、f^{-1} は exact functor である。ここで $\otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}}$ をかけると、tensor は right exact なので、f^* は right exact となる。

性質 **16.** $f^*(\mathscr{F}/\mathscr{I}) = f^*\mathscr{F}/f^*\mathscr{I}$

(証明) $f^*\mathscr{F} \to f^*(\mathscr{F}/\mathscr{I})$ において $f^*\mathscr{I} \to 0$ となる。なぜなら、$f^{-1}\mathscr{I} \to f^{-1}(\mathscr{F}/\mathscr{I})$ において、$x \in X$ の stalk をとれば $\mathscr{I}_y \to \mathscr{F}_y/\mathscr{I}_y$ より $\mathscr{I}_y$ の像は 0 となるからである。

従って quatient の U.P. から $f^*\mathscr{F}/f^*\mathscr{I} \to f^*(\mathscr{F}/\mathscr{I})$ が存在する。一方、

$$(f^*\mathscr{F}/f^*\mathscr{I})_x = (f^*\mathscr{F})_x/(f^*\mathscr{I})_x = \frac{\mathscr{F}_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x}}{\mathscr{I}_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x}} \overset{\%}{=} \frac{\mathscr{F}_y}{\mathscr{I}_y} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x} = f^*(\mathscr{F}/\mathscr{I})_x$$

が成り立つ。ここで $\overset{\%}{=}$ は、L が flat ならば

$$0 \longrightarrow M' \otimes L \longrightarrow M \otimes L \longrightarrow M/M' \otimes L \longrightarrow 0 : \text{exact}$$

より

$$M/M' \otimes L = \frac{M \otimes L}{M' \otimes L}$$

であり、free module $\mathcal{O}_X$ は flat だからである。

よって $f^*\mathscr{F}/f^*\mathscr{I} \to f^*(\mathscr{F}/\mathscr{I})$ と合わせて

$$f^*(\mathscr{F}/\mathscr{I}) = \frac{f^*\mathscr{F}}{f^*\mathscr{I}}$$

を得る。

2.5.17

(**a**) $f : X \to Y,\ Y = \bigcup_i V_i,\ V_i = \operatorname{Spec} B_i,\ U_i = f^{-1}(V_i) = \operatorname{Spec} A_i$ とし、開集合 $V = \operatorname{Spec} B \subseteq Y$ に対し、$U = f^{-1}(V)$ とおく。

Exercise II.3.1 の証明中の性質 1 から

$$V \cap V_i = \operatorname{Spec} B \cap \operatorname{Spec} B_i = \bigcup_j \operatorname{Spec} B_{g_{ij}} = \bigcup_j D(g_{ij}),\ g_{ij} \in B$$

表せ、$D(g_{ij}) = \mathrm{Spec}\, B_{g_{ij}} = \mathrm{Spec}\,(B_i)_{h_{ij}} = D(h_{ij}),\ h_{ij} \in B_i$ とできる。すると、$f^{-1}(D(h_{ij}))$ は affine U_i の中なので $f^{-1}(D(h_{ij})) = D(\tilde{h}_{ij})$ が成り立ち[12]、afiine となる。よって、$f^{-1}(D(g_{ij}))$ も affine である。

$V = \bigcup_{ij} D(g_{ij}),\ g_{ij} \in B$ とかけるので、affine V の quasi-compact 性を用いて (Exercise II.2.13(b))、添字を付け替えれば

$$V = \bigcup_{i \in I} D(g_i),\ g_i \in B,\ |I| < \infty$$

となり、$X_{\tilde{g}_i} = f^{-1}(D(g_i)),\ g_i \in B$(Exercise II.3.4 の証明中の性質 2) は affine で

$$U = f^{-1}(V) = \bigcup_i f^{-1}(D(g_i)) = \bigcup_i X_{\tilde{g}_i}$$

が成り立つ ($\tilde{g}_i = f|_U^{\#}(V)(g_i) \in \mathcal{O}_U(U)$)。よって、Exercise II.2.17(b) より $U = f^{-1}(V)$ は affine である[13]。

(**b**) (a) より、f が affine ならば Y の affine covering $\{V_i\}_i$ に対して、$f^{-1}(V_i)$ は affine となる。Affine は quasi-compact なので (Exercise II.2.13(b))、f は quasi-compact である。

Proposition 4.1 と Corollary 4.6(f) から affine morphism は separated である。

Exercise 3.4 から finite morphism は affine である。

(**c**) $\mathscr{A}$ は quasi-coherent なので、$Y \supseteq V = \mathrm{Spec}\, A^V$ に対し、$\mathscr{A}|_V = \widetilde{M^V},\ M^V$: A^V-algebra とおける。$A^V \to M^V$ より

$$f_V : \mathrm{Spec}\, \mathscr{A}(V) = \mathrm{Spec}\, M^V \to \mathrm{Spec}\, A^V = V$$

が存在する。

$X_V = \mathrm{Spec}\, \mathscr{A}(V)$ とし、affine open $W \subseteq Y$ に対して

$$U_{VW} = f_V^{-1}(V \cap W)$$

とおいて、Exercise II.3.8 の証明と同じように Exercise II.2.12 を適用する。すなわち、$\forall x \in V \cap W$ に対して

$$x \in \mathrm{Spec}\, A^V_{a_V} \approx \mathrm{Spec}\, A^W_{a_W} \subseteq V \cap W,\ A^V_{a_V} \approx A^W_{a_W},\ a_V \in A^V, a_W \in A^W$$

が存在するが (Nike's trick, Exercise II.3.1 証明内性質 1)、ここで、$A^V \to \mathscr{A}(V)$ より $A^V_{a_V} \to \mathscr{A}(V)_{a_V}$ なので、$A^V_{a_V} \approx A^W_{a_W}$ から $\mathscr{A}(V)_{a_V} \approx \mathscr{A}(W)_{a_W}$ となる。すると、Exercise II.3.8 の式 (13) と同様の等式

$$f_V^{-1}(\mathrm{Spec}\, A^V_{a_V}) = \mathrm{Spec}\, \mathscr{A}(V)_{a_V} = \mathrm{Spec}\, \mathscr{A}(W)_{a_W} = f_W^{-1}(\mathrm{Spec}\, A^W_{a_W})$$

[12] Proposition 2.3 の証明における $f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi(\mathfrak{a}))$ において、補集合を取ればよい。

[13] Exercise II.2.17(b) の証明における脚注で示したように、その証明には $X = \bigcup_i X_{f_i}$ で十分である。

が成立するので、後は Exercise II.3.8 の証明を辿れば、X_V, f_V を貼り合わせて X, f が得られる。ここで、

$$f : X \to Y,\ X_V = f^{-1}(V) = f_V^{-1}(V) = \operatorname{Spec} \mathscr{A}(V) : \text{open}$$

である。

また、$W \hookrightarrow V$ のとき、それから $A^V \to A^W,\ \mathscr{A}(V) \overset{\rho_{VW}}{\to} \mathscr{A}(W),\ f^{-1}(W) = \operatorname{Spec} \mathscr{A}(W) \to \operatorname{Spec} \mathscr{A}(V) = f^{-1}(V)$ が与えられており、これらは対応している。なお、最後の $f^{-1}(W) \to f^{-1}(V)$ は、$W \subseteq V$ より $f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(V)$、すなわち $f^{-1}(W) \hookrightarrow f^{-1}(V)$ である。

X は X_V でカバーされ、X_V は $\operatorname{Spec} \mathscr{A}|_V = \operatorname{Spec} \widetilde{M^V}$ なので X は scheme であり、$Y, \mathscr{A}$ に対し一意的である。

(**d**) Y の任意の open affine V に対し $f^{-1}(V) = \operatorname{Spec} \mathscr{A}(V)$ なので (a) から f は affine morphism である。

また

$$f_*\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$$

$$= \mathcal{O}_X(\operatorname{Spec} \mathscr{A}(V)) = \mathcal{O}_X|_{\operatorname{Spec} \mathscr{A}(V)}(\operatorname{Spec} \mathscr{A}(V)) = \mathscr{A}(V)$$

なので、$\mathscr{A} = f_*\mathcal{O}_X$ である。

逆に $f : X \to Y$ が affine で、$\mathscr{A} = f_*\mathcal{O}_X$ とする。(b) より f は quasi-compact かつ separated で、$\mathcal{O}_X$ は quasi-compact なので (Example 5.2.1)、Proposition 5.8(c) より $\mathscr{A} = f_*\mathcal{O}_X$ は quasi-coherent $\mathcal{O}_Y$-module (algebra) である。

$\mathscr{A}(V) = f_*\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ において、f が affine なので $f^{-1}(V) = \operatorname{Spec} B$ と書ける。すると、$\mathscr{A}(V) = \mathcal{O}_X(\operatorname{Spec} B) = B$ より $\operatorname{Spec} \mathscr{A}(V) = \operatorname{Spec} B = f^{-1}(V)$ となる。(c) で示した一意性から $X = \mathbf{Spec}\, \mathscr{A}$ を得る。

(**e**) X 上 quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-module $\mathscr{F}$ に対して、$f_*\mathscr{F}$ は Y 上 quasi-coherent $\mathscr{A} = f_*\mathcal{O}_X$-module となる。

次に $\mathscr{M}$ を Y 上 quasi-coherent $\mathscr{A}(= f_*\mathcal{O}_X)$-module とする。

$$Y = \bigcup_i V_i,\ V_i = \operatorname{Spec} A^i,\ U_i = f^{-1}(V_i) = \operatorname{Spec} B^i$$

とおくと、$\mathscr{M}(V_i) = \exists M^i,\ M^i$ は $f_*\mathcal{O}_X(V_i) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V_i)) = B^i$-module となる。

そこで $f^{-1}(V_i)$ 上 $\mathcal{O}_{f^{-1}(V_i)}(= \mathcal{O}_X|_{f^{-1}(V_i)})$-module として $\mathscr{H}_i = \widetilde{M^i}$ とおいたとき ($f^{-1}(V_i) \subseteq X$ における ~)、$\varphi_{ij} : \mathscr{H}_i|_{U_i \cap U_j} \overset{\sim}{\to} \mathscr{H}_j|_{U_i \cap U_j}$ を示す。

$$x \in U_i \cap U_j \Rightarrow f(x) \in V_i \cap V_j$$

$$\Rightarrow f(x) \in \operatorname{Spec} A^i_{a_i} \approx \operatorname{Spec} A^j_{a_j} \subseteq V_i \cap V_j,\ A^i_{a_i} \approx A^j_{a_j},\ a_i \in A^i, a_j \in A^j$$

$$\Rightarrow x \in \operatorname{Spec} B^i_{a_i} \approx \operatorname{Spec} B^j_{a_j} \subseteq U_i \cap U_j$$

ここで $\mathscr{M}$ が sheaf ゆえ、$\mathscr{M}|_{V_i}(D(a_i)) = \mathscr{M}|_{V_j}(D(a_j))$ から[14]、$M^i_{a_i} = M^j_{a_j}$ が成り立つ。よって

$$\mathscr{H}_i|_{\operatorname{Spec} B^i_{a_i}} = \widetilde{M^i_{a_i}} = \widetilde{M^j_{a_j}} = \mathscr{H}_j|_{\operatorname{Spec} B^j_{a_j}}$$

より $\varphi_{ij} : \mathscr{H}_i|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}_j|_{U_i \cap U_j}$ が得られる。

この φ_{ij} が Exercise II.1.22 の条件を満たすので、$\mathscr{H}_i$ を貼り付けて X 上 $\mathcal{O}_X$-module ができる。それを $\widetilde{\mathscr{M}}$ と記す。$\mathscr{H}_i = \widetilde{M^i}$ より、$\widetilde{\mathscr{M}}$ は quasi-coherent であり、$\widetilde{\mathscr{M}}(U_i) = \mathscr{H}_i(U_i) = \widetilde{M^i}(U_i) = M^i = \mathscr{M}(V_i)$ を満たす。

$\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ に対して $f_*\mathscr{F} \to f_*\mathscr{G}$ が存在するのは明らかである。

逆に $\mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ ならば、$\widetilde{\mathscr{M}}(U) = M \to \widetilde{\mathscr{M}'}(U) = M'$, $\widetilde{\mathscr{M}}(D(f)) = M_f \to \widetilde{\mathscr{M}'}(D(f)) = M'_f$ より制限写像と compatible なので、$\widetilde{\mathscr{M}} \to \widetilde{\mathscr{M}'}$ である。

次に

$$\widetilde{f_*\mathscr{F}}(U) = f_*\mathscr{F}(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V)) = \mathscr{F}(U)$$

より $\widetilde{f_*\mathscr{F}} = \mathscr{F}$ となる (X の任意の open U に対しては基本開集合を取ればよい)。

反対に

$$(f_*\tilde{\mathscr{M}})(V) = \widetilde{\mathscr{M}}(f^{-1}(V)) = \mathscr{M}(V)$$

より $f_*\widetilde{\mathscr{M}} = \mathscr{M}$ である。

以上により X 上 quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-module の category は Y 上 quasi-coherent $\mathscr{A}$-module の category と equivalent である。

2.5.18

$Y = \bigcup_i U_i$ のとき isomorphism $\psi_i : f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}^n_{U_i}$ が存在しているとする。すると、$V \subseteq U_i \cap U_j$ に対して $\psi_i(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}^n_V$ であり

$$\psi_j\psi_i^{-1} : \mathbf{A}^n_V \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}^n_V$$

を得る。

(**a**) $V = \operatorname{Spec} A$ のとき、$f^{-1}(V) = \operatorname{Spec} S(\mathscr{E}(V)) = \operatorname{Spec} S(A^n)$ となるので、$\psi_j\psi_i^{-1} : \mathbf{A}^n_V \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}^n_V$ は、A^n の基底 $(x_1, \cdots, x_n)$ を用いて

$$\theta : A[x_1, \cdots, x_n] \approx S(A^n) \approx A[x_1, \cdots, x_n]$$

に対応する。これは id とみなせるので線形同型であり、$(X, f, \{U_i\}, \{\psi_i\})$ は vector bundle となる。

[14] $D(a_i) = \operatorname{Spec} B^i_{a_i}$

$\mathscr{E}|_U$ の基底に関しては、基底を変えても線形同型なので、依存しないといえる。

(**b**) $Y \supseteq U = \mathrm{Spec}\, A$ に対し、$\mathscr{S}(X/Y)$ は sheaf となる。

$$fs = \mathrm{id}_U$$

$$f : f^{-1}(U) = \mathbf{A}^n_U = \mathrm{Spec}\, A[x_1, \cdots, x_n] \to U,\ s : U \to f^{-1}(U)$$

とし、f, s それぞれに対応する A-環準同型を $\tilde{f},\ \tilde{s}$ とする。$\tilde{f}$ については

$$\tilde{f} : A \to A[x_1, \cdots, x_n],\ a \mapsto a$$

が成り立つ。

$fs = \mathrm{id}_U$ に対応する $\tilde{s}$ の条件は $\widetilde{fs} = \tilde{s}\tilde{f} = \mathrm{id}_A : A \to A$ と $\tilde{s}(a) = a$ であるが (Exercise II.2.4 の証明中の式 (3))、それは $(\tilde{s}\tilde{f})(1) = \tilde{s}\tilde{f}(1) = \tilde{s}(1) = 1 = \mathrm{id}_A(1)$ により既に満たされており、また、$(\tilde{s}\tilde{f})(a) = \mathrm{id}_A(1)(a) = a \Rightarrow \tilde{s}(a) = a$ なので、$\tilde{s}$ に新たな条件はない。よって、$\mathscr{S}(X/Y)(U) \ni s$ と $\mathcal{O}_Y(U)^n$ が 1 対 1 に対応する。

$\forall V \subseteq U$ に対してもこの対応は成立し、制限写像とも compatilble なので、$\mathscr{S}(X/Y)|_U \approx \mathcal{O}^n_U$ となり、$\mathscr{S}(X/Y)$ は locally free $\mathcal{O}_Y$-module of rank n である。

(**c**) $s \in \Gamma(V, \check{\mathscr{E}}) = \mathrm{Hom}(\mathscr{E}|_{\mathrm{V}}, \mathcal{O}_{\mathrm{V}}) \Leftrightarrow s : \mathscr{E}|_V \to \mathcal{O}_V$ に対し、$\mathscr{E}|_V = \mathcal{O}^n_V$ なら $s : S(\mathscr{E}|_V) = \mathcal{O}_V[x_1, \cdots, x_n] \to \mathcal{O}_V$ とみなせる。

これには $s' : V = \mathbf{Spec}\, \mathcal{O}_V \to \mathbf{Spec}\, S(\mathscr{E}|_V) = \mathbf{A}^n_V = f^{-1}(V)$ が 1 対 1 に対応する。これが $fs' = \mathrm{id}_V$ を満たすのは (b) で示した通りである。

全て $\mathscr{E}$ から構成されているので制限写像と可換であり、$\check{\mathscr{E}}|_V \approx \mathscr{S}(\mathbf{A}^n_V/V)$ は $Y = \bigcup V$ で貼り合わせ可能となる:

$$\check{\mathscr{E}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}(X/Y)$$

(**d**) (a) から locally free sheave of rank n の $\mathscr{E}$ に対し、vector bundle $X = \mathbf{V}(\mathscr{E})$ が存在し、(c) より $\mathbf{V}(\mathscr{E})$ に対し、locally free sheave of rank n の $\check{\mathscr{E}}$ が存在する。

局所的に考えると vector bundle $X = \mathbf{A}^n_V$ は $\mathbf{Spec}\, S(\mathscr{E})$ なので、(a) より $X = \mathbf{V}(\mathscr{E})$ であり、locally free sheave of rank n と vector bundle は同値である。

References

[1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald: Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, 1963

[2] R. Vakil: Foundations of Algebraic Geometry, Class 9, https://math.stanford.edu/ vakil/0506-216/216class09.pdf, 2007

[3] 彌永昌吉、小平邦彦: 現代数学概説 I, 岩波, 1961