2 Schemes

2.4 Separated and Proper Morphisms

2.4.1

$f : X \to Y$ が finite morphism とする。当然 finite type でもある。

$Y = \bigcup_i V_i,\ V_i$: open affine とすると、Exercise.3.4 から $f^{-1}(V_i)$ は open affine となるので、Proposition 4.1 より

$$f^{-1}(V_i) \to V_i$$

は separated である。よって、Corollary 4.6(f) から f は separated である。

次の性質から finite 性は base change で保存され、また finite morphism は closed なので (Exercise 2.3.5(b))、f は universally closed である。

従って f は proper である。

性質 1. Finite 性は base change で保存される。

(証明) $f : X \to Y$ を finite, $S' \to S$ を scheme morphism とする。

$$\begin{tikzcd} & X' = X \times_S S' \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2 = f'"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & S' \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

$$S = \bigcup_\lambda S_\lambda,\ S_\lambda = \operatorname{Spec} B_\lambda$$

$$f^{-1}(S_\lambda) = \operatorname{Spec} A_\lambda$$

において、A_λ は有限生成 B_λ-module である。

一方、$g^{-1}(S_\lambda) = \bigcup_\mu W_{\lambda\mu},\ W_{\lambda\mu} = \operatorname{Spec} C_{\lambda\mu}$ とかけ、$S' = g^{-1}(S) = \bigcup_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu}$ で、$C_{\lambda\mu}$ は B_λ-代数となる。

$$f'^{-1}(W_{\lambda\mu}) = X \times_S W_{\lambda\mu} \overset{\#}{=} f^{-1}(S_\lambda) \times_{S_\lambda} W_{\lambda\mu} = \operatorname{Spec}(A_\lambda \otimes_{B_\lambda} C_{\lambda\mu})$$

なので、$f'^{-1}(W_{\lambda\mu})$ は open affine である。等号 ($\overset{\#}{=}$) は Theorem 3.3 の証明の Step 7 による。

$C_{\lambda\mu}$ は B_λ-代数なのでスカラーの拡大より $A_\lambda \otimes_{B_\lambda} C_{\lambda\mu}$ は $C_{\lambda\mu}$-代数である ([1], extension of scalars, p. 28)。よって $A_\lambda \otimes_{B_\lambda} C_{\lambda\mu}$ の任意の元は

$$\sum_i a_i \otimes_{B_\lambda} c_i = \sum_i c_i (a_i \otimes_{B_\lambda} 1) \tag{1}$$

と書ける。

ここで、A_λ は有限生成 B_λ-module なので

$$a_i = \sum_j b_i^j a^j,\ b_i^j \in B_\lambda,\ a^j \in A_\lambda$$

と表せ、$C_{\lambda\mu}$ は B_λ-代数ゆえ、上式 (1) は

$$\sum_i c_i(a_i \otimes_{B_\lambda} 1) = \sum_j \sum_i c_i b_i^j (a^j \otimes_{B_\lambda} 1) = \sum_j c^j (a^j \otimes_{B_\lambda} 1),\ c^j \in C_{\lambda\mu}$$

となる。

よって $A_\lambda \otimes_{B_\lambda} C_{\lambda\mu}$ は有限生成 $C_{\lambda\mu}$-module、f' は finite である。(証明終)

2.4.2

Fiber product $Y \times_S Y$ に関する下図式において、$Y \to S$ が separated なので、Δ は closed immersion である。

$Y \times_S Y$ の普遍的性質から、$f = p_1 h,\ g = p_2 h$ となる $h : X \to Y \times_S Y$ が存在する。

$$\begin{tikzcd}
 & Y \times_S Y \arrow[ddl, "p_1"'] \arrow[ddr, "p_2"] & \\
 & Y \arrow[u, "\Delta"] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \\
Y \arrow[dr, "\mathrm{sep}"'] & X \arrow[u, "f"', "g"] \arrow[l, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[uu, bend right, "h"'] & Y \arrow[dl, "\mathrm{sep}"] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

この図式で X を U とすると $f|_U = g|_U$、すると $Y \times_S Y$ の普遍的性質から $h|_U = \Delta f|_U$ となる。よって、$h(U) = \Delta f(U) \subseteq \Delta(Y)$ である。

$Y \to S$ が separated なので $\Delta(Y)$ は閉集合であり、

$$h(X) = h(U^-) \subseteq h(U)^- \subseteq \Delta(Y)^- = \Delta(Y)$$

が成り立つ。従って $x \in X$ とすると $h(x) = \Delta(y),\ \exists y \in Y$ となり、

$$f(x) = p_1 h(x) = p_1 \Delta(y) = y = p_2 \Delta(y) = p_2 h(x) = g(x)$$

より $f = g$ である。

次に Sheaf においても morphism が一致すること、すなわち $h = f^\# - g^\# = 0$ を示す。$\forall P \in X$ に対し、二つの morphism の一致は stalk として一致すればいいので局所的に扱ってよいので $X = \operatorname{Spec} A,\ Y = \operatorname{Spec} B$ とし[1]、$P \in X$ に対応

[1] いま位相空間として示したことから $f(P) = g(P)$ なので、$f(P) = g(P) \in \operatorname{Spec} B$ となる B を一つにできる。また、X, Y を affine としても X, Y, U の条件は保つようにできる。なぜなら X の open set W は reduced、$V \overset{\text{open immersion}}{\subseteq} Y \to S$ 全体は separated、$U^{-W} = U^- \cap W = W$ より U は W で dence だからである。

する A の prime ideal を $\mathfrak{p}$ とおく。Scheme morphism として $f|_U = g|_U$ なので $h_U := f|_U^{\#} - g|_U^{\#} = 0$ である。

$$P \in U,\ f(P) = g(P) \in \exists V \subseteq Y,\ \Rightarrow P \in\ U \subseteq X,\ f|_U = g|_U : U \to V$$

次の可換図は f, g に関する同様の可換図の差分をとった図である。既に示したように位相空間では f, g が等しいので、$f^{-1}(V) = g^{-1}(V),\ \forall V \subseteq Y$ である。

$\mathcal{O}_Y(Y)$ の section s の像を t とおく。

$$\begin{tikzcd}
s \in \mathcal{O}_Y(Y) = B \arrow[r, "h(Y)"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(X) = A \ni t \arrow[d] \\
\mathcal{O}_Y(V) \arrow[r, "h(V)"] \arrow[dr, "h_U(V)=0"] \arrow[dd] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \arrow[d] \\
 & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V) \cap U) = \mathcal{O}_U(f_U^{-1}(V)) \arrow[d] \\
s_{f(\mathfrak{p})} \in \mathcal{O}_{Y,f(\mathfrak{p})} = B_{f(\mathfrak{p})} \arrow[r, "h_P=0"] & \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} \ni t_{\mathfrak{p}}
\end{tikzcd}$$

可換性から $t_{\mathfrak{p}} = 0$ なので、$t/1 = 0/1 \in A_{\mathfrak{p}}$ である。

$$tr = 0 \in \mathfrak{p},\ r \notin \mathfrak{p} \Rightarrow t \in \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p} \in V((t))$$

$$\Rightarrow U \subseteq V((t)) \subseteq X \Rightarrow X = U^- \subseteq V((t)) \subseteq X \Rightarrow V((t)) = X = V((0))$$

$$\Rightarrow (t) \subseteq \sqrt{(t)} = \sqrt{(0)} \overset{\text{reduced}}{=} (0) \Rightarrow t = 0$$

よって $0 = h(Y) = f^{\#}(Y) - g^{\#}(Y)$ である。環準同型が等しいので、scheme morphism も等しい (Proposition 2.3)。

X が non-reduced のときの反例

代数的閉体 k 上の non-reduced scheme

$$X = Y = \operatorname{Spec} A,\ A = k[x, y]/\mathfrak{a},\ \mathfrak{a} = (x^2, xy)$$

に対し、

$$\varphi : A \to A,\ x \mapsto 0, y \mapsto y$$

$$f = \mathrm{id}_A^* : X \to X$$

$$g = \varphi^* : X \to X$$

とおく。A の prime ideal は $\mathfrak{a}$ を含む $k[x, y]$ の prime ideal と 1 対 1 対応するので

$$X = Y = \{(x), (x, y - b)\}_{b \in k}$$

であり、(x) は generic point となる。

$P_0 := (x,y)$ は閉点なので、$U = X - P_0$ は開集合であるが、しかし閉集合ではない。$(\because)$ もし $U = \{(x),(x,y-b)\}_{0\neq b\in k} = V(\mathfrak{b}),\ \mathfrak{b}\supseteq\mathfrak{a}$ と仮定すると、$k[x,y]$ は noetherian なので $\mathfrak{b} = (h_1,\cdots,h_n)$ と表せる。

$\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{b}\supseteq\mathfrak{a}$ を満たす $\mathfrak{p}$ は $(x),(x,y-b)$ に限られるので、$h_i \in (x)$ or $h_i \in (x,y-b)$ であるが、

$$h_i \in (x),\ i=1,\cdots,n \Rightarrow \mathfrak{b} = (x)(h_i',\cdots,h_n')$$

$$\Rightarrow X \neq U = V(\mathfrak{b}) = V((x)) \cup V(h_i',\cdots,h_n') = X$$

より、$h_i \notin (x)$ が存在する。すると、$h_i \in (x,y-b)$ となるが、$h_i(0,y)$ は y の非零多項式なので、$h_i(0,y)=0$ を満たす根は有限個であり、$h_i \in (x,y-b)$ を満たす b も有限個となる。これは $V(\mathfrak{b}) = \{(x),(x,y-b)\}_{b\neq 0}$ に矛盾する。$(\because$ 終)

従って、U は閉集合ではなく $U^- = X$ である。

位相空間では

$$g : X \to X,\ (x)\mapsto(x),(x,y-b)\mapsto(x,y-b)$$

より、$f = g$ である。

Sheaf としては、

$$f|_U^\# = g|_U^\#,\ f_{P_0}^\# \neq g_{P_0}^\#$$

であることを示す。下図式において

$$\sigma : A \to A_{\varphi^{-1}(P)} = A_{g(P)} = A_P,\ x\mapsto x/1$$

とすると、

$$P\in U \Rightarrow P = \mathfrak{p} = \alpha x + \beta(y-b),\ b\neq 0 \Rightarrow s := x+y \notin \mathfrak{p}$$

より、$xs = x^2 + xy = 0$ なので

$$\sigma(x) = x/1 = 0/1$$

となる。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi", "\mathrm{id_A}"'] \arrow[d, "\sigma"'] & A \arrow[d] \\ A_{\varphi^{-1}(P)} \arrow[r, "\varphi_P", "\mathrm{id}_{A_P}"'] & A_P \end{tikzcd}$$

よって $A_{\varphi^{-1}(P)}$ では x は消えており、

$$\varphi_P = (\mathrm{id}_A)_P \Rightarrow g|_U^\# = f|_U^\#$$

である。

一方、$\mathfrak{p} = P_0 = (x,y)$ では

$$s\notin\mathfrak{p} \Rightarrow s = 1+\alpha x+\beta y \Rightarrow xs = x \neq 0 \Rightarrow x/1 \neq 0/1 \Rightarrow \sigma(x)\neq 0$$

であり、

$$\varphi_{P_0} \neq (\mathrm{id}_A)_{P_0} \Rightarrow g^{\#}_{P_0} \neq f^{\#}_{P_0}$$

である。

Y が non-separated のときの反例

X を affine line with origin P, Y を affine line with two origins P_1, P_2 とする。Y は non-separated である (Example 4.0.1)。X において origin P は閉点なので $U = X - P$ は open で、さらに dense である。

$$f : X \hookrightarrow Y,\ x \mapsto \begin{cases} x & ; x \in U \\ P_1 & ; x = P \end{cases}$$

$$g : X \hookrightarrow Y,\ x \mapsto \begin{cases} x & ; x \in U \\ P_2 & ; x = P \end{cases}$$

とすると、U で $f = g$ であるが、X では $f \neq g$ である。

2.4.3

まず closed immersion は local property であることを示す。

性質 **2.** $f : X \to Y$ が closed immersion$\Leftrightarrow$ $f|_V : V \to U$ が closed immersion
ここで、$V = f^{-1}(U),\ \forall U = \operatorname{Spec} B \subseteq Y$

(証明) 一般論として、morphism g が closed immersion というのは、g がその像への位相同型、$\operatorname{Im} g$ が閉集合、任意の点 P に対して $g^{\#}_P$ が全射、の 3 条件と等価である。

従って、今の場合、$f(X)$: closed $\Leftrightarrow$ $f(V)$: closed at $U,\ V = f^{-1}(U),\ \forall U = \operatorname{Spec} B \subseteq Y$ を示せば十分である。
($\Rightarrow$) $f(X)$ が Y の閉集合なら $f(V) = U \cap f(X)$ より $f(V)$ は U で閉集合である。
($\Leftarrow$) $Y = \bigcup_i U_i,\ U_i = \operatorname{Spec} B_i,\ V_i = f^{-1}(U_i)$ とすると、条件から $f(V_i) = U_i \cap f(X)$ は U_i の閉集合であり、$U_i - f(V_i) = \bigcup_j D(f_{ij}),\ f_{ij} \in B_i$ とできる。ここで $D(f_{ij})$ は open U_i の開集合なので Y の開集合でもある。このとき、

$$Y - f(X) = \bigcup_i (U_i \cap (f(X) \cap U_i)^c) = \bigcup_i (U_i - f(V_i)) = \bigcup_{ij} D(f_{ij})$$

は Y の開集合、従って $f(X)$ は閉集合である。(証明終)

$U \times_S V$ は $X \times_S X$ の open subscheme であり、下図式の $i_U, i_{UV}, i_V,\ \iota_U, \iota_V$

はいずれも inclusion である。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "\Delta"] & X \times_S X \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"'] & X \arrow[l, bend right, "\Delta"'] \\
U \arrow[u, "i_U"'] & U \times_S V \arrow[l, "p_U"'] \arrow[r, "p_V"] \arrow[u, "i_{UV}"'] & V \arrow[u, "i_V"'] \\
& U \cap V \arrow[ul, "\iota_U"] \arrow[u, "\theta_{UV}"'] \arrow[ur, "\iota_V"'] \arrow[uu, dotted, bend left] &
\end{tikzcd}$$

ここで、$\Delta^{-1}(U \times_S V) = U \cap V$ が成り立つ。
$(\because)$ $X \times_S X$ の普遍的性質から

$$h = i_{UV}\theta_{UV} : U \cap V \to X \times_S X,\ p_1 h = i_U \iota_U,\ p_2 h = i_V \iota_V$$

であるが、一方 $U \cap V \to X \times_S X$ には h の他に $\Delta i_U \iota_U,\ \Delta i_V \iota_V$ があり、

$$p_1 \circ (\Delta i_U \iota_U) = \mathrm{id}_X i_U \iota_U = i_U \iota_U,\ p_2 \circ (\Delta i_V \iota_V) = i_V \iota_V$$

が成り立つので、やはり $X \times_S X$ の普遍的性質からそれは等しく、

$$h = \Delta i_U \iota_U = i_{UV}\theta_{UV} \Rightarrow \Delta(U \cap V) = \theta_{UV}(U \cap V) \subseteq U \times_S V \Rightarrow U \cap V \subseteq \Delta^{-1}(U \times_S V)$$

が成り立つ。他方、

$$U \supseteq p_1(U \times_S V) \supseteq p_1 \Delta \Delta^{-1}(U \times_S V) = \Delta^{-1}(U \times_S V)$$

であり、同様に $V \supseteq \Delta^{-1}(U \times_S V)$ より $U \cap V \supseteq \Delta^{-1}(U \times_S V)$ を得る。$(\because$ 終)

U, V, S は affine ゆえ $U \times_S V$ も affine であり $U \cap V = \Delta^{-1}(U \times_S V)$ なので、性質 2 から、$\Delta|_{U \cap V} : U \cap V \to U \times_S V$ は closed immersion となる。従って Exercise 2.3.11(b) から $U \cap V$ は affine である。

X が separated でないときの反例

Affine plane $\mathbf{A}^2_k = \operatorname{Spec} k[x, y]$ の origin を P とする。
X : affine plane with double origins P_1, P_2
$U = \mathbf{A}^2_k$ with origin P_1, $V = \mathbf{A}^2_k$ with origin P_2
$U \cap V = \mathbf{A}^2_k - P$
において、$\mathbf{A}^2_k - P = \operatorname{Spec} A$ と仮定する。

$k[x, y],\ k[x, y]_{\mathfrak{p}}$ は整閉なので ([1], Proposition 5.13 およびその直前の記述)、P は normal point である (Exercise 1.3.17)。$\dim \mathbf{A}^2_k = 2$ なので、Exercise 1.3.20 から A の元である regular function は $\mathbf{A}^2_k$ に拡張できる。よって $A = \mathcal{O}_{\mathbf{A}^2_k}(\mathbf{A}^2_k)$ となり、scheme として $\mathbf{A}^2_k - P = \operatorname{Spec} A = \mathbf{A}^2_k$ が得られるが、space をとるとわかるように、これらは等しくないので、矛盾である。

2.4.4

$Y \to S$ が separated で $Z \to Y \to S$ 全体が proper なので Corollary 4.8(e) から $f|_Z : Z \to Y$ は proper である。Proper morphism は (universally) closed なので $f(Z)$ は Y で closed となる。

$f(Z)$ with its image subscheme structure というのは Exercise 2.3.11(d) における Y のことであるが、今示したように $f(Z)$ は閉集合なので、その space は $\operatorname{sp} f(Z)$ に等しい。よって、$f(Z)$ with its image subscheme structure は $f(Z)_{\mathrm{red}}$ である。本書ではそれを $f(Z)$ としているので、以下それに従う。

$f(Z) \to S$ が proper であること、すなわち finite-type, separated, universally closed であることを示す。

$f(Z)$ は closed で reduced induced structure を持つので $f(Z) \to Y$ は closed immersion ゆえ proper、よって finite-type かつ separated である。$Y \to S$ は前提から finite-type かつ separated なので、$f(Z) \to (Y \to)S$ は finite-type かつ separated となる (Exercise 2.3.13(c), Corollary 4.6(b))。

$f(Z) \to S$ の universally closed 性を示す。Base change $g : T \to S$ に対し、$g' : T \times_S f(Z) \to T$ が閉集合ならばよい。

$$\begin{tikzcd}
& & T \times_S Z \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr] & \\
& T \times_S f(Z) \arrow[dl, "g'"'] \arrow[dr] & & Z \arrow[dl, "f|_Z"'] \\
T \arrow[dr] & & f(Z) \arrow[dl, "g"'] & \\
& S & &
\end{tikzcd}$$

上図式において、下記性質 3 から

$$(T \times_S f(Z)) \times_{f(Z)} Z = T \times_S (f(Z) \times_{f(Z)} Z) = T \times_S Z$$

であることに注意すると、Exercise 2.3.15 の解答中の性質 6 で示したように、全射は stable under base change なので、

$$f|_Z : \text{surjective} \Rightarrow f' : \text{surjective}$$

である。

従って、閉集合 $V \subseteq T \times_S f(Z)$ に対し $W = f'^{-1}(V)$ は閉集合である。$Z \to S$ は proper ゆえ $g'f' : T \times_S Z \to T$ は closed なので (fibred product に関する Theorem 3.3 から $T \times_S Z \to T$ は一意的)、$g'f'(W) = g'(V)$ は閉集合である。ここで、f' が全射なので $f'(W) = f'(f'^{-1}(V)) = V$ であることを用いた。

性質 **3.** $X \to S,\ Y \to S,\ Y \to T,\ Z \to T$ のとき、

$$(X \times_S Y) \times_T Z = X \times_S (Y \times_T Z),\ X \times_S S = X$$

が成り立つ。

(証明)

$X \times_S S = X$ は $X \times_S S$ の U.P.(Universary Property) から容易に証明できるので、$(X \times_S Y) \times_T Z = X \times_S (Y \times_T Z)$ を示す。

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_S (Y \times_T Z) \arrow[rr, dotted, "g_1"] \arrow[d, dotted, "h_1"] \arrow[ddl] \arrow[drr] & & (X \times_S Y) \times_T Z \arrow[ll, dotted, bend right, "g_2"'] \arrow[d, dotted, "h_2"'] \arrow[dll] \arrow[ddr] & \\
 & X \times_S Y \arrow[dl] \arrow[dr] & & Y \times_T Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \arrow[dr] & & Z \arrow[dl] \\
 & S & & T &
\end{tikzcd}$$

上図式において、h_1 の存在は $X \times_S Y$ の U.P. による。h_2 も同様である。

h_1 と $X \times_S (Y \times_T Z) \to Y \times_T Z \to Z$ が存在するので、$(X \times_S Y) \times_T Z$ の U.P. から $g_1 : X \times_S (Y \times_T Z) \to (X \times_S Y) \times_T Z$ が得られる。同様に g_2 も得られる。

このとき、$X \times_S (Y \times_T Z) \to X \times_S (Y \times_T Z)$ の U.P. から $g_2 g_1 = \mathrm{id}_{X \times_S (Y \times_T Z)}$ となる。同様に、$g_1 g_2 = \mathrm{id}_{(X \times_S Y) \times_T Z}$ なので、$X \times_S (Y \times_T Z) \approx (X \times_S Y) \times_T Z$ が成立する (Stack Project, Lemma 4.31.8)。

2.4.5

X は noetherian とする (Note on Noetherian Hypotheses, p.100)。

(a) X が既約なので generic point x_1 をもち、$K = k(x_1)$, $\operatorname{Spec} K \ni t_1 = (0) \mapsto x_1 \in X$ となり (Exercise 2.2.7)、X の任意の元 x_0 は $x_0 \in \{x_1\}^- = X$ を満たす。

もし R が $\mathcal{O}_{x_0}$ を支配しているとすると、R の極大 ideal t_0 は $\mathcal{O}_{x_0}$ の極大 ideal x_0 に対応している。R の極小 ideal は $t_1 = (0)$ であり、それは $x_1 \in X$ に対応している。

Lemma 4.4 より得られる morphism $T = \operatorname{Spec} R \to X$ は T の generic point t_1 および極大 ideal t_0 の像 x_1 および x_0 で一意的に決まる。

X が k 上 separated なので morphism $T \to X$ が存在したとすれば一意的、従って x_0 も存在したとすれば一意的である。

(b) X が proper なので morphism $T \to X$ が一意に存在する。すると、Lemma 4.4 より R が支配する $\mathcal{O}_{x_0}$ が一意に存在するので、center も一意的である。

(c) (本解答は https://math.stackexchange.com/questions/3893572/hartshornes-exercise-ii-4-5c-a-third-time を参考にした。)
(a), (b) の前提となる記述を各々Ps, Pp とおく:

Ps: function field の valuation は高々1 個の center を持つ
Pp: function field の valuation は唯一の center を持つ

$n = \dim X$ に関する数学的帰納法で証明する。

$n = 0$ のとき、X の open affine 部分集合の一つ $U = \operatorname{Spec} A$ を取ると A は体である[2]。よって U は 1 点からなり、X は離散空間となるが、既約なので $X = \operatorname{Spec} A$, A :field、とおける。$\operatorname{Sp} X = x_1$ とすると、

$$A = \mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(x_1) = \mathcal{O}_{X,x_1} = \operatorname{Spec} k(x_1)$$

であり、$X = \operatorname{Spec} k(x_1) \to \operatorname{Spec} k$ は affine なので、Ps, Pp によらず separated である (Proposition 4.1)。

Proper 性については、図式

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} L \arrow[rr] \arrow[d] & & X = \operatorname{Spec} k(x_1) \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r] \arrow[urr, dotted] & \operatorname{Spec} R' \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}$$

において、$R' = R \cap k(x_1)$ は valuation ring ゆえ[3]、X が Pp を満たすことから、R' には center が存在する。すると、$\operatorname{Spec} R' \to X$ から

$$\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} R' \to X$$

が存在する。既に示したように、この morphism は separated なので、$\operatorname{Spec} R \to X$ は一意的である。

$n-1$ まで成立すると仮定し、次の流れで証明を進める。

1. X' を X の normalization とすると、$X' \overset{pd}{\to} X$(記号は下記の性質 4 に示す通り)

2. $\dim Z = n-1$ となる closed integral subscheme $Z \subset X$ に対し、$Z' \overset{pd}{\to} Z$ となる次元 $n-1$ の closed integral subscheme $Z' \subset X'$ が存在

3. X' が Ps(respectively, Pp、以下同様) を満たすならば Z' が Ps(Pp) を満足

すると、X が Ps(Pp) を満たすならば X' が Ps(Pp) を満たし、さらに Z' が Ps(Pp) を満たすので Z が Ps(Pp) を満たすことになる。従って、数学的帰納法の仮定から Z は separated(proper) となり、下図式で $\operatorname{Spec} S \to Z$ に高々一つの morphism(唯一の morphism) が存在するので、$\operatorname{Spec} S \to X$ にも高々一つの morphism(唯一の morphism) が存在し、証明が終了する。

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} L \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r, "c.i."] \arrow[dr] & X \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} S \arrow[rr] \arrow[ur, dotted] & & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}$$

[2] $\dim A = 0$ と A が整域ということから、(0) が prime かつ極大なので $A = A/(0)$ は体である。

[3] v を R に対応した valuation とすると、$v' = v|_{k(x_1)}$ は $k(x_1)$ の valuation となり、$\{a \in k(x_1) | v(a) \geq 0\} = \{a \in k(x_1) | v(a) \geq 0\} = R \cap k(x_1)$ は valuation ring である。

1) $\nu : X' \to X$ は finite であり (Exercise 2.3.8)、従って proper、さらに Universal Property から dominant である。また、proper ゆえ closed でもあるので、ν は全射となる。よって次の性質 4 より $X \overset{pd}{\to} Y$ である。

2) Z を次元 $n-1$ の closed integral subscheme $Z \subset X$ とする。

$$\begin{tikzcd} & Z \times_X X' \arrow[dl, "\text{finite, surjective}"'] \arrow[dr, "\text{closed immersion}"] & \\ Z \arrow[dr, "\text{closed immersion}"'] & & X' \arrow[dl, "\text{finite, surjective}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$Z \to X$ は closed immersion、$X' \to X$ は finite かつ全射である。それらは base change で保存されるので $Z \times_X X' \to X'$ は closed immersion、$Z \times_X X' \to Z$ は finite(よって closed) かつ全射である。

従って、$Z \times_X X'$ の既約成分は Z の既約閉集合に写る。また Z は既約なので Z は $Z \times_X X'$ のある既約成分の像である[4]。$Z \times_X X' \to X'$ は closed immersion なので、C_i に対応する X' の既約成分を Z' が存在し、逆に $Z' \to Z \times_X X'$ も closed immersion、従って proper となる (Corollary 4.8(a))。すると $Z' \to C_i \to Z$ は proper かつ全射の合成なので全体も proper かつ全射であり、性質 4 から $Z' \overset{pd}{\to} Z$ である。

なお、finite morphism は次元を保存するので[5]、$\dim X' = n$, $\dim Z' = \dim C_i = \dim Z = n-1$ である。

3) X がさらに normal として Ps(Pp) を満たすならば、次元 $n-1$ の closed integral subscheme $Z \subset X$ が Ps(Pp) を満たすことを言えばよい。

$Z = \{z\}^-$ とする。$R \subseteq K(Z) = k(z)$ を valuation ring とし、closed immersion $Z \to X$ に対応する全射を

$$q : \mathcal{O}_{X,z} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{Z,z} = k(z)$$

とする。

ここで、

$$\mathcal{O}_{X,z} \subseteq K(X) \tag{2}$$

が成り立つ。実際、z を含む open affine $\operatorname{Spec} A$ は X の generic point η を含み、$A_{\mathfrak{m}_z} \to A_{\mathfrak{m}_\eta}$, $a/b \mapsto a/b$ が単射なので ($\mathfrak{m}_\eta \subseteq \mathfrak{m}_z$ より well-define)、$\mathcal{O}_{X,z} \subseteq \mathcal{O}_{X,\eta}$ が成立する。さらに $q(e^{-1}) = q(e)^{-1}$ である。

$$T := q^{-1}(R) \subseteq \mathcal{O}_{X,z} \subseteq K(X)$$

[4] $Z \times_X X'$ の既約成分を $C_1, \cdots, C_m$ とすると (ネーター空間を扱っている)、$Z = \bigcup_i f(C_i) \Rightarrow Z = f(C_i)$, $\exists i$

[5] Scheme の次元は local に定義できるので (Exercise 2.3.20(e))、$f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ としてよい。有限生成加群は整拡大ゆえ ([1], Proposition 5.1(i), (ii))、f が finite ならば B は整域 A の整拡大であり、[1], Corollary 5.9 から $\dim A \geq \dim B$ である。また [1], Theorem 5.10 より $\dim A \leq \dim B$ なので、両方合わせて $\dim A = \dim B \Rightarrow \dim X = \dim Y$ を得る。

は valuation ring になっている。なぜなら、$e \in K(X)$ とすると、$\mathcal{O}_{X,z}$ は $K(X)$ の discrete valuation ring なので[6]、e, e^{-1} のいずれかを含むが、一般性を失うことなく $e \in \mathcal{O}_{X,z}$ とすると、もし、$e \in \mathfrak{m}_z$ なら e は非単元なので

$$e^{-1} \notin \mathcal{O}_{X,z} \Rightarrow q(e^{-1}) = q(e)^{-1} \notin R \Rightarrow q(e) \in R \Rightarrow e \in q^{-1}(R) = T$$

もし、$e \notin \mathfrak{m}_z$ なら e は単元なので

$$e, e^{-1} \in \mathcal{O}_{X,z} \Rightarrow q(e) \text{ or } q(e^{-1}) = q(e)^{-1} \in R \Rightarrow e \text{ or } e^{-1} \in T$$

だからである。

さて、X が Ps を満たすとき Z が Ps を満たすことを示すため、R の center が二つ以上あると T にも center が２つ以上あることを言う。

$z' \in Z$ が R の center とする。$\iota : Z \hookrightarrow X$ とすると

$$\iota^{\#} : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Z$$

であり、$q = \iota^{\#}_z$ となる。既に示したように $\mathcal{O}_{Z,z'} \hookrightarrow \mathcal{O}_{Z,z'}$, $\mathcal{O}_{X,z'} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,z'}$ であり、$z' \in \{z\}^- \Rightarrow \forall U_{x'} \ni z$ から下図式は可換となる。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X,z} \arrow[r, "q=\iota^{\#}_z"] & \mathcal{O}_{Z,z} \\
\mathcal{O}_{X,z'} \arrow[u] \arrow[r, "\iota^{\#}_{z'}"] & \mathcal{O}_{Z,z'} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

よって $\iota^{\#}_{z'}$ は $q = \iota^{\#}_z$ の制限写像となるので $\mathcal{O}_{X,z'} = q^{-1}(\mathcal{O}_{Z,z'})$ である。q が local homomorphism であることから (p. 73)、$\mathcal{O}_{Z,z'}$ が R に dominate されていると $\mathcal{O}_{X,z'}$ は T で dominate される。従って、z' は T の X における center ともなる。もし R の center が二つ以上あると T にも二つ以上の center が存在することになる。

次に X が Pp を満たすとき Z が Pp を満たすことを示すため、T に唯一の center があると R にも唯一の center があることを言う。この場合、Ps に関して既に示したことから、存在することを示すだけで十分である。

R を $K(Z) = k(z)$ の任意の valuation ring とし、R が Z に center を持つことを示す。T を前記と同様に定義する。$z' \in X$ が T の center とすると $\mathcal{O}_{X,z'} \subseteq T \subseteq \mathcal{O}_{X,z}$ から $\varphi : \mathcal{O}_{X,z'} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,z} \hookrightarrow \mathcal{O}_{Z,z}$ となり、local homomorphism から $\mathcal{O}_{Z,z}$ と $\mathcal{O}_{X,z}$ の max ideal は対応している。$\mathcal{O}_{X,z'}$, $\mathcal{O}_{X,z'}$ は共に DVR であり (X は normal)、prime ideal は max ideal なので、やはり max ideal は対応している。よって $\varphi^{-1}((0)) = \mathfrak{m}_{z'}$ より $k(z')^X \hookrightarrow k(z)$、すなわち $\operatorname{Spec} k(z) \to (z' \in)X$ となる。

一方、$k(z) \to k(z) \Rightarrow \operatorname{Spec} k(z) \to Z$ なので、結局 $\operatorname{Spec} k(z) \to Z \to (z' \in)X$ となり、$z' \in Z$ とならざるを得ない。よって $z' \in Z$ である。

---

[6] $\mathcal{O}_{X,z}$ は z 付近の local な scheme なので $\mathcal{O}_{X,z} = A_{\mathfrak{m}_z}$ とかけ、Exercise 3.6 から $K(X) = \operatorname{Frac} A_{\mathfrak{m}_z} = \operatorname{Frac} \mathcal{O}_{X,z}$ である。また、X が normal なので $\mathcal{O}_{X,z}$ は integrally closed、さらに $\dim \mathcal{O}_{X,z} = 1$(Exercise 3.20(c)) から $\mathcal{O}_{X,z}$ は DVR である (Theorem 1.6.2A)。

さて、$\mathcal{O}_{X,z'} \subseteq T \subseteq \mathcal{O}_{X,z}$ に全射 q を作用させると

$$\mathcal{O}_{Z,z'} \subseteq R \subseteq \mathcal{O}_{Z,z}$$

となるが、ここで R は $\mathcal{O}_{Z,z'}$ を dominate している。($\because$) $\mathcal{O}_{X,z}$ は DVR なので prime ideal は max ideal ゆえ、$q^{-1}(\mathfrak{m}_R) = \mathfrak{m}_T$ である。q は全射なので $q(\mathfrak{m}_T) = \mathfrak{m}_R$ となる。次に $q^{-1}(\mathfrak{m}_R \cap \mathcal{O}_{Z,z'}) = \mathfrak{m}_T \cap \mathcal{O}_{X,z'} = \mathfrak{m}^X_{z'} \Rightarrow q(\mathfrak{m}^X_{z'}) = \mathfrak{m}_R \cap \mathcal{O}_{Z,z'}$ であるが、一方 q の local homomorphism 性から $q^{-1}(\mathfrak{m}^Z_{z'}) = \mathfrak{m}^X_{z'} \Rightarrow q(\mathfrak{m}^X_{z'}) = \mathfrak{m}^Z_{z'}$ なので $\mathfrak{m}^Z_{z'} = \mathfrak{m}_R \cap \mathcal{O}_{Z,z'}$ を得る。($\because$ 終)

よって z' は R の Z における center である。

性質 **4.** $f : X \to Y$ が proper dominant、X, Y が integral のとき、X が Ps(Pp) を満たせば Y も Ps(Pp) を満たし、逆も成り立つ。このとき、ここでは便宜上 $X \overset{pd}{\to} Y$ と記す。

(証明) $f : X \to Y$ は dominant なので、X の generic point を Y の generic point に写す[7]。また、同様に f の dominant 性から $K(Y) = \mathcal{O}_{Y,f(\eta)} \to \mathcal{O}_{X,\eta} = K(X)$ は単射となる。

R を $K(Y)/k$ の任意の valuation ring とする。すると、R は $K(X)$ では局所環なので、これを dominate する $K(X)$ の valuation ring R' が存在する。このとき、$R = R' \cap K(Y)$ である。($\because$) $R \subseteq R' \cap K(Y)$ において、$R' \cap K(Y)$ は valuation ring であり、その極大 ideal が $\{a \in K(Y) | v'(a) > 0\} = K(Y) \cap \mathfrak{m}_{R'}$ に等しく、$(K(Y) \cap \mathfrak{m}_{R'}) \cap R = \mathfrak{m}'_R \cap R = \mathfrak{m}_R$ から、$R' \cap K(Y)$ は R を dominate している。Theorem 1.6.2A よりそれらは等しい。($\because$ 終)

R' が center x を持ったとする。Lemma 4.4 から $\operatorname{Spec} R' \to X,\ t_0 \mapsto x$ が存在し、$X \to Y,\ x \mapsto y$ と合わせて $\operatorname{Spec} R' \to X \to Y,\ t_0 \mapsto x \mapsto y$ が存在する。従って

$$\mathcal{O}_{Y,y} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow R' \tag{3}$$

を得る。ここで、最初の単射性は f が dominant、次の単射性は x が R' の center であることによる。

式 (3) の最初の morphism は local homomorphism ゆえ、$\mathcal{O}_{Y,y}$, $\mathcal{O}_{X,x}$ の極大 ideal は対応しており dominate の関係にある。よって、R' は $\mathcal{O}_{Y,y}$ を dominate し、$\mathfrak{m}_y = \mathfrak{m}_{R'} \cap \mathcal{O}_{Y,y}$ である。

式 (2) から得られる $\mathcal{O}_{Y,y} \subseteq K(Y)$ と合わせると

$$\mathcal{O}_{Y,y} \subseteq K(Y) \cap R' = R$$

となる。

Valuation ring $R' \cap K(Y)$ の極大 ideal は既に示したように $\mathfrak{m}_{R'} \cap K(Y)$ なので、$\mathfrak{m}_R = \mathfrak{m}_{R'} \cap K(Y)$ である。

$$\mathfrak{m}_R \cap \mathcal{O}_{Y,y} = \mathfrak{m}_{R'} \cap K(Y) \cap \mathcal{O}_{Y,y} = \mathfrak{m}_{R'} \cap \mathcal{O}_{Y,y} = \mathfrak{m}_y$$

から、R は $\mathcal{O}_{Y,y}$ を dominate する。よって y は R の center である。

[7] $\eta \in X$ を generic point とすると $f(X) = f(\{\eta\}^-) \subseteq f(\{\eta\})^- \Rightarrow Y = f(X)^- \subseteq f(\{\eta\})^- \Rightarrow Y = f(\{\eta\})^-$

すると Lemma 4.4 から $\operatorname{Spec} R \to Y,\ t_0 \mapsto y$ が存在する。

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K(X) \arrow[rr] \arrow[d] & & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R' \arrow[r] \arrow[urr, dotted] & \operatorname{Spec} R \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

$f : X \to Y$ は proper なので、y に対して唯一の morphism $\operatorname{Spec} R' \to X$ が存在し、$t_0 \mapsto x$ である。すなわち、x と y は 1 対 1 に対応しており、X が Pp を満たせば Y は Pp を満たし、かつ Y が Ps を満たせば X が Ps を満たす。

R' を $K(X)/k$ の任意の valuation ring とすると、既に示したように $R = R' \cap K(Y)$ は $K(Y)/k$ の valuation ring である。

R が center y を持ったとする。すると $\operatorname{Spec} R \to Y$ が存在し、f が proper なので y に対して唯一の morphism $\operatorname{Spec} R' \to X$ が存在する。$t_0 \mapsto x$ とすると x と y は 1 対 1 に対応しており、Y が Pp を満たせば X は Pp を満たし、かつ X が Ps を満たせば Y が Ps を満たす。

(証明終)

(d) X は既約な zariski space なので (Exercise 3.17)、$K := K(X) = k(x_1),\ X = \{x_1\}^-,\ g : \operatorname{Spec} K \to X,\ t_1 = (0) \mapsto x_1$ とかける。g は dominant なので

$$g : \text{dominant} \ \Leftrightarrow\ g_P^{\#},\ \forall P \in \operatorname{Spec} K : \text{injective}$$

$$\Leftrightarrow\ g^{\#} : \mathcal{O}_X \to g_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K} : \text{injective}$$

$$\Rightarrow\ g^{\#}(X) : \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}(\operatorname{Spec} K) = K : \text{injective}$$

であり、

$$X \to \operatorname{Spec} k \overset{\text{Ex.2.4}}{\Rightarrow} k \subseteq \mathcal{O}_X(X)$$

と合わせて

$$k \subseteq \mathcal{O}_X(X) \subseteq K$$

となる。

さて、$k \subsetneq \mathcal{O}_X(X)$ と仮定して $a \in \mathcal{O}_X(X) - k \subseteq K$ とする。k は代数的閉体なので、$a \neq 0$ は超越的数であり $b = a^{-1}$ も同様である。よって、$k[b] \subseteq K$ は多項式環、$k[b]_{(b)}$ は K の local ring であり、それを支配する K の valuation ring R が存在する (Theorem 1.6.1A)。

$X \to \operatorname{Spec} k$ は proper なので、下図式左を可換とする $h : \operatorname{Spec} R \to X$ が存在し、従って対応して下図式右も可換となる。

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "h"] & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K & \mathcal{O}_X(X) \arrow[l] \arrow[dl, "h^{\#}(X)"] \\
R \arrow[u] & k \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

R は $k[b]_{(b)}$ を支配するので、R の極大 ideal $\mathfrak{m}_R$ に対し、$\mathfrak{m}_R \cap k[b]_{(b)} = (b)^e$ となり、$\mathfrak{m}_R \ni b$ を得る。$\mathfrak{m}_R$ に単元はないので、$v(b) > 0$ である。

上図式右の可換性から $a = h^{\#}(X)(a) \in R$ を得るので $v(a) \geq 0$ であるが $0 = v(1) = v(a) + v(b) > 0$ は矛盾である。従って $\mathcal{O}_X(X) = k$ が成立する。

2.4.6

$f : X \to Y$ は affine variety の morphism なので、$X = \operatorname{Spec} A,\ Y = \operatorname{Spec} B$ は integral scheme、$A,\ B$ は整域である。また、f に対応する ring morphism を $\varphi : B \to A$ とすると f は finite type なので A は有限生成 B 代数である。

$K = K(X) = \operatorname{Frac} A$ とし、R を $\varphi(B)$ を含む K の valuation ring とする。このとき、$\varphi' : B \to R,\ b \mapsto \varphi(b)$ が存在するので、

$$\begin{tikzcd} K & A \arrow[l] \arrow[dl, dotted, "\rho"'] \\ R \arrow[u] & B \arrow[l, "\varphi'"] \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

は可換となり、f が proper なので Theorem 4.7 より $\rho : A \to R$ が存在する。$A \hookrightarrow K,\ R \hookrightarrow K$ は inclusion なので、可換性から $\rho(a) = a,\ a \in A$ となり、$R \supseteq A$ を得る。

Theorem 4.11A から整閉包に関し

$$\overline{\varphi(B)} = \bigcap_{R \supseteq \varphi(B)} R \supseteq A$$

から、A の元は B 上整となる。A は有限生成 B 代数なので、生成元がいずれも B 上整となることから A は有限生成 B 加群である ([1], Corollary 5.2)。

2.4.7

一般に $X_1 \overset{f_1}{\to} X_2 \overset{f_2}{\to} X_3,\ Y_1 \overset{g_1}{\to} Y_2 \overset{g_2}{\to} Y_3$ のとき、fiber product の U. P. (Universal Property) より $(f_2 \times g_2)(f_1 \times g_1) = f_2 g_2 \times f_1 g_1 : X_1 \times Y_1 \to X_3 \times Y_3$ である。よって、$\alpha^2 = \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$ から、$\sigma^2 = (1 \times \alpha)^2 = 1 \times \alpha^2 = \mathrm{id}_{\mathbf{X}}$ である。

(a) $\sigma : X \to X$ が semi-linear involution なので、$q : X \to \operatorname{Spec} \mathbf{C}$ とすると

$$\sigma^2 = \mathrm{id}_X,\ q\sigma = \alpha q$$

を満たす。

X が affine の場合

$\sigma : X = \operatorname{Spec} A \to X$ に対応する ring homomorphism を $\delta : A \to A$ とし、$\alpha : \operatorname{Spec} \mathbf{C} \to \operatorname{Spec} \mathbf{C}$ に対応する ring homomorphism を $\beta : \mathbf{C} \to \mathbf{C},\ 1 \mapsto 1, i \mapsto -i$ とする。すると

$$\delta^2 = \mathrm{id}_A,\ \delta|_{\mathbf{C}} = \beta$$

であり、$\delta = 1 \otimes \beta$ である[8]。$A^\delta = \{a \in A | \delta(a) = a\}$ とすると、

$$A^\delta \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \approx A$$

が成り立つ。

($\because$) $A^\delta \times \mathbf{C} \to A,\ (1,1) \mapsto 1, (1,i) \mapsto i$ は双線形写像なので $a \otimes 1 \mapsto a,\ a \otimes i \mapsto ia,\ a \in A^\delta$ が存在する ([1], Proposition 2.12)。

(単射性): $a_j \in A^\sigma, c_j, d_j \in \mathbf{R}$ に対し、

$$\sum_j a_j \otimes (c_j + id_j) \mapsto \sum_j a_j c_j + i \sum_j a_j d_j = 0 \tag{4}$$

とすると、$\sum_j a_j c_j,\ \sum_j a_j d_j \in A^\delta$ なので、

$$0 = \delta(\sum_j a_j c_j + i \sum_j a_j d_j) = \sum_j a_j c_j - i \sum_j a_j d_j$$

が得られ、式 (4) と合わせて

$$\sum_j a_j c_j = 0,\ \sum_j a_j d_j = 0 \Rightarrow \sum_j a_j \otimes (c_j + id_j) = \sum_j a_j c_j \otimes 1 + \sum_j a_j d_j \otimes i = 0$$

(全射性): $a \in A$ に対して、$\delta(i) = \beta(i) = -i$ より、

$$\delta((a + \delta(a))/2) = (\delta(a) + a)/2$$

$$\delta((a - \delta(a))/(2i)) = (\delta(a) - a)/(-2i) = (a - \delta(a))/(2i)$$

$$\Rightarrow (\delta(a) + a)/2,\ (a - \delta(a))/(2i) \in A^\delta$$

よって

$$(a + \delta(a))/2 \otimes 1 + ((a - \delta(a))/(2i)) \otimes i \mapsto (a + \delta(a))/2 + ((a - \delta(a))/(2i))i = a$$

準同型性は明らかである。($\because$ 終)

なお $A^\delta \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \approx A^\delta[i]$ も同様にして示せるので、$A \approx A^\delta[i]$ である。

従って $X_0 = \operatorname{Spec} A^\sigma$ とすれば $X = X_0 \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ であり、既に示したように σ は ring homemorphism $1 \otimes \beta$ に対応する $1 \times_{\mathbf{R}} \alpha$ に等しい。また、$X_0 \to \operatorname{Spec} \mathbf{R}$ は Proposition 4.1 から separated、よって X_0 は separated である。

X が affine とは限らない場合

$x \in X$ に対し、仮定から $x, \sigma(x) \in \operatorname{Spec} A$ となる affine が存在し、$x, \sigma(x) \in \sigma(\operatorname{Spec} A)$ を満たす。X は $\mathbf{C}$ 上 separated なので Exercise 2.4.3 より $\operatorname{Spec} A \cap \sigma(\operatorname{Spec} A)$ は affine である。それを $\operatorname{Spec} A_x$ とおくと、それらは X の open affine covering となっている: $X = \bigcup_x \operatorname{Spec} A^x$

$\sigma(\operatorname{Spec} A^x) = \operatorname{Spec} A^x$ となるので、

$$\sigma^x := \sigma|_{\operatorname{Spec} A^x} : \operatorname{Spec} A^x \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} A^x$$

[8] $f : X \to X',\ g : Y \to Y' \Rightarrow f \times g : X \times_S Y \to X' \times_S Y'$ が定義されるが、各 scheme が affine の場合は、対応する ring homomorphism を * をつけて表すと、$(f \times g)^* = f^* \otimes g^*$ となる。

であり、σ^x が条件[9] を満たすゆえ、すでに述べたことから

$$A^x = B^x \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = B^x[i],\ B^x = (A^x)^\sigma$$

とかけ、

$$X = \bigcup_x \operatorname{Spec} A^x = \bigcup_x (\operatorname{Spec} B^x \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) = (\bigcup_x \operatorname{Spec} B^x) \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$$

を得る。

Spec B^x の貼り合わせには Exercise 2.2.12 を用いる。$X^x = \operatorname{Spec} A^x,\ X_0^x = \operatorname{Spec} B^x$ とし、$B^x \hookrightarrow A^x$ に対応する scheme morphism を $\varphi_x : X^x \to X_0^x$ とおく。

ここで、$B^x \subseteq A^x = B^x[i]$ において、$B^x[i]$ は B^x 上整なので $(i^2 + 1 = 0)$、φ_x は全射である ([1], Theorem 5.10)。

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} A^x \arrow[dddd, "\varphi_x"] & & \operatorname{Spec} A^x \cap \operatorname{Spec} A^y \arrow[ll] \arrow[rr] & & \operatorname{Spec} A^y \arrow[dddd, "\varphi_y"] \\
& V_{xy} = \operatorname{Spec} A^x_{f_x} \arrow[ur] \arrow[rr, "\sim", "\psi_{xy}"'] \arrow[d, "\varphi_x"] & & \operatorname{Spec} A^y_{f_y} = V_{yx} \arrow[ul] \arrow[d, "\varphi_y"] & \\
& U_{xy} = \operatorname{Spec} B^x_{f_x} \arrow[dr] \arrow[rr, "\sim", "\varphi_{xy}"'] & & \operatorname{Spec} B^y_{f_y} = U_{yx} \arrow[dl] & \\
& & & & \\
\operatorname{Spec} B^x & & \operatorname{Spec} B^x \cap \operatorname{Spec} B^y \arrow[ll] \arrow[rr] & & \operatorname{Spec} B^y
\end{tikzcd} \tag{5}$$

図において

$$A^x = B^x[i] \Rightarrow A^x_f = B^x_f[i] = B^x[i]_f,\ f \in B^x$$

であり、

$$\varphi_{xy} : U_{xy} = \operatorname{Spec} B^x_{f_x} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} B^y_{f_y} = U_{yx} \subseteq \operatorname{Spec} B^x \cap \operatorname{Spec} B^y,\ B^x_{f_x} \approx B^y_{f_y},\ f_x \in B^x, f_y \in B^y$$

と取れるので、これに対応して

$$\psi_{xy} : V_{xy} = \operatorname{Spec} B^x_{f_x}[i] \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} B^y_{f_y}[i] = V_{yx}$$

$$\subseteq \operatorname{Spec} B^x[i] \cap \operatorname{Spec} B^y[i] = \operatorname{Spec} A^x \cap \operatorname{Spec} A^y$$

を得る。Ring 版に直してみれば明らかなように、上図は可換図であり、特に $\varphi_y \psi_{xy} = \varphi_{xy} \varphi_x$ である。

[9] $(\sigma^x)^2 = \mathrm{id}$ であり、$q^x = q|_{\operatorname{Spec} A^x}$ とすると、$\alpha q = q\sigma \Rightarrow \alpha q^x = q\sigma^x = q^x \sigma^x$

X が scheme なので X^x, ψ_x は Exercise 2.2.12 の条件を満たす。それを用いて X_0^x, φ_x は Exercise 2.2.12 の条件を満たすことを示す。
(1) 定義から φ_{xy} は isomorphism である。$\psi_{xy}\psi_{yx} = 1$ より

$$\varphi_{xy}\varphi_{yx}\varphi_y = \varphi_{xy}\varphi_x\psi_{yx} = \varphi_y\psi_{xy}\psi_{yx} = \varphi_y$$

φ_y は全射なので $\varphi_{xy}\varphi_{yx} = 1$ である。
(2) $\psi_{xy}(V_{xy} \cap V_{xz}) = V_{yx} \cap V_{yz}$ が成り立つこと、および φ_x, φ_y が全射であることから

$$\varphi_y\psi_{xy}(\varphi_x^{-1}(U_{xy} \cap U_{xz})) = \varphi_y(\varphi_y^{-1}(U_{yx} \cap U_{yz}))$$

$$\Rightarrow \varphi_{xy}\varphi_x\varphi_x^{-1}(U_{xy} \cap U_{xz}) = U_{yx} \cap U_{yz}$$

$$\Rightarrow \varphi_{xy}(U_{xy} \cap U_{xz}) = U_{yx} \cap U_{yz}$$

を得る。さらに φ_x の全射性から

$$\psi_{yz}\psi_{xy} = \psi_{xz} \Rightarrow \varphi_z\psi_{yz}\psi_{xy} = \varphi_z\psi_{xz} \Rightarrow \varphi_{yz}\varphi_y\psi_{xy} = \varphi_{xz}\varphi_x$$

$$\Rightarrow \varphi_{yz}\varphi_{xy}\varphi_x = \varphi_{xz}\varphi_x \Rightarrow \varphi_{yz}\varphi_{xy} = \varphi_{xz}$$

が成り立つ。
以上により $\operatorname{Spec}(A^x)^\sigma$ は貼り合わせることができ、$X_0 = \bigcup_x \operatorname{Spec} B^x$ が得られ、

$$X = X_0 \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$$

を得る。
Fiber product の projection morphism を p_1, p_2 とすると、

$$X_0 \times \mathbf{C} = X_0' \times \mathbf{C} \Rightarrow p_1(X_0 \times \mathbf{C}) = p_1(X_0' \times \mathbf{C}) \Rightarrow X_0 = X_0'$$

より、X_0 は一意的である。

X_0 の separated 性
$\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$ は有限生成 $\mathbf{R}$ 加群なので $\operatorname{Spec}\mathbf{C} \to \operatorname{Spec}\mathbf{R}$ は finite である。従って、任意の scheme Y に対して base change $Y \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \to Y$ も finite である (Exercise 4.1 の解答中、性質 1)。$Y = X_0 \times_{\mathbf{R}} X_0$ とおくと $X_0 \times_{\mathbf{R}} X_0 \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \to X_0 \times_{\mathbf{R}} X_0$、すなわち $f : X_0 \times_{\mathbf{R}} X = X \times_{\mathbf{C}} X \to X_0 \times_{\mathbf{R}} X_0$ は finite である。

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\Delta_{X/\mathbf{C}}"] & \\ X_0 \arrow[dr, "\Delta_{X_0/\mathbf{R}}"'] & & X \times_{\mathbf{C}} X \arrow[dl, "f"] \\ & X_0 \times_{\mathbf{R}} X_0 & \end{tikzcd}$$

において X は fiber product になっている (Exercise 4.4 の証明中の性質 3。このような fiber product の図式は Cartesian と呼ばれている)。

f が finite なので $\varphi : X \to X_0$ も finite、従って closed morphism であり、$\varphi(X)$ は closed となる。一方、$\varphi : X \to X_0$ は、局所的な $\varphi_x : X^x \to X_0^x$ が全射だったので、全射であり、従って

$$\Delta_{X_0/\mathbf{R}}(X_0) = \Delta_{X_0/\mathbf{R}}\varphi(X) = f(\Delta_{X/\mathbf{C}}(X))$$

$X \to \mathbf{C}$ が separated なので $\Delta_{X/\mathbf{C}}$ は closed immersion、よって $\Delta_{X/\mathbf{C}}(X)$ は closed である。f は finite なので closed ゆえ $f(\Delta_{X/\mathbf{C}}(X))$ は closed、すなわち $\Delta_{X_0/\mathbf{R}}(X_0)$ は closed となる。

以上から $X_0 \to \mathbf{R}$ は separeted である (Corollary 4.2)。

(b) X が $X = \operatorname{Spec} A$ なら $X_0 = \operatorname{Spec} A^\sigma$ より X_0 は affine である。逆に $X_0 = \operatorname{Spec} B$ なら $X = X_0 \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = \operatorname{Spec}(B \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$ より X も affine である。

(c) (c-1) $f_0 : X_0 \to Y_0$ が存在する場合
$Y = Y_0 \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ の U.P. から

$$f = f_0 \times 1 : X = X_0 \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \to Y = Y_0 \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C},\ f_0\varphi_X = \varphi_Y f \tag{6}$$

が存在する。

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{C} & \\
X = X_0 \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, "\exists f"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & & Y = Y_0 \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \arrow[ul] \arrow[d, "\varphi_Y"'] \\
X_0 \arrow[rr, "f_0"] & & Y_0
\end{tikzcd}$$

この f が $\sigma_Y f = f\sigma_X$ を満たすことを示す。下図式において、中段の $Y = Y_0 \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ の U.P. から

$$h : X \to Y,\ \varphi_Y h = f_0\varphi_X\sigma_X \tag{7}$$

となる h が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma_X"'] \arrow[dr, dotted, "\exists h"] & Y \arrow[d, "\sigma_Y"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & Y \arrow[d, "\varphi_Y"] \\
X_0 \arrow[r, "f_0"] & Y_0
\end{tikzcd}$$

ここで、$\sigma_Y f,\ f\sigma_X$ とも関係式 (7) の $\varphi_Y h = f_0\varphi_X\sigma_X$ における h に代入しても成立する。なぜなら、次の性質 (5) に示すように

$$\varphi_X\sigma_X = \varphi_X,\ \varphi_Y\sigma_Y = \varphi_Y$$

が成り立つので、$\varphi_Y\sigma_Y f=\varphi_Y f=f_0\varphi_X=f_0\varphi_X\sigma_X$ であり、また式 (6) の両辺に右側から σ_X を掛ければ得られるからである。

従って h の一意性から

$$\sigma_Y f=f\sigma_X$$

である。

性質 5. $\varphi_X\sigma_X=\varphi_X:X\to X_0$

(証明) $X_0=\bigcup_j V_j,\ V_j=\operatorname{Spec}B_j$ とすると

$$X=\bigcup_j U_j,\ U_j=\varphi_X^{-1}(\operatorname{Spec}B_j)=\operatorname{Spec}(B_j\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C})$$

である。このとき、

$$B_j\overset{\iota}{\hookrightarrow}B_j\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}\overset{1\times\alpha}{\to}B_j\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$$

において、$(1\times\alpha)|_{B_j}$ は埋込ゆえ $\iota=(1\times\alpha)\iota$ となり、U_j において $\varphi_X\sigma_X=\varphi_X$ が得られるので、$X=\bigcup_j U_j$ においても

$$\varphi_X\sigma_X=\varphi_X$$

が成り立つ。(証明終)

(c-2) $f:X\to Y,\ f\sigma_X=\sigma_Y f$ が存在する場合

(a) の場合同様にして、任意の $y\in Y$ に対して $y,\sigma_Y(y)$ 共に含むような affine 開集合から成る open affine covering $V^i=\operatorname{Spec}B^i$ と ((a) 参照)、それらに対する Y_0 とその open affine covering $V_0^i=\operatorname{Spec}B_0^i$ が存在し、$B^i=B_0^i\otimes\mathbf{C}$ を満たす。このとき、$U^i=f^{-1}(V^i)=\bigcup_j U^{ij},\ U^{ij}=\operatorname{Spec}A^{ij}$ に対し、

$$f^{ij}=f|_{U^{ij}}:U^{ij}\to V^i$$

は separated である[10]。

$\{U^{ij}\}$ も、任意の $x\in X$ に対しては $x,\sigma_X(x)$ 共に含むような affine 開集合から成るようにできる。X に対応する X_0 の open affine covering $U_0^{ij}=\operatorname{Spec}A_0^{ij}$ が存在し、$A^{ij}=A_0^{ij}\otimes\mathbf{C}$ を満たす。

Scheme に対応する環における準同型を下図式のようにおくと、$\sigma_Y f=f\sigma_X$ から $g^{ij}\delta_B^i=\delta_A^{ij}g^{ij}$ を得る。

$$\begin{tikzcd} A^{ij} & B_i \arrow[l, "g^{ij}"'] \\ A^{ij} \arrow[u, "\delta_A^{ij}"] & B^i \arrow[l, "g^{ij}"] \arrow[u, "\delta_B^i"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{Spec}A^{ij} \arrow[r, "f^{ij}"] \arrow[d, "\sigma_X^{ij}"'] & \operatorname{Spec}B_i \arrow[d, "\sigma_Y^i"] \\ \operatorname{Spec}A^{ij} \arrow[r, "f^{ij}"'] & \operatorname{Spec}B^i \end{tikzcd}$$

[10] Corollary 4.6(a), (b), (f) から、$U^{ij}\overset{\text{open immersion}}{\hookrightarrow}U^i\overset{\text{separated}}{\longrightarrow}V^i$ 全体は separated である。

一方、下図式が得られるので、

$$
\begin{tikzcd}
A^{ij} & B_i \arrow[l, "g^{ij}"'] \\
A^{ij}_0 \arrow[u, "\iota^{ij}_A"] & B^i_0 \arrow[l, dotted, "g^{ij}_0"] \arrow[u, "\iota^i_B"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} A^{ij} \arrow[r, "f^{ij}"] \arrow[d, "\varphi^{ij}_X"'] & \operatorname{Spec} B_i \arrow[d, "\varphi^i_Y"] \\
\operatorname{Spec} A^{ij}_0 \arrow[r, dotted, "f^{ij}_0"'] & \operatorname{Spec} B^i_0
\end{tikzcd}
$$

$b_0 \in B^i_0$ に対して

$$\delta^{ij}_A(g^{ij}\iota^i_B(b_0)) = g^{ij}\delta^i_B\iota^i_B(b_0) = g^{ij}\iota^i_B(b_0)$$

から $g^{ij}\iota^i_B(b_0) \in A^{ij}_0$ である。よって、$g^{ij}_0 : B^i_0 \to A^{ij}_0$、すなわち $f^{ij}_0 : \operatorname{Spec} A^{ij}_0 \to \operatorname{Spec} B^i_0$ が存在し、

$$f^{ij}_0\varphi^{ij}_X = \varphi^i_Y f^{ij} \tag{8}$$

を満たす。

この f^{ij}_0 を貼り合わせて $f_0 : X_0 \to Y_0$ を構成するには $\operatorname{Spec} A^{ij}_0 \cap \operatorname{Spec} A^{kl}_0$ において $f^{ij}_0,\ f^{kl}_0$ が等しいことを示す必要がある。

Fiber product の projection φ_X による $\operatorname{Spec} A^{ij}_0 \cap \operatorname{Spec} A^{kl}_0$ の逆像は $\operatorname{Spec} A^{ij} \cap \operatorname{Spec} A^{kl}$ となり

$$\varphi'_X = \varphi|_{\operatorname{Spec} A^{ij} \cap \operatorname{Spec} A} : \operatorname{Spec} A^{ij} \cap \operatorname{Spec} A^{kl} \to \operatorname{Spec} A^{ij}_0 \cap \operatorname{Spec} A^{kl}_0$$

を満たす。(a) で示したように $B_f[i] \approx B[i]_f$ は B_f 上整なので、φ'_X は全射である。

$h := \varphi_Y f : X \to Y_0$ は既に定義されているので、当然のことながら $\operatorname{Spec} A^{ij} \cap \operatorname{Spec} A^{kl}$ において $h|_{\operatorname{Spec} A^{ij}},\ h|_{\operatorname{Spec} A^{kl}}$ は等しくなる。

従って、式 (8) から $\operatorname{Spec} A^{ij} \cap \operatorname{Spec} A^{kl}$ において

$$f^{ij}_0\varphi'_X = h|_{\operatorname{Spec} A^{ij}} = h|_{\operatorname{Spec} A^{kl}} = f^{kl}_0\varphi'_X$$

であり、φ'_X が全射なので $f^{ij}_0 = f^{kl}_0$ となる。

以上により、f^{ij}_0 を貼り合わせることができ、$f_0 : X_0 \to Y_0$ を得る。

(d) Semi-linear involution σ に対応する ring morphism $\delta = \sigma^*$ は

$$\delta : \mathbf{C}[x] \to \mathbf{C}[x],\ f(t) = \sum_i a_i t^i \mapsto \overline{f}(\delta(t)) = \sum_i \overline{a}_i \delta(t)^i$$

であり[11] 、$\delta^2 = \mathrm{id}$ を満たす[12] 。すると

$$\delta(t) = \beta(1 - t/\overline{\beta}),\ \beta \in \mathbf{C}$$

[11] Semi-linear の ring バージョンは

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C}[t] & \mathbf{C}[t] \arrow[l, "\delta=\sigma^*"'] \\
\mathbf{C} \arrow[u] & \mathbf{C} \arrow[l, "\alpha^*"'] \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

となるが、α^* は共役を表すので、$\delta(\alpha) = \overline{\alpha},\ \alpha \in \mathbf{C}$ である。

[12] $\sigma^2 = \mathrm{id}_X \Rightarrow (\sigma^2)^* = (\sigma^*)^2 = (\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{\mathbf{C}[t]}$

となる[13]。

このとき、a, b を $a\overline{\beta} + b - \overline{b} = 0$ を満たすようにおくと、$\delta(at+b) = at+b$ が成り立つ[14] 。そこで

$$\epsilon : \mathbf{C}[t] \to \mathbf{C}[s],\ t \mapsto (s-b)/a,\ f(t) \mapsto \overline{f}(\epsilon(t))$$

とおくと[15]

$$\delta' = \epsilon\delta\epsilon^{-1} : \mathbf{C}[s] \to \mathbf{C}[s],\ s \mapsto s,\ c \mapsto \overline{c}, c \in \mathbf{C}$$

を得る。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}[t] & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{C}[t] \\ {\scriptstyle\epsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\epsilon} \\ \mathbf{C}[s] & \xrightarrow{\delta'} & \mathbf{C}[s] \end{array}$$

よって、δ' は $\mathbf{C}[s]$ の semi-linear involution となる。

従って $\delta(t) = t$ としてよく、すると

$$\delta(f(t)) = f(t) \Rightarrow \overline{f}(t) = f(t) \Rightarrow \mathbf{C}[t]^{\sigma} = \mathbf{R}[t]$$

より

$$X = \mathbf{A}^1_{\mathbf{C}} = \operatorname{Spec} \mathbf{R}[x] \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \Rightarrow X_0 = \operatorname{Spec} \mathbf{R}[x] = \mathbf{A}^1_{\mathbf{R}}$$

が得られる。

(e) $X = \mathbb{P}^1_{\mathbf{C}} = \operatorname{Proj} \mathbf{C}[x_0, x_1]$ において semi-linear involution を $\sigma : X \to X$ とする。当面、$\mathbb{P}^1_{\mathbf{C}} = \mathbb{A}^1_{\mathbf{C}} \cup \{\infty\}$ とみなして進める (Exercise 1.6.6 参照)。

1) σ に固定点がない場合

$\mathbf{R}$ の元に対応している閉点を $x \in X$ とする。σ は semi-linear automorphism なので $\sigma(x)$ も $\mathbf{R}$ の閉点となり (∞ を含む)、$\mathbf{R}$ で $x, \sigma(x)$ を $0, \infty$ に変換する一次変換 $\lambda^* : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は係数を $\mathbf{R}$ の元にできる (Exercise 1.6.6)。さらに、これを多項式環に拡張しておく。具体的には、多項式の係数を変換するのみである。

対応する scheme morphism λ は $x, \sigma(x)$ をそれぞれ $0 = (t), \infty = (t^{-1})$ に写す。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} \\ X & \xrightarrow{\sigma'} & X \end{array}$$

すると $\sigma' = \lambda\sigma\lambda^{-1}$ は閉点 0 を ∞ に写す semi-linear involution となる。よって、以下では $\sigma(0) = \infty$ とする。

[13] 次数の比較から $\deg \delta(t) = 1$ なので $\delta(t) = \gamma t + \beta$ とすると $\delta^2(t) = t$ より得られる。

[14] $s = i\beta(\overline{\beta} - 2t)$ はその一例

[15] $c \mapsto \overline{c},\ c \in \mathbf{C}$ に注意。$\epsilon(t)$ の t に c を代入するのではない。

このとき

$$U := X - \{x, \sigma(x)\} = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[t, t^{-1}]$$

である。実際、$(t), (t^{-1})$ は $0, \infty$ に対応しているが、$\mathbf{C}[t, t^{-1}]$ において $(t), (t^{-1})$ は prime ideal ではない。一方、そのほかの prime ideal $(f(t))$ では $f(t)$ は非零定数項を持つので $(t), (t^{-1})$ ではない。

σ に対応する $\mathbf{C}[t, t^{-1}]$ における ring morphism $\delta := \sigma^*$ は

$$\delta : \mathbf{C}[t, t^{-1}] \to \mathbf{C}[t, t^{-1}],\ f(t) = \sum_i a_i t^i \mapsto \overline{f}(\delta(t)) = \sum_i \overline{a}_i \delta(t)^i$$

である ($\overline{f}(t) := \sum_i \overline{a}_i t^i$)。

$$\delta(t) = t^n g(t),\ g(0) \neq 0,\ g(t) \in \mathbf{C}[t],\ n \in \mathbf{Z},\ m = \deg g(t) \geq 0$$

とすると、$\delta^2 = \mathrm{id}$ より

$$\delta^2(t) = \delta(t^n g(t)) = (t^n g(t))^n \overline{g}(t^n g(t)) = t \tag{9}$$

となるが、最高次数 = 最低次数 = 1 による

$$(n+m)n + (n+m)m = n^2 + nm = 1 \Rightarrow m = 0, n = \pm 1$$

と、$\delta^2 = \mathrm{id}$ から

$$\delta(t) = at,\ |a|^2 = 1,\ a \in \mathbf{C} \text{ or } a/t,\ 0 \neq a \in \mathbf{R} \tag{10}$$

である。

$\delta(t) = at,\ |a|^2 = 1$ のとき、$\alpha^2 = \overline{a}$ を満たす α をとると、U の closed point $(\alpha/t - 1)$ は σ の固定点となり[16] 、矛盾である。

$\delta(t) = a/t,\ 0 \neq a \in \mathbf{R}$ のときは、もし $a > 0$ とすると $\delta(t - \sqrt{a}) = a/t - \sqrt{a} = \sqrt{a}/t(\sqrt{a} - t)$ となり閉点に対応する ideal $(t - \sqrt{a})$ が変わらないので、$a < 0$ である。$t \leftarrow \sqrt{-a}t$ と変換すると

$$\delta(t) = -t^{-1}$$

となる。$\delta(a) = \overline{a},\ a \in \mathbf{C}$ は変わらないので、σ は semi-linear である。

さて、ここで

$$\mathbb{P}^1_{\mathbf{C}} = \operatorname{Proj} \mathbf{C}[W, Y, Z]/(WY + Z^2)$$

となることを示す。

$$\mathbf{C}[t] = \mathbf{C}[t, y]/(y + t^2) = \mathbf{C}[Y/W, Z/W]/(Y/W + (Z/W)^2)$$

[16] $\delta(\alpha/t - 1) = \overline{\alpha}/(at) - 1 = \overline{\alpha a}/t - 1 = \overline{\alpha}\alpha^2/t - 1 = \alpha/t - 1$

は $t=Z/W,\ y=Y/W$ とすることにより成立し、$y+t^2=0$ から $-t^{-1}=t/y=Z/Y$ となる。

$$\mathbf{C}[t^{-1}]=\mathbf{C}[t^{-1},z]/(z+(t^{-1})^2)=\mathbf{C}[W/Y,Z/Y]/(W/Y+(Z/Y)^2)$$

は、$-t^{-1}=Z/Y,\ z=W/Y$ から得られる。

一方、$\mathrm{Proj}\,\mathbf{C}[W,Y,Z]/(WY+Z^2)$ において、$T:=\mathbf{C}[W,Y,Z]/(WY+Z^2)$ とすると、$T_{(W)}=\mathbf{C}[t],\ T_{(Y)}=\mathbf{C}[t^{-1}]$ なので、$D_+(W)=\mathrm{Spec}\,\mathbf{C}[t]=X-x,\ D_+(Y)=\mathrm{Spec}\,\mathbf{C}[t^{-1}]=X-\sigma(x)$ の union は X となる。よって、

$$X=\mathbb{P}^1_{\mathbf{C}}=\mathrm{Proj}\,\mathbf{C}[W,Y,Z]/(WY+Z^2)$$

である。

δ の演算は $t=Z/W,\ -t^{-1}=Z/Y$ の交換、すなわち W,Y の交換と $\mathbf{C}$ の共役化に対応している。

さて、$U=(W+Y)/2, V=i(Y-W)/2$ とおくと、$WY+Z^2=U^2+V^2+Z^2$ より

$$X=\mathrm{Proj}\,\mathbf{C}[U,V,Z]/(U^2+V^2+Z^2)$$

であるが、δ は W,Y の交換と $\mathbf{C}$ の共役化なので、$\delta:U\mapsto U,\ V\mapsto V$ となり、$\mathbf{C}[U,V,Z]/(U^2+V^2+Z^2)$ においては $\mathbf{C}$ の共役化だけの操作になる。従って

$$X_0=\mathrm{Proj}\,(\mathbf{C}[U,V,Z]/(U^2+V^2+Z^2))^{\sigma}=\mathrm{Proj}\,\mathbf{R}[U,V,Z]/(U^2+V^2+Z^2)$$

を得る。

2) σ に固定点が存在する場合

固定点は存在するとすれば 2 個以上である。

($\because$) 固定点が 1 個のみと仮定し、それを x とする。x 以外の閉点 y をとると、それは固定点ではないので、以前と同様、$y=0=[1:0],\ \sigma(y)=\infty=[0:1]$ とおける。$X-\{0,\infty\}\ni x$ なので、$X=(X-\{x\})\cup(X-\{0,\infty\})$ である。

x に対応する極大 ideal を (f_x) とおくと、$U:=X-\{x\}=D_+(f_x)=\mathrm{Spec}\,\mathbf{C}[t_0,t_1]_{(f_x)}$ なので、(d) から

$$U_0=\mathrm{Spec}\,\mathbf{R}[t_0,t_1]_{(f_x)}$$

となる。

一方、$V:=X-\{0,\infty\}=\mathrm{Spec}\,\mathbf{C}[t,t^{-1}]$ なので、式 (10) から

$$\delta(t)=at,\ |a|^2=1,\ a\in\mathbf{C}\ \text{or}\ a/t,\ a\in\mathbf{R}$$

となる。

$\delta(t)=at,\ |a|^2=1$ の場合。$a=\overline{\alpha}/\alpha,\ \alpha\in\mathbf{C}$ を満たす α をとると、$(t-\alpha)$ は固定閉点となる。このような α は複数個存在するので、1 個という仮定に反する。

$\delta(t)=a/t,\ a\in\mathbf{R}$ の場合。$V=\mathrm{Spec}\,\mathbf{C}[t,t^{-1}]\ni x$ より固定閉点が存在するので、それを $(t-\alpha)$ とすると、$((t-\alpha))=\delta^{-1}((t-\alpha))=\delta((t-\alpha))=(\delta(t)-\overline{\alpha})\Rightarrow$

$a = |\alpha|^2 > 0$ より $a > 0$ である。しかし、$a = |\alpha|^2$ を満たす α は複数個存在するので、1 個という仮定に反する。従って、固定閉点は存在するとすれば複数個である。($\because$ 終)

2 個の固定点を $0 = [1:0], \infty = [0:1]$ としてよい。このとき、$X - \{0\} = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[t_0, t_1]_{(t_0)}$ に対しては、(d) より

$$(\operatorname{Spec} \mathbf{C}[t_0, t_1]_{(t_0)})^\sigma = \operatorname{Spec} \mathbf{R}[t_0, t_1]_{(t_0)}$$

であり、同様に、$X - \{\infty\} = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[t_0, t_1]_{(t_1)}$ に対しては

$$(\operatorname{Spec} \mathbf{C}[t_0, t_1]_{(t_1)})^\sigma = \operatorname{Spec} \mathbf{R}[t_0, t_1]_{(t_1)}$$

である。

$$X = D_+(t_0) \cup D_+(t_1) = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[t_0, t_1]_{(t_0)} \cup \operatorname{Spec} \mathbf{C}[t_0, t_1]_{(t_1)}$$

なので、

$$X_0 = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[t_0, t_1]^\sigma_{(t_0)} \cup \operatorname{Spec} \mathbf{C}[t_0, t_1]^\sigma_{(t_1)} = \operatorname{Spec} \mathbf{R}[t_0, t_1]_{(t_0)} \cup \operatorname{Spec} \mathbf{R}[t_0, t_1]_{(t_1)}$$

$$= D^{\mathbf{R}}_+(t_0) \cup D^{\mathbf{R}}_+(t_1) = \mathbf{P}^1_R$$

が成立する。

2.4.8

(d) $f : X \to Y,\ g : Z \to W$ とする。
$X \times_Y (Y \times Z) = X \times Z$ から、(c) より $p_3 : X \times Z \to Y \times Z$ は $\mathscr{P}$ を満たす。
$(Y \times W) \times_W Z = Y \times Z$ から、(c) より $r_1 : Y \times Z \to Y \times W$ は $\mathscr{P}$ を満たす。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dd, "f"', "\mathscr{P}"] & X \times Z \arrow[l, "p_1"'] \arrow[rr, "p_2"] \arrow[dd, "f\times g"'] \arrow[dr, "p_3"', "\mathscr{P}"] & & Z \arrow[dd, "g"', "\mathscr{P}"] \\
& & Y \times Z \arrow[ur, "r_2"'] \arrow[dl, "r_1", "\mathscr{P}"'] & \\
Y & Y \times W \arrow[l, "q_1"] \arrow[rr, "q_2"] & & W
\end{tikzcd}$$

上図式において、$f \times g = r_1 p_3$ である。($\because$) $X \times Z = X \times_Y (Y \times Z)$ から $q_1 r_1 p_3 = f p_1$ を得、$Y \times Z = (Y \times W) \times_W Z$ から $q_2 r_1 = g r_2$ を得、$Y \times Z$ の U.P.(Universal Property) から $r_2 p_3 = p_2$ を得る。よって $q_2 r_1 p_3 = g r_2 p_3 = g p_2$ となり、$Y \times W$ の U.P. から $f \times g = r_1 p_3$ が成り立つ。($\because$ 終)
従って (b) より $f \times g : X \times Z \to Y \times W$ は $\mathscr{P}$ を満たす。

(e) 下図式において、g が separeted なので Δ は closed immersion、よって $\mathscr{P}$ を満たす。$Y \times_{Y \times_Z Y} (X \times_Z Y) = (Y \times_{Y \times_Z Y} X) \times_Z Y = (X \times_{Y \times_Z Y} Y) \times_Z Y =$

$X \times_{Y \times_Z Y} (Y \times_Z Y) = X$ から、(c) より Γ_f は $\mathscr{P}$ を満たす。gf は $\mathscr{P}$ を満たすので、(c) より q は $\mathscr{P}$ を満たす。

$$\begin{tikzcd}
& X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dr, "q", "\mathscr{P}"'] & Y \times_Z Y \\
X \arrow[dr, "\mathscr{P}", "gf"'] & X \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[u, "\mathscr{P}", "\Gamma_f"'] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, "\mathscr{P}", "\Delta(\text{c.i.(closed immersion)})"'] \arrow[dl, "g(\text{separated})"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

$X \times_Z Y$ の U.P. から $f = q\Gamma_f$ であり、(b) から f は $\mathscr{P}$ を満たす。

(f) 一般に Scheme X に対する reduced scheme X_{red} は、X の affine open subset A に関する全射 $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{N}(A)$ の貼り合わせで構成されているので、$X_{\mathrm{red}} \to X$ は closed immersion である。

Exercise 2.2.3(c) より $X_{\mathrm{red}} \to X \to Y$ は $X_{\mathrm{red}} \to Y_{\mathrm{red}} \to Y$ に等しい。Closed immersion は $\mathscr{P}$ を満たすので、(b) より $X_{\mathrm{red}} \to X \to Y$ は $\mathscr{P}$ を満たし、よって $X_{\mathrm{red}} \to Y_{\mathrm{red}} \to Y$ は $\mathscr{P}$ を満たす。$Y_{\mathrm{red}} \to Y$ は closed immersion なので separated であり、(e) より $X_{\mathrm{red}} \to Y_{\mathrm{red}}$ は $\mathscr{P}$ を満たす。

$$\begin{tikzcd}
X_{\mathrm{red}} \arrow[r, "\text{c.i.}", "\mathscr{P}"'] \arrow[dr] & X \arrow[r, "f", "\mathscr{P}"'] & Y \\
& Y_{\mathrm{red}} \arrow[ur, "\text{c.i.}\to\text{separated}"'] &
\end{tikzcd}$$

2.4.9

下図式において $(\mathbf{P}^r_Z \times_Z \mathbf{P}^s_Z) \times_{\mathbf{P}^s_Z} Y = \mathbf{P}^r_Z \times_Z Y = \mathbf{P}^r_Y$ なので、closed immersion g' の base change である p も closed immersion である。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'", "\text{c.i.(closed immersion)}"'] & & Y \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\text{c.i.}", "g'"'] & & Z \\
& \mathbf{P}^r_Y \arrow[ur] \arrow[dr, "p", "\text{c.i.}"'] & & \mathbf{P}^s_Z \arrow[ur, "\beta"] & \\
& & \mathbf{P}^r_Z \times_Z \mathbf{P}^s_Z \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "h"] & & \mathbf{P}^{rs+r+s}_Z \arrow[uu, "e"]
\end{tikzcd}$$

Closed immersion を $\mathscr{P}$ とおくと、Exercise 4.8(a)-(c) が成立することから closed immersion の product は closed immersion である。

従って $\mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^s \to \mathbf{P}^{rs+s+r}$ が closed immersion ゆえ (性質 6)、$h : \mathbf{P}^r_Z \times_Z \mathbf{P}^s_Z = \mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^s \times Z \to \mathbf{P}^{rs+s+r} \times Z$ が closed immersion となる ($\mathbf{P}^n := \mathbf{P}^n_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[x_0, \cdots, x_n]$)。

可換性から $gf = \beta\alpha p f'$ なので、$\beta\alpha = eh$ なら (後述の $\star\star$)、gf は projective morphism となる。

性質 **6.** Segre-embedding は closed immersion である、すなわち
$\mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^s \to \mathbf{P}^{rs+s+r}$: closed immersion

(証明) 一般に $S = A[x_0, \cdots, x_n]$ のとき、$\operatorname{Proj} S = \bigcup_i \operatorname{Spec} S_{(x_i)}$ は open affine covering である (Proposition 2.5)。従って、

$$\mathbf{P}^{rs+r+s} = \bigcup_{i,j} \operatorname{Spec} A[z_{00}, \cdots, z_{rm}]_{(z_{ij})}$$

$$\mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^s = \bigcup_{i,j} \operatorname{Spec} \left(A[x_0, \cdots, x_r]_{(x_i)} \otimes A[y_0, \cdots, y_s]_{(y_j)}\right)$$

であるが、

$$A[z_{00}, \cdots, z_{rm}]_{(z_{ij})} \twoheadrightarrow A[x_0, \cdots, x_r]_{(x_i)} \otimes A[y_0, \cdots, y_s]_{(y_j)}$$

$$z_{kl}/z_{ij} \mapsto x_k/x_i \otimes y_l/y_j$$

は全射なので

$$\mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^s \to \mathbf{P}^{rs+r+s}$$

は closed immersion である。(証明終)

$\star\star$ 可換性 $\beta\alpha = eh$
Projective n-space $\mathbf{P}^n = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[x_0, \cdots, x_n]$ は $\mathbb{Z}$ 上なので

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[x_0, \cdots, x_n]_{(x_i)}$$

はどのように分解されようと一致している。よって

$$\mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^s \to \mathbf{P}^s \to \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^s \to \mathbf{P}^{rs+r+s} \to \mathbb{Z}$$

は等しい。これらに Z で fiber product を取れば、$\beta\alpha = eh$ を得る。

Projective morphism が Exercise (a)-(c) を満たすこと
(a) $f : X \to Y$ が closed immersion ならば、$f : X \to \mathbf{P}^0_Y = Y \to Y$ なので、projective morphism である。
(b) 既に示した。
(c) $f : X \to Y$ を projective morphism とする。

$$\begin{tikzcd}
 & & X \times_Y Z \arrow[dll] \arrow[d, "c.i."] \arrow[dr] & \\
X \arrow[r, "c.i."] \arrow[drr, "f"'] & \mathbf{P}^n_Y \arrow[dr] & \mathbf{P}^n_Y \times_Y Z = \mathbf{P}^n_Z \arrow[l] \arrow[r] & Z \arrow[dl] \\
 & & Y &
\end{tikzcd}$$

において $X \to \mathbf{P}^n_Y$ は closed immersion である。

$$X \times_{\mathbf{P}^n_Y} \times (\mathbf{P}^n_Y \times_Y Z) = X \times_Y Z$$

から $X \times_Y Z \to \mathbf{P}^n_Y \times_Y Z$ も base change により closed immersion である。

$$\mathbf{P}^n_Y \times_Y Z = \mathbf{P}^n \times Y \times_Y Z = \mathbf{P}^n \times Z = \mathbf{P}^n_Z$$

なので、$X \times_Y Z \to Z$ は projective morphism である。

2.4.10

(a) $\varphi : X \to S$ が proper で S は noetherian とすると、φ の finite-type 性から X は noetherian である (Exercise 2.3.13(g))。よって X は有限個の既約成分の和集合となる: $X = \bigcup_{i \in I} X_i,\ |I| < \infty$

このとき、$X_i \hookrightarrow X$ は closed immersion となる。なぜなら、closed immersion は local な性質なので (Exercise 2.4.3 の解答中、性質 2)、X の affine subset V とその逆像の $V \cap X_i$ に Exercise 2.3.11(b) を適用すれば closed immersion となるからである。

よって、$\varphi_i : X_i \overset{\text{c.i.}}{\to} X \overset{\varphi}{\to} S$ は proper である。もし $\varphi_i : X_i \to S$ に対して Chow's Lemma が証明できたとする。すなわち、S 上 projective な X_i'、$g_i : X_i' \to X_i$、および open dense $U_i \subseteq X_i$ が存在し、$g_i|_{g_i^{-1}(U_i)} : g_i^{-1}(U_i) \overset{\sim}{\to} U_i$ とできたとする。ここで、

$$X' = \coprod_i X_i',\ g = \coprod_i g_i : X' \to X$$

$$V_i = X - \bigcup_{j \neq i} X_j = X_i - \bigcup_{j \neq i} X_j$$

$$U = \coprod_i (U_i \cap V_i)$$

とおく。すると $U_i \cap V_i$ は X_i で open であり、X_i が既約なので

$$(U_i \cap V_i)^- = X_i \Rightarrow U^- = \coprod_i (U_i \cap V_i)^- = X$$

から U は X で open dense となる。また、

$$g^{-1}(U) = \coprod_i g^{-1}(U_i \cap V_i) = \coprod_i g_i^{-1}(U_i \cap V_i) \approx \coprod_i U_i \cap V_i = U$$

である。

さらに $X' \to S$ は projective である。実際、$n \leq m$ のとき $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^m$ は closed immersion である。なぜなら、closed immersion は local な性質であり、$\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^m$ を open affine cover で考えると、

$$\mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m] \to \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]$$

$$t(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) \mapsto t(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0)$$

は全射だからである。よって $\mathbf{P}^n_S \to \mathbf{P}^m_S$ は closed immersion である。また、$X'_i \to S$ は projective なので、十分大きな N に対して $X'_i \to \mathbf{P}^N_S$ は closed immersion であり、再び closed immersion の local 性から

$$X' = \coprod_i X'_i \to \mathbf{P}^N_S$$

は closed immersion となる。

以上により $X' \to S$ は projective となる。

(b) $\varphi : X \to S$ は finite type なので

$$X = \bigcup_{ij} X_{ij},\ \varphi^{-1}(S_i) = \bigcup_j X_{ij},\ S = \bigcup_i S_i,\ X_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij},\ S_i = \operatorname{Spec} B_i$$

において、A_{ij} は有限生成 B_i 代数であり、その生成元を $a_1, \cdots, a_n$ とすると、

$$B_i[x_1, \cdots, x_n] \twoheadrightarrow A_{ij} = B_i[a_1, \cdots, a_n]$$

から

$$\operatorname{Spec} A_{ij} \overset{\text{c.i.}}{\to} \mathbf{A}^n_{B_i}$$

は closed immersion となる。

ここで、X_{ij} の添字を振り直して $X = \bigcup_i U_i$ とすれば、U_i は open affine で

$$U_i \overset{\text{c.i.}}{\to} \mathbf{A}^n_{B_i}$$

となり、U_i の像は closed である。

一方、$\mathbf{A}^n_{B_i} \subseteq \mathbf{P}^n_{B_i}$ は open subset であり、$S_i = \operatorname{Spec} B_i \subseteq S$ から $\mathbf{P}^n_{S_i} \subseteq \mathbf{P}^n_S$ も open subset である。これらをまとめると、

$$U_i \overset{\text{c.i.}}{\to} \mathbf{A}^n_{B_i} \overset{\text{o.i.}}{\to} \mathbf{P}^n_{S_i} \overset{\text{o.i.}}{\to} \mathbf{P}^n_S \to S \tag{11}$$

となる (o.i. は open immersion)。なお、テキストでも混同して用いているが、$\mathbf{P}^n_{S_i}$ と $\mathbf{P}^n_{B_i}$ は同一である。

すると、$\mathbf{P}^n_S$ への U_i の像は閉集合と開集合の共通部分となる。それは、閉集合への open 像とそれに続く閉集合の埋め込みと見ることができるが、実際、$U_i \to \mathbf{P}^n_S$ の scheme-theoretic image を P_i とすると

$$U_i \overset{\phi_i(\text{o.i.})}{\to} P_i \overset{\text{c.i.}}{\to} \mathbf{P}^n_S \to S \tag{12}$$

となり (Exercise 2.3.11(d))、$P_i \to S$ は projective、従って、U_i は S 上 quasi-projective である。

(d) 先に、(d) を証明する。

X は既約なので $U = \bigcap_i U_i \neq \varnothing$ は X で dense である。$P_i \to S$ が projective なので $P = P_1 \times_S \cdots \times_S P_n \to S$ も projective である (Exercise 4.9)。

S 上の $U \hookrightarrow U_i \to P_i$ から

$$\phi : U \to P,\ p_i\phi = \phi_i\alpha_i,\ \alpha_i : U \hookrightarrow U_i \tag{13}$$

が存在し、さらに $U \to X$ と合わせて、$f : U \to X \times_S P$ が存在する。

それを

$$f : U \xrightarrow{\Gamma_P} U \times_S P \xrightarrow{\mu(oi)} X \times_S P$$

と分解したとき[17]、$\Gamma_P : U \to U \times_S P$ は closed immersion となる (Exercise 4.8(e) で示した)。

X' を f の scheme-theoretic image とすると

$$X' = f(U)^- = \overline{\mu\Gamma_P(U)} = \overline{\Gamma_P(U)}^{X \times_S P}$$

$$f : U \xrightarrow{\text{o.i.}} X' \xrightarrow{\sigma(\text{c.i.})} X \times_s P \tag{14}$$

とかける。f は open immersion と closed immersion に分解できる (式 (11) から式 (12) を得たのと同様)。

$g = q_1\sigma$ とおくと

$$g^{-1}(U) = \sigma^{-1}q_1^{-1}(U) = \sigma^{-1}(U \times_S P) = \overline{X'}^{U \times_S P} = \overline{\Gamma_P(U)} = \Gamma_P(U) \approx U$$

を得るが、下記の性質 7 からこれは $U \cap P$ の scheme-theoretic image である。

このとき、$q_1 f = \iota$ から $gf|_U = \iota : U \to U,\ g^{-1}(U) = f|_U(U) = f(U) \approx U$ なので、

$$g|_{f(U)} : g^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$$

が成立する。今後、$U' = f(U)$ と U は適宜同一視する。

性質 7. $f : Z \to X$ の scheme-theoretic image を Y とする。X の open U に対し、$f : Z \to U \to X$ と分解できるとき、$Y \cap U$ は U の scheme-theoretic image である。

[17] $U \times_S P \subseteq X \times_S P$ において、$U \times_S P \to U$ は $q_1" = q_1|_{U \times_S P}$ であり、$U \times_S P \to P$ は $q_2" = q_2\mu$ である。$U \times_S P$ の U.P. から $\Gamma_P : U \to U \times_S P$ が存在し $q_1"\Gamma_P = \mathrm{id}_U,\ q_2"\Gamma_P = \phi$ を満たすので、$f = \mu\Gamma_P$ である。

$$\begin{tikzcd}
 & & X \times_S P \arrow[ddll, "q_1"'] \arrow[ddr, "q_2"] & \\
 & & U \times_S P \arrow[u, "\mu"] \arrow[dl, "q_1\text{"}"'] \arrow[dr, "q_2\text{"}"] & \\
X & U \arrow[l] & U \arrow[l, "\mathrm{id}_U"] \arrow[u, "\Gamma_P"'] \arrow[r] \arrow[uu, bend left, "f"] & P
\end{tikzcd}$$

(証明) f は $Z \to Y \hookrightarrow X$ でも $Z \to U \hookrightarrow X$ でもあるので、

$$f : Z \to Y \cap U \hookrightarrow U \hookrightarrow X$$

である。

Y' を、$Z \to Y \cap U \hookrightarrow U$ と $Z \to Y' \hookrightarrow U$ が等しくなる U の closed subscheme とし、$Y' = Y” \cap U,\ Y” \subseteq X:$ closed とする。

$f : Z \to Y” \cap U \hookrightarrow U \hookrightarrow X$ は $f : Z \to Y” \cap U \hookrightarrow Y” \hookrightarrow X$ に等しいので、$Y \to X$ は $Y”$ を通り、$f : Y \to Y” \to X$ となる (Exercise 2.3.11(d))。

よって、$Y \cap U \to U$ は $Y \cap U \to Y” \cap U \to U$ に等しく、再び Exercise 2.3.11(d) から、$Y \cap U$ は $f' : Z \to U$ の scheme-theoretic image となる。(証明終)

(c) $h : X' \to P$ が closed immersion となることを証明する。

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_S P \arrow[dl, bend right, "q_1"'] \arrow[ddrr, bend left, "q_2"] & & \\
 & X' \arrow[u, "\sigma"] \arrow[ddl, bend right, "g"'] \arrow[ddrr, "h"] & & \\
 & U_i” \arrow[u] \arrow[r, "\gamma_i"] \arrow[ddr, bend right, "v_i"] & X \times_S W_i \arrow[uul, "\eta"'] \arrow[ddll, "g'"'] \arrow[dd, bend left, "q_2'"] & \\
 & U_i' \arrow[u, "q_1'"] \arrow[dd, bend right] & & \\
X & U = U' \arrow[l, "\iota"', "g|_{U_i'}"] \arrow[u] \arrow[uu, bend left, "\delta"] \arrow[uur, bend left, "h'"] \arrow[r, "\phi"'] \arrow[d, "\alpha_i"] & W_i \arrow[uu, bend left, "\Gamma"] \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d, "p_i"] \\
 & U_i \arrow[ul, "\epsilon"] \arrow[r, "\phi_i"] & V_i \arrow[l, bend left, "\phi_i^{-1}"] \arrow[r] & P_i
\end{tikzcd}$$

ϕ_i は open immersion なので

$$V_i = \phi_i(U_i),\ W_i = p_i^{-1}(V_i),\ U_i' = g^{-1}(U_i),\ U_i” = h^{-1}(W_i) \tag{15}$$

は全て open である。

$U_i”$ は X' をカバーすることを示す。
($\because$) (d) より $U \approx g^{-1}(U) \subseteq g^{-1}(U_i) = U_i'$ なので

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] & U_i' \arrow[r] & U_i \arrow[r] & P_i \\
U_{\mathrm{red}} \arrow[u] \arrow[r, dotted] & (U_i')_{\mathrm{red}} \arrow[u, "\beta"] & &
\end{tikzcd}$$

は可換図となり (Exercise 2.3(c))、$\phi_i g|_U = \phi_i \iota = \phi_i \alpha_i = p_i \phi = p_i h|_U$ から、$\phi_i g, p_i h$ は U_{red} で一致する。

このとき、$P_i \to S$ は projective ゆえ separated である (Theorem 4.9)。$\mathrm{Sp}\, U_{\mathrm{red}} = \mathrm{Sp}\, U,\ \mathrm{Sp}\, (U_i')_{\mathrm{red}} = \mathrm{Sp}\, U_i'$ より、U_{red} は $(U_i')_{\mathrm{red}}$ で dense なので、Exercise 4.2 から $\phi_i g \beta = p_i h \beta$ を得る。従って、位相空間では、$\phi_i g|_{U_i'} = p_i h|_{U_i'}$ である。

すると

$$
\begin{aligned}
U_i' &= g^{-1}(U_i) \subseteq h^{-1} h g(U_i) \subseteq h^{-1} p_i^{-1} p_i h g^{-1}(U_i) \\
&= h^{-1} p_i^{-1} \phi_i g g^{-1}(U_i) \subseteq h^{-1} p_i^{-1} \phi_i(U_i) = h^{-1} p_i^{-1}(V_i) = h^{-1}(W_i) = U_i"
\end{aligned}
$$

となる。

従って、

$$
X' = g^{-1}(X) = g^{-1}(\bigcup_i U_i) = \bigcup_i g^{-1}(U_i) = \bigcup_i U_i' \subseteq \bigcup_i U_i"
$$

より、$X' = \bigcup_i U_i"$ である。($\because$ 終)

X' は $U_i"$ でカバーされるので、$h : X' \to P$ が closed immersion であることを示すには $h' = h|_{U_i"} : U_i" \to W_i$ が closed immersion であることを言えばよい (closed immersion の local 性)。

$$
u_i : W_i \xrightarrow{p_i'} V_i \xrightarrow{\phi^{-1}} U_i \to X
$$

において $X \to S$ が separated なので

$$
\Gamma : W_i \to X \times_S W_i,\ q_1' \Gamma = u_i,\ q_2' \Gamma = \mathrm{id}_{W_i} \tag{16}
$$

は closed immersion である。

このとき

$$
U' = f(U) \approx U \xrightarrow{\phi} W_i \xrightarrow{\Gamma} X \times_S W_i \tag{17}
$$

の[18] scheme-theoretic image は、$U' \to X \times_s P$ の scheme-theoretic image が X' なので ($U' \to X' \xrightarrow{\sigma} X \times_S P$)、

$$
X' \cap (X \times_S W_i) = \sigma^{-1}(X \times_S W_i) = \sigma^{-1} q_2^{-1}(W_i) = h'^{-1}(W_i) = U_i" \tag{18}
$$

となる (性質 7)。

$$
U' \to U_i" \xrightarrow{\gamma_i (ci)} X \times_S W_i \tag{19}
$$

は式 (17) の morphism に等しく

$$
\Gamma \phi = \gamma_i \delta \tag{20}
$$

[18] 式 (13) から $\phi(U) \subseteq p_i^{-1} p_i \phi(U) = p_i^{-1} \phi_i \alpha_i(U) = p_i^{-1} \phi_i(U) \subseteq p_i^{-1} \phi_i(U_i) = W_i$

を得る。

なお、式 (18) から

$$\gamma_i = \sigma|_{U_i"}$$

である。σ が $X' \to X \times_S P$ の canonical morphism (fiber product の Definision, p. 87 における θ のこと) なので、その制限 morphism γ_i も canonical morphism となる。よって、

$$\gamma_i : U_i" \to X \times_S W_i,\ q_1'\gamma_i = g',\ q_2'\gamma_i = h' \tag{21}$$

を満たす。ここで、$g' : U_i" \to X,\ h' : U_i" \to W_i$ はそれぞれ $g,\ h$ の制限 morphism である。

Γ が closed immersion ゆえ W_i は $X \times_S W_i$ の closed subscheme なので、scheme-theoretic image の U.P. から $U_i" \to W_i$ が存在し、下図は可換となる (Exercise 2.3.11(d))。

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r] \arrow[dr] & U_i" \arrow[r, "\gamma_i(ci)"] \arrow[d] & X \times_S W_i \\ & W_i \arrow[ur, "\Gamma(ci)"'] & \end{tikzcd}$$

このとき、以下に示すように $U_i" \to W_i$ は h' に等しい。$\gamma_i = \Gamma h'$ を示す。

$X \times_S W_i$ の U.P.(Universal Property) より

$$v_i : U' \to X \times_S W_i,\ q_1'v_i = \iota,\ q_2'v_i = \phi \tag{22}$$

が存在する。

$$\begin{tikzcd} & X \times_S W_i \arrow[dl, "q_1'"'] \arrow[dr, bend left, "q_2'"] & \\ X & U' \arrow[l, "\iota"'] \arrow[u, "v_i"] \arrow[r, "\phi"'] & W_i \arrow[ul, "\Gamma"] \end{tikzcd}$$

このとき、Γ の定義から

$$q_1'(\Gamma\phi) = u_i\phi = \epsilon\phi_i^{-1}p_i'\phi = \iota,\ q_2'(\Gamma\phi) = \mathrm{id}_{W_i}\phi = \phi \tag{23}$$

なので、$X \times_S W_i$ の U.P. から

$$v_i = \Gamma\phi \tag{24}$$

を得る。すると、式 (20) から

$$v_i = \gamma_i\delta : U' \to X \times_S W_i \tag{25}$$

が成り立つ。ここで、$\delta : U' \to U_i"$ である。

$$\phi \overset{(22)}{=} q_2'v_i \overset{(25)}{=} q_2'\gamma_i\delta \overset{(21)}{=} h'\delta \tag{26}$$

より

$$\gamma_i\delta = v_i = \Gamma\phi = \Gamma h'\delta \tag{27}$$

を得る。

このとき、「U_i" は X' をカバーする」で示したときと同様にして

$$\gamma_i = \Gamma h' \tag{28}$$

が成り立つ。

γ_i は closed immersion、Γ も closed immersion ゆえ separated なので、$h' = h|_{U_i"}$ は closed immersion である。

従って $h : X' \to P$ は closed immersion、ゆえに projective となり、$P \to S$ は projective なので、$X' \to S$ は projective となる。

2.4.11

(a) $K = \operatorname{Frac}\mathcal{O}$ に対して、L が有限生成 K-代数なので、L の超越元 $y_1, \cdots, y_m$ を用いて $L/K(y_1, \cdots, y_m)$ が代数拡大となるようにできる。

$$\mathcal{O}" = \mathcal{O}[y_1, \cdots, y_m],\ K' = K(y_1, \cdots, y_m)$$

とすると $K' = \operatorname{Frac}\mathcal{O}"$ であり、L/K' は有限拡大 (module として有限) である ([4], 5 章§4 補題 C)。

$\mathcal{O}"/(\mathfrak{m} + (y_1, \cdots, y_m)) = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ が体なので、$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} + (y_1, \cdots, y_m)$ は極大であり、$\mathcal{O}' = \mathcal{O}"_{\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{m}' = \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ を極大 ideal とする noetherian local domain となる。

ここでもし、$\mathcal{O}', \mathfrak{m}', L/K'$ に対して証明できたとする。すなわち $\mathcal{O}'$ を dominate する discrete valuation ring $R \subseteq L$ が存在したとすると、

$$R \supseteq \mathcal{O}' \supseteq \mathcal{O}" \supseteq \mathcal{O}$$

$$\mathfrak{m}_R \cap \mathcal{O}' = \mathfrak{m}' \Rightarrow \mathfrak{m}_R \cap \mathcal{O} = \mathfrak{m}' \cap \mathcal{O} = (\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \cap \mathcal{O}") \cap \mathcal{O} = \mathfrak{p} \cap \mathcal{O} = \mathfrak{m}$$

より、$\mathcal{O}, \mathfrak{m}, L/K$ に対して証明できたことになる[19]。

以下、改めて $\mathcal{O}, \mathfrak{m}$ を局所環、$K = \operatorname{Frac}\mathcal{O}$ で L/K は有限拡大とする。Noetherian domain の ideal は有限生成なので (そうでなければ昇鎖律に反する)、$\mathfrak{m} = (x_1, \cdots, x_n)$ とおける。

Theorem 1.6.1A より、K には $\mathcal{O}$ を dominate する valuation ring $R_v \subseteq K$ が存在する。R_v の極大 ideal を $\mathfrak{m}_v$ とすると、$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_v \cap \mathcal{O} \subseteq \mathfrak{m}_v$ より $v(x_i) > 0,\ \forall i$ である。最小な valuation を与える x_i を x_1 とし

$$\mathcal{O}' = \mathcal{O}[x_2/x_1, \cdots, x_n/x_1]$$

とおく。すると $v(a) \geq 0,\ a \in \mathcal{O}$ なので、v の性質から $v(y) \geq 0,\ y \in \mathcal{O}'$ であり、よって $\mathcal{O}' \subseteq R_v$ となる。

[19] 整域 A に対し、[1], Proposition 3.11, iv) より $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \cap A = \mathfrak{p}$ である。あるいは $a/s = b/1 \in A,\ a \in \mathfrak{p}, b \in A, s \notin \mathfrak{p}$ とすると、A は整域なので、$bs = a \in \mathfrak{p} \Rightarrow b \in \mathfrak{p}$

$q = \mathfrak{m}_v \cap \mathcal{O}' \not\ni 1$ は $\mathcal{O}'$ の prime ideal であり

$$x_1 \in \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_v \Rightarrow x_1 \in q \Rightarrow x_1\mathcal{O}' \subseteq q\mathcal{O}' = q \not\ni 1 \Rightarrow (x_1) \not\ni 1$$

より、$(x_1) \neq \mathcal{O}'$ である。よって x_1 は単元ではない。零因子でないのは、$\mathcal{O}$ が整域なので $\mathcal{O}_{(x_1)}$ も整域であり、従って $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}_{(x_1)}$ から $\mathcal{O}'$ も整域であることによる。

よって (x_1) を含む最小 prime ideal を $\mathfrak{p}$ とすると、$\operatorname{ht}\mathfrak{p} = 1$ となり ([1], Corollary 11.16)、$\dim \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}} = \operatorname{ht}\mathfrak{p} = 1$ が得られる。この $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ は noetherian local domain である。

$\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ に対し、Krull-Akizuki 定理 [[3], Theorem 11.7, Corollary] を適用すると、L における整閉包 $\widetilde{\mathcal{O}'}_{\mathfrak{p}}$ は Dedekind domain となる。従って $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ の極大 ideal $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ の拡大を含む極大 ideal $\tilde{\mathfrak{m}} \supseteq (\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})^e$ による局所環 R は DVR となる ([1], Theorem 9.3)。

このとき、

$$R = (\widetilde{\mathcal{O}'}_{\mathfrak{p}})_{\tilde{\mathfrak{m}}} \supseteq \widetilde{\mathcal{O}'}_{\mathfrak{p}} \supseteq \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}} \supseteq \mathcal{O}' \supseteq \mathcal{O}$$

であり、次の性質 8 より、$(\widetilde{\mathcal{O}'}_{\mathfrak{p}})_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ は $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ を dominate し、$\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ は $\mathcal{O}$ を dominate している。よって、R は $\mathcal{O}$ を dominate する。

性質 8. 整域系列 $B \subseteq A \subseteq A_{\mathfrak{p}}$ において、$(B, \mathfrak{m})$ が局所環、$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{m}^e$ ならば、$A_{\mathfrak{p}}$ は B を dominate する。

(証明) $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \cap B = (\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \cap A) \cap B = \mathfrak{p} \cap B \supseteq \mathfrak{m}^e \cap B = \mathfrak{m}^{ec} \overset{***}{\supseteq} \mathfrak{m} \Rightarrow \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \cap B = \mathfrak{m}$
なお、***は [1], Proposition 1.17, i) による。(証明終)

(b) DVR は valuation ring の一種なので、必要性は明らかである。

十分性については、Theorem 4.3 及び Theorem4.7 の Conversely 以下において、$\mathcal{O}$ を dominate する valuation ring を (a) で示された DVR に置き換えるだけで証明は全く同じである。

2.4.12

(a) Valuation ring R の極大 ideal を $\mathfrak{m}$ とすると、$0 \neq \forall t \in \mathfrak{m}$ は超越数である。なぜなら、もし代数的数だとすると

$$\sum_i a_i t^i = 0,\ 0 \neq a_0 : \text{unit},\ a_i \in k \Rightarrow a_0 = -t\sum_i a_i t^{i-1} \in \mathfrak{m}$$

となってしまうからである。

K は function field of dimension 1 over k なので、定義 (p. 39) から K は有限生成 k-代数であり、$k(t)$ 上の有限代数拡大となる (極大な代数的独立集合が超越的基底なので $\{t\}$ は超越基底)。

R が K/k の valuation ring なので、定義 (本書 p.40) から $K = \operatorname{Frac} R,\ R \supseteq k$ である。$k(t) = k(t^{-1})$ より $t \in R$ としてよく、よって $R \supseteq k[t]$ である。

$k[t]$ は 1 次元 noetherian domain で整閉なので dedekind domain であり ([1], Theorem 9.3)、よって Theorem I.6.3A より $B = \widetilde{k[t]}$(整閉包) も dedekind domain である。

R は $K = \operatorname{Frac} R$ で整閉なので $R \supseteq B$ である。このとき R の極大 ideal を $\mathfrak{m}$ としたとき $\mathfrak{m} \cap B$ は B で極大となる。実際、$\mathfrak{m} \cap B \subseteq \exists \mathfrak{m}_B \Rightarrow \mathfrak{m}_B^e \subseteq \mathfrak{m} \Rightarrow \mathfrak{m}_B \subseteq \mathfrak{m}_B^{ec} \subseteq \mathfrak{m}^c = \mathfrak{m} \cap B$ である。

すると、$B_{\mathfrak{m}_B} \hookrightarrow R_{\mathfrak{m}}$ が成り立つ。なぜなら、$b/s = 0 \in B_{\mathfrak{m}_B} \Rightarrow bt = 0,\ t \in B - \mathfrak{m}_B$ とすると、$\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m} \cap B$ から $t \notin \mathfrak{m}$ ゆえ、$R_{\mathfrak{m}}$ において $b/s = 0$ から well-define であり、また単射は明らかだからである。

よって $R_{\mathfrak{m}} = R$ は $B_{\mathfrak{m}_B}$ を dominate する[20]。しかるに B は dedekind domain なので $B_{\mathfrak{m}_B}$ は DVR であり ([1], Theorem 9.3)、dominate の意味で極大なので、$R = B_{\mathfrak{m}_B}$ は DVR となる。

(b)

(1) X を代数的閉体 k 上 2 次元 integral proper nonsingular scheme(noetherian が前提)、Y を X における 1 次元既約曲線、x_1 を Y の生成元とする。

x_1 を含む affine open を $U = \operatorname{Spec} A \subseteq X$、$x_1$ に対応する A の prime ideal を $\mathfrak{p}$ とし、$Z = Y \cap U$ とおく。

$$\dim Z = \dim Y \cap U = \dim Y = 1$$

$$\operatorname{codim}(Z, X) = \dim X - \dim Z = 1$$

このとき、次に示す性質 9 より $\operatorname{codim}(Z, X) = \operatorname{ht} \mathfrak{p}$ なので、

$$\dim \mathcal{O}_{x_1, X} = \dim A_{\mathfrak{p}} = \operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1$$

を得る。

X は nonsingular なので、x_1 において nonsingular であり Theorem 1.5.1 より $R := \mathcal{O}_{x_1, X}$ は regular である (x_1 近傍の局所的性質なので affine としてよい)。

1 次元 regular local ring は DVR なので ([1], Lemma 11.23 直後の記述)、R は DVR である。

$A_{\mathfrak{p}}$ は U、ひいては X の open なので、$K = \operatorname{Frac} A_{\mathfrak{p}} = \operatorname{Frac} \mathcal{O}_{x_1, X} = \operatorname{Frac} R$ であり、$R \supseteq k$ より R は K/k の DVR である。

また、$R \supseteq \mathcal{O}_{x_1, X}$ から x_1 を center として持つ。

なお、x_1 は closed point ではない。なぜなら、closed point は A において極大となるので高さ 2 となるはずであるが、$\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1$ なので、極大にはなりえないからである。

性質 9. $X = \operatorname{Spec} A$ の既約閉集合 Y の生成元に対応する A の prime ideal を $\mathfrak{p}$ とすると、$\operatorname{codim}(Y, X) = \operatorname{ht} \mathfrak{p}$ である。

(証明) $\mathfrak{p}$ は生成元に対応しているので $Y = V(\mathfrak{p})$ である。

[20] 既に示したように、一般に整域 A, B が $A \subseteq B$ を満たし B が local ring なら、$\mathfrak{m}_B \cap A$ は A の極大 ideal となる。よって、A が local ring なら $\mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}_B \cap A$ である。

$\mathrm{codim}(Y,X)=n$ とすると

$$V(\mathfrak{p})=Y\subsetneq Y_1\subsetneq\cdots\subsetneq Y_n$$

となる最大長既約閉集合系列が存在する。

一般に既約閉集合が $Y=V(\mathfrak{a})$ のとき $\mathfrak{a}$ は prime ideal としてよく[21]、

$$V(\mathfrak{p})\subseteq V(\mathfrak{q})\Leftrightarrow\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{q}$$

が成り立つ (Lemma 2.2.1(c))。従って、上記系列は、

$$\mathfrak{p}\supsetneq\mathfrak{p}_1\supsetneq\cdots\supsetneq\mathfrak{p}_n$$

に 1 対 1 に対応する。
(証明終)

(2) X' は noetherian とする (暗に仮定されていると思われる)。

X' が nonsingular の場合

(1) から $R=\mathcal{O}_{x_1,X'}$ は $K(X')/k$ の DVR となるが、X' と X は birational なので $K(X')=K(X)=K$ から (Corollary I.4.5, (iii))、R は K/k の DVR となる。

Birational morphism $f:X'\to X,\ x_1\mapsto x_0$ は dominant であり (Cororally I.4.5, (ii) から $V=f(U)$ は開集合であり、X は既約なので $\overline{f(U)}=\overline{V}=X$)、

$$f^{\#}_{x_1}:\mathcal{O}_{x_0,X}\hookrightarrow\mathcal{O}_{x_1,X'}=R$$

は単射である。$f^{\#}_{x_1}$ の定義から、これは dominate の関係であり (local homomorphism の定義、p. 73)、R は x_0 を X 上の center として持つ。

X' が singular の場合

Blowing-up を有限回繰り返すことにより nonsingular な X" が得られる (Exercise I. 5.6 の Note)。この節で扱っているのは abstract variety なので単に integral separated scheme of finite type over algebraically closed field k であるが、singular と言ってるので従来の variety であろう。既約な curve では singular point は有限個である: https://math.stackexchange.com/questions/844507/finitely-many-singular-points-of-an-irreducible-polynomial

Blowing-up φ は birational なので $\dim X"=2$ である。その blowing-up に伴って Y' の blowing-up $Y"$ が得られるが、$Y',Y"$ とも k 上 curve なので Exercise I.4.8 より位相同型、よって $Y"$ は既約で、生成元は対応している ($x"\leftrightarrow x'$)。

(1) から $R"=\mathcal{O}_{x",X"}$ は $K(X")/k$ の DVR であるが、blowing-up は birational なので (p. 29, Definition 直後の記述)、$K(X")=K(X')=K(X)=K$ より (Corollary I.4.5, (iii))、$R"$ は K/k の DVR となる。

Dominant な morphism 系列 $X"\xrightarrow{\varphi}X'\xrightarrow{f}X,\ x"\mapsto x'\mapsto x_0$ が存在するので、

$$\mathcal{O}_{x_0,X}\hookrightarrow\mathcal{O}_{x',X'}\overset{\iota}{\hookrightarrow}\mathcal{O}_{x",X"}\tag{29}$$

[21] $Y=V(\sqrt{\mathfrak{a}})=V(\mathfrak{N}(A/\mathfrak{a}))$: 既約 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{N}(A/\mathfrak{a})=\sqrt{\mathfrak{a}}$: prime ideal (Example 3.0.1)

は dominate の関係にある。

従って、$R' = \mathcal{O}_{x',X'}, R" = \mathcal{O}_{x",X"}$ の極大 ideal を $\mathfrak{m}', \mathfrak{m}"$ とすると $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}" \cap R'$ である。

$R"$ は DVR なので UFD かつ PID であり $\mathfrak{m}" = (x)$ とかける ([1], Proposition 9.2)。その discrete valuation v に対して $v(x) = 1$ とでき、$R' \subseteq R"$ の中で正の最小 valuation を j とすると $R' \ni x^j$ となる。すると、$\mathfrak{m}' \ni x^j$ である (local ring においては極大 ideal に入らない元の valuation は 0)。ところが $\mathfrak{m}'$ は prime ideal ゆえ $\mathfrak{m}' \ni x$ であり、R' は PID となるので DVR である。

また、dominant な関係

$$\mathcal{O}_{x_0,X} \hookrightarrow R' = \mathcal{O}_{x',X'}$$

から R' は X の x_0 を center に持つ。

[補足]

X' が nonsingular か否かに関係なく、式 (29) に等価な dominant 関係式

$$\mathcal{O}_{x_0,X} \hookrightarrow \mathcal{O}_{x',X'} \hookrightarrow T, \ T : DVR$$

は次のようにしても得られる。

X' は noetherian とすると、$R := \mathcal{O}_{x',X'}$ も noetherian であり、有限生成である[22]。

$\deg_{tr} \operatorname{Frac} R = \dim R = 1$ より R は超越元 t を持ち、正規化定理より $R \subseteq \widetilde{k[t]}$(整閉包) である。

$k[t]$ は 1 次元 noetherian domain で整閉なので dedekind domain であり ([1], Theorem 9.3)、よって Theorem I.6.3A より $B = \widetilde{k[t]}$ も dedekind domain である。

Dedekind domain の local domain は DVR ゆえ、$B_{\mathfrak{m}_B}$ は DVR であり、R は local ring なので $T := B_{\mathfrak{m}_B} \supseteq R$ である。

$B = \widetilde{k[t]}$ は R 上整でもあるので、[1], Corollary 5.8 から B の極大 ideal は全て R の極大 ideal $\mathfrak{n}$ に対応している (対応とは、R, B の prime ideal $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ に対する $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$ の関係)。従って、R と T の極大 ideal は対応しており、$R \subseteq T$ は dominant の関係にある。(補足終)

(3) 系列

$$\cdots \to X_2 \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} X$$

$$\cdots \mapsto E_2 \ni x_2 \mapsto E_1 \ni x_1 \mapsto x_0, \ E_i = f_i^{-1}(x_{i-1})$$

が得られたする。

x_{i-1} が閉点ならば $E_i = f_i^{-1}(x_{i-1})$ は閉集合であり、閉集合の元の specialization はその閉集合に含まれるので、E_i は閉点を持つ (Exercise II.3.17, (e), minimal

[22] X: locally noetherian$\Leftrightarrow \mathcal{O}_X(U)$: noetherian, $\forall$affine open U であり (例えば stack project, Lemma 28.5.2)、Noetherian ring の局所環は neotherian である。また、A: noetherian ring$\Leftrightarrow$ $\forall$ideal: finitely generated。

point は closed point) [23] 。よって、帰納法より閉点 x_i を E_i にとれる (但し、x_i は閉点がゆえに E_i の生成点にはなれない)。

$$\mathcal{O}_{x_i,X_i} \overset{\text{dominate}}{\supseteq} \mathcal{O}_{x_{i-1},X_{i-1}}$$

より、$\mathcal{O}_{x_i,X_i}$ は X_{i-1} に center x_{i-1} を持ち、ひいては X に center x_0 を持つ。

Browing-up の morphism は birational なので $K(X_n) = \cdots = K(X) = K$ であり、$K(X_j) = \operatorname{Frac} O_{x_j,X_j}$ より $K = \operatorname{Frac} O_{x_j,X_j}$ となる。

$R_0 = \bigcup_i \mathcal{O}_{x_i,X_i}$ は $\mathfrak{m} = \bigcup_i \mathfrak{m}_i$ を極大 ideal とする local ring となることを示す。但し、$\mathfrak{m}_i$ は $\mathcal{O}_{x_i,X_i}$ の極大 ideal である。
($\because$) $\mathcal{O}_{x_i,X_i}$ が $\mathcal{O}_{x_{i-1},X_{i-1}}$ を dominate するので

$$\mathfrak{m}_i \cap \mathcal{O}_{x_{i-1},X_{i-1}} = \mathfrak{m}_{i-1} \Rightarrow \mathfrak{m}_i \supseteq \mathfrak{m}_{i-1}$$

が成り立ち、容易にわかるように $\mathfrak{m} \neq (1)$ は ideal となる。

$$x \in R_0 - \mathfrak{m} \Rightarrow x \in \exists \mathcal{O}_{x_i,X_i},\ x \notin \forall \mathfrak{m}_j \Rightarrow x \in \mathcal{O}_{x_i,X_i} - \mathfrak{m}_i \Rightarrow x^{-1} \in \mathcal{O}_{x_i,X_i} \subseteq R_0$$

より、x が単元となるので、$\mathfrak{m}$ は唯一の極大 ideal である。($\because$ 終)

R_0 は $\mathcal{O}_{x_0,X}$ を dominate している。なぜなら

$$\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}_0 \Rightarrow \mathfrak{m} \cap \mathcal{O}_{x_0,X} \supseteq \mathfrak{m}_0 \cap \mathcal{O}_{x_0,X} = \mathfrak{m}_0$$

において、$\mathfrak{m} \cap \mathcal{O}_{x_0,X} \not\ni 1$ より

$$\mathfrak{m} \cap \mathcal{O}_{x_0,X} = \mathfrak{m}_0$$

となるからである。

以上により、R_0 は $K = \operatorname{Frac} R_0$ に含まれる k 上の local ring で、X に center x_0 を持つ。

R_0 を dominate する K/k の valuation ring を R とすると (Theorem I.6.1A)、同様に R は $\mathcal{O}_{x_0,X}$ を dominate し、よって X に center x_0 を持つ。

R が DVR となる条件については、$\dim R = 1$ がある。なぜなら、valuation ring R は整閉ゆえ dedekind domain $B := \widetilde{k[t]}$ を含むので、local ring R は $R \supseteq B_{\mathfrak{m}_B}$ を満たす。$R \supseteq \widetilde{k[t]}$ において、$R \supseteq \mathfrak{m} \ni t$ とできるので、$\dim R = 1$ から $\mathfrak{m} \cap B \neq (0)$ より $\mathfrak{m} \cap B = \mathfrak{m}_B$ なので、R と $B_{\mathfrak{m}_B}$ は dominant 関係にある。$B_{\mathfrak{m}_B}$ は DVR ゆえ $R = B_{\mathfrak{m}_B}$ となり、DVR である。

また、一般的ではあるが noetherian というのもある ([1], Exercise 9. 3)。(X が noetherian で、blowing-up で noetherian 性は保存されるので各 X_i は noetherian であるが、R が noetherian とは限らない。)

[23] Minimal point は存在する。なぜなら、$\{x_1\}^- \ni x_0 \Rightarrow \{x_1\}^- \supseteq \{x_1\}^-$ より $\{x_i\}^- \supsetneq \{x_{i-1}\}^- \supsetneq \cdots$ とすると、$\{x_i\}^-$ は既約閉なので、次元の制約から有限で終わるはずである。

References

[1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald: Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, 1963

[2] R. Vakil: Foundations of Algebraic Geometry, Class 9, https://math.stanford.edu/ vakil/0506-216/216class09.pdf, 2007

[3] H. Matsumura; Commutative Ring Theory, Cambridge, 1986 または 松村英之: 可換環論, 共立, 2000

[4] 松坂和夫: 代数系入門, 岩波, 1976