2 Schemes

2.3 First Properties of Schemes

2.3.1

十分性は明らかなので、必要性を示す。

$$f : X \to Y = \bigcup_i U_i,\ U_i = \operatorname{Spec} B^i$$

$$f^{-1}(\operatorname{Spec} B^i) = \bigcup_j \operatorname{Spec} A^{ij},\ A^{ij} : \text{finitely generated } B^i\text{-algebra} \tag{1}$$

$$V = \operatorname{Spec} B \subseteq Y$$

とする。このとき、$\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B \cap \operatorname{Spec} B^i$ に対し、次に示す性質 1 により

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B_g \approx \operatorname{Spec} B^i_{g_i} \subseteq \operatorname{Spec} B \cap \operatorname{Spec} B^i,\ \exists g \in B, \exists g_i \in B^i$$

とできる。ここで scheme としの同型性から $B_g \approx B^i_{g_i}$ である。

B^i の prime ideal と $B^i_{g_i}$ の g_i を含まない prime ideal は 1 対 1 に対応し、$A^{ij}, A^{ij}_{g_i}$ も同様なので、局所化に対応して式 (1) から

$$f^{-1}(\operatorname{Spec} B^i_{g_i}) = \bigcup_j \operatorname{Spec} A^{ij}_{g_i} \tag{2}$$

が得られ、$A^{ij}_{g_i}$ は有限生成[1] $B^i_{g_i}$-代数となる。$B_g \approx B^i_{g_i}$ なので、結局有限生成 B_g-代数なので、

$$A^{ij}_{g_i} = B_g[b_1, \cdots, b_n],\ b_i \in A^{ij}_{g_i}$$

と表せる。すると $1/g \in A^{ij}_{g_i}$ とみなせるので

$$A^{ij}_{g_i} = B_g[b_1, \cdots, b_n] = B[1/g, b_1, \cdots, b_n],\ b_i \in A^{ij}_{g_i}$$

すなわち、$A^{ij}_{g_i}$ は有限生成 B-代数である。

性質 **1.** (Nike's trick, [2], 3.2 Proposition)

Scheme X の二つの subscheme $\operatorname{Spec} A,\ \operatorname{Spec} B$ に対し、$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \cap \operatorname{Spec} B$ とする。このとき

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A_f \approx \operatorname{Spec} B_g \subseteq \operatorname{Spec} A \cap \operatorname{Spec} B,\ f \in A, g \in B$$

とできる。

[1] 一般に有限生成 A-代数 B は $A[b_1, \cdots, b_n], b_i \in B$ とかけるが、このとき $S^{-1}A$-代数 $S^{-1}B$ は $(S^{-1}A)[b_1/1, \cdots, b_n/1], b_i/1 \in S^{-1}B$ とかけるので、有限生成である。

(証明) $\mathrm{Spec}\,A \cap \mathrm{Spec}\,B$ は $\mathrm{Spec}\,A$ の開集合なので

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,A_h \subseteq \mathrm{Spec}\,A \cap \mathrm{Spec}\,B,\ \exists h \in A$$

とできる。さらに、$\mathrm{Spec}\,A_h$ は $\mathrm{Spec}\,B$ の開集合なので

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,B_g \subseteq \mathrm{Spec}\,A_h \subseteq \mathrm{Spec}\,A \cap \mathrm{Spec}\,B \subseteq Y,\ h \in A,\ \exists g \in B$$

となる。

$g \in B = \mathcal{O}_Y(\mathrm{Spec}\,B)$ なので $g' = g|_{\mathrm{Spec}\,A_h}$ とすると $g' \in A_h \Leftrightarrow g' = g''/h^n, g'' \in A$ と書ける。

$$\mathrm{Spec}\,B_g = D(g) \approx \mathrm{Spec}\,A_h - \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,A_h : g|_{\mathrm{Spec}\,A_h} \notin \mathfrak{p}\} = \mathrm{Spec}\,(A_h)_{g'}$$

一方、[1], Exercise 3.3 より

$$\mathrm{Spec}\,(A_h)_{g'} = \mathrm{Spec}\,A_{hg''}$$

が得られるので[2] 、$f = hg'' \in A$ とおけば

$$\mathrm{Spec}\,B_g \approx \mathrm{Spec}\,A_f$$

となる。

2.3.2

十分性は明らかなので必要性を示す。次の二つの性質を用いる。

- affine scheme は quasi-compact (Exercise 2.2.13(b))
- 有限個の quasi-compact 開集合でカバーされる scheme は quasi-compact[3]

さて、

$$f : X \to Y = \bigcup_i V_i,\ V_i = \mathrm{Spec}\,B^i$$

$$f^{-1}(\mathrm{Spec}\,B^i) : \text{quasi-compact}$$

$$V = \mathrm{Spec}\,B \subseteq Y$$

とする。このとき、$V \cap V_i$ は V_i の open なので $V \cap V_i = \bigcup_j D(g_{ij}) = \bigcup_j \mathrm{Spec}\,B^i_{g_{ij}}$ とかけるが、V は affine scheme ゆえ quasi-compact であり

$$V = \bigcup_i (V \cap V_i) = \bigcup_{i,j} \mathrm{Spec}\,B^i_{g_{ij}} = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Spec}\,B^i_{g_i}, |I| < \infty \tag{3}$$

[2] $S = \{f^i\}_{i \geq 0},\ T = \{g''^i\}_{i \geq 0},\ U = S^{-1}(T) = \{g'^i\}_{i \geq 0}$ とすれば良い。

[3] $X = \cup_{i \in I} X_i, X_i$: quasi-compact, $|I| < \infty$ とすると $X = \bigcup_\lambda U_\lambda \Rightarrow X_i = \cup_\lambda (X_i \cap U_\lambda) = \cup_{j \in J_i} (X_i \cap U_j), |J_i| < \infty$ となり、$J = \cup_i J_i$ は有限なので $X = \cup_i \cup_{j \in J_i} (X_i \cap U_j) \subseteq \cup_i \cup_{j \in J} (X_i \cap U_j) = \cup_{j \in J} U_j \subseteq X$

とかける。

一方 $f^{-1}(V_i)$ も open なので $f^{-1}(\operatorname{Spec} B^i) = \bigcup_k D(h_{ik}) = \bigcup_k \operatorname{Spec} A^{ik}$ とかけるが、quasi-compact なので

$$f^{-1}(\operatorname{Spec} B^i) = \bigcup_{k \in K_i} \operatorname{Spec} A^{ik}, |K_i| < \infty$$

となる。すると、Exercise 2.3.1 における式 (2) と同様

$$f^{-1}(\operatorname{Spec} B^i_{g_i}) = \bigcup_{k \in K_i} \operatorname{Spec} A^{ik}_{g_i}, |K_i| < \infty$$

となるが、$\operatorname{Spec} A^{ik}_{g_i}$ は affine ゆえ quasi-compact であり、従って $f^{-1}(\operatorname{Spec} B^i_{g_i})$ も quasi-compact である。式 (3) より得られる

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\operatorname{Spec} B) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\operatorname{Spec} B^i_{g_i})$$

において $f^{-1}(\operatorname{Spec} B^i_{g_i})$ が quasi-compact なので $f^{-1}(V)$ は quasi-compact である。

2.3.3

(a) 十分性は明らかなので必要性を示す。$f : X \to Y$ が finite type とする。

$$Y = \bigcup_i U_i,\ U_i = \operatorname{Spec} B^i$$

$$f^{-1}(U_i) = \bigcup_{j \in J} \operatorname{Spec} A^{ij},\ |J| < \infty,\ A^{ij} : \text{finitely generated } B^i\text{-algebra}$$

において、open affine $\operatorname{Spec} A^{ij}$ は quasi-compact なので、その有限和 $f^{-1}(U_i)$ も quasi-compact である。

(b) (十分性) Exercise 2.3.1 より f は locallly of finite type であり、quasi-compact の有限和も quasi-compact なので、(a) より f は finite type である。

(必要性) f が finite type とする。Exercise 2.3.1 から $V = \operatorname{Spec} B \subseteq Y$ に対し

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Spec} A^i,\ A^i : \text{finitely generated } B\text{-algebra}$$

となるが、(a) より f は quasi-compact なので $f^{-1}(V)$ は quasi-compact、従って $|I| < \infty$ である。

(c) $f : X \to Y$ が finite type とする。

$$V = \operatorname{Spec} B$$

$$f^{-1}(V) = \bigcup_i U_i,\ U_i = \operatorname{Spec} A^i,\ |I| < \infty,\ A^i : \text{finitely generated } B\text{-algebra}$$

$$U = \operatorname{Spec} A \subseteq f^{-1}(V)$$

のとき、$U = U \cap f^{-1}(V) = \bigcup_i (U \cap U_i)$ より、$\mathfrak{p} \in U \Rightarrow \mathfrak{p} \in \exists U \cap U_i$ から、Exercise 2.3.1 の性質 1 で示したように、

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A_{f_i^{\mathfrak{p}}} \approx \operatorname{Spec} A^i_{g_i} \subseteq U \cap U_i,\ f_i^{\mathfrak{p}} \in A$$

とできる。よって、$U = \bigcup_{j \in J} \operatorname{Spec} A_{f_j}$ とかけるが、U は open affine なので quasi-compac、従って $|J| < \infty$ となる。ここで A^j は finitely generated B-代数なので $A^j_{g_j} \approx A_{f_j}$ は finitely generated B-代数である。

さて、

$$\operatorname{Spec} A = \bigcup_j D(f_j) \Rightarrow \varnothing = (\operatorname{Spec} A)^c = \bigcap_j V((f_j)) = V(\sum_j (f_j)) \Rightarrow \sum_j (f_j) = (1)$$

から

$$\sum_j c_j f_j = 1,\ \exists c_j \in A$$

が得られる。

A_{f_j} は finitely generated B-代数なので、$A_{f_j} = B[1/f_j, a_{j1}/1, \cdots, a_{jm_j}/1],\ a_{ji} \in A$ とかける。

$a \in A$ に対し、$a/1 \in B[1/f_j, a_{j1}/1, \cdots, a_{jm_j}/1] \Rightarrow af_j^{n_j} \in B[f_j, a_{i1}, \cdots, a_{im_i}]$ とできるが、$n = \max n_j$ に対し $af_j^n \in B[f_j, a_{i1}, \cdots, a_{im_i}]$ としてよい。十分大きな N に対して、$(\sum_j c_j f_j)^N = 1 \Rightarrow \sum_j b_j f_j^n = 1,\ b_j \in B[\{f_j\}_j, \{c_j\}_j]$ より、

$$a = a(\sum_j b_j f_j^n) = \sum_j b_j a f_j^n \in B[\{f_j\}_j, \{c_j\}_j, \{a_{ji}\}_{j,i}]$$

から A は finitely generated B-代数である。

2.3.4

十分性は明らかなので必要性を示す。

$f : X \to Y$ が finite とすると、$Y = \bigcup_\lambda V_\lambda,\ V_\lambda = \operatorname{Spec} B^\lambda$ に対し $f^{-1}(V_\lambda) = \operatorname{Spec} A^\lambda$ であり、かつ A^λ は有限生成 B^λ-module である。このとき、$g \in B^\lambda$ に対し $f^{-1}(\operatorname{Spec} B^\lambda_g) = \operatorname{Spec} A^\lambda_g$ であり (式 (2))、A^λ_g は有限生成 B^λ_g-module になる[4]。

$$V = \operatorname{Spec} B \subseteq Y$$

[4]正確には A^λ_g の g は $g \in B^\lambda$ の A^λ への像。

とすると、$V=\bigcup_\lambda (V\cap V_\lambda)$ なので、$\mathfrak{p}\in V$ に対し $\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} B_{f_\lambda}=\operatorname{Spec} B^\lambda_{g_\lambda}\subseteq V\cap V_\lambda$ なる f_λ, g_λ がそれぞれ B, B^λ に存在する。V は open affine なので quasi-compact、従って

$$\operatorname{Spec} B=\bigcup_{i\in I}\operatorname{Spec} B_{f_i}=\bigcup_{i\in I}\operatorname{Spec} B^i_{g_i},\ |I|<\infty$$

$$\sum_i c_i f_i=1,\ c_i\in B \tag{4}$$

が得られる。$V^i:=\operatorname{Spec} B_{f_i}$ とおくと $V=\bigcup_i V^i$ なので

$$U:=f^{-1}(V)=\bigcup_i U^i$$

$$U^i:=f^{-1}(V^i)=f^{-1}(\operatorname{Spec} B_{f_i})=f^{-1}(\operatorname{Spec} B^i_{g_i})=\operatorname{Spec} A^i_{g_i} \tag{5}$$

[U が affine であること]

$A:=\mathcal{O}_U(U)$ とおくと、$f:U\to V=\operatorname{Spec} B$ より $\varphi:B\to A$ となる φ が存在するので (Exercise 2.2.4)、$f_i\mapsto \overline{f}_i$ とすると式 (4) より $\sum_i c_i\overline{f}_i=1$ である。

Exercise 2.2.16 における X_g は affine の場合の $D(g)=\operatorname{Spec} A_g$ の拡張であるが、次の性質をもつ。

性質 2. $f:Y\to X,\ \varphi:=f^\#(X):A=\mathcal{O}_X(X)\to B=\mathcal{O}_Y(Y)$ とすると

$$f^{-1}(X_g)=Y_{\varphi(g)},\ g\in A \tag{6}$$

である。

(証明) $x=f(y),\ y\in Y,\ \varphi_x:=f^\#_y$ とすると下図式は可換であり

$$y\in f^{-1}(X_g)\Leftrightarrow x\in X_g\Leftrightarrow g_x\notin\mathfrak{m}_x=\varphi_x^{-1}(\mathfrak{m}_y)\Leftrightarrow \varphi_x(g_x)=\varphi(g)_y\notin\mathfrak{m}_y\Leftrightarrow y\in Y_{\varphi(g)}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(X)\ni g \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_x"] & \mathcal{O}_Y(Y)\ni\varphi(g) \arrow[d, "\rho_y"] \\
\mathcal{O}_x\ni g_x \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathcal{O}_y\ni\varphi_x(g_x)=\varphi(g)_y
\end{tikzcd}$$

となる。(証明終)

従って、$f^{-1}(V_{f_i})=U_{\overline{f}_i}$ となるが、左辺は $f^{-1}(\operatorname{Spec} B_{f_i})=\operatorname{Spec} A^i_{g_i}$ に等しいので、$U_{\overline{f}_i}$ は affine である。従って Exercise 2.2.17(b) より U は affine であり $U=\operatorname{Spec} A$ となる[5]。

なお

$$f^{-1}(\operatorname{Spec} B)=\operatorname{Spec} A\Rightarrow U^i=f^{-1}(\operatorname{Spec} B_{f_i})=\operatorname{Spec} A_{f_i}=\operatorname{Spec} A^i_{g_i}$$

$$\Rightarrow A|_{U_i}=\mathcal{O}_U(U_i)=A_{f_i}=A^i_{g_i}$$

[5] $U=\operatorname{Spec} C$ とすると、$A=\mathcal{O}_U(U)=C$

なので、A_{f_i} は有限生成 B_{f_i}-module である。

[A が有限生成 B-module であること]

$a \in A \Rightarrow a/1 \in A_{f_i}$ において、A_{f_i} は有限生成 B_{f_i}-module なので、$a/1 = a^i/f_i^{n_i}, a^i = \sum_{j \in J_i} d_j^i a_j^i,\ d_j^i \in B, a_j^i \in A, |J_i| < \infty$ と書け、十分大きな整数 N に対して $af_i^N = a^i f_i^{m_i}$ となる。ここで、$\sum_i c_i f_i = 1$ から得られる $\sum_i c_i' f_i^N = 1, c_i' \in B$ を用いると

$$a = a \sum_i c_i' f_i^N = \sum_i c_i' a f_i^N = \sum_i c_i' a^i f_i^{m_i} = \sum_{i,j} c_i' f_i^{m_i} d_j^i a_j^i,\ c_i' f_i^{m_i} d_j^i \in B, a_j^i \in A$$

となり、A は有限生成 B-module である。

2.3.5

(a)[6] Finite morphism $f : X \to Y$ に対し

$$Y = \bigcup_\lambda V_\lambda,\ V_\lambda = \operatorname{Spec} B_\lambda,\ f^{-1}(V_\lambda) = \operatorname{Spec} A_\lambda$$

$$A_\lambda : \text{finitely generated } B_\lambda\text{-module}$$

とする。

$y \in Y$ とすると、$y \in V_\lambda \subseteq Y$ となる V_λ が存在する。

$$\begin{tikzcd}
 & X_y = X \times_Y \operatorname{Spec} k(y) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & \operatorname{Spec} k(y) \arrow[dl, "g"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

において、$g^{-1}(V_\lambda) = \operatorname{Spec} k(y)$ なので Theorem 3.3 の証明中 Step 7 で示されたことから、$X_y = f^{-1}(V_\lambda) \times_{V_\lambda} \operatorname{Spec} k(y) = \operatorname{Spec}(A_\lambda \otimes_{B_\lambda} k(y))$ が得られる。

ここで、A_λ が有限生成 B_λ-module なので $A_\lambda \otimes_{B_\lambda} k(y)$ は有限生成 $k(y)$-module であり ([1], Propostion 2.17)、アルティン環となる ([1], Exercise 8.3)。アルティン環ではクルル次元が 0 なので prime ideal は極大、極大 ideal は有限個なので ([1], Proposition 8.3)

$$|f^{-1}(y)| = |X_y| = |\operatorname{Spec}(A_\lambda \otimes_{B_\lambda} k(y))| < \infty$$

である。

[6] [1], Exercise 8.4, (i)⇔(iv)

(b)[7] Finite morphism $f : X \to Y$ に対し

$$Y = \bigcup_\lambda V_\lambda,\ V_\lambda = \operatorname{Spec} B_\lambda$$

$$X = \bigcup_\lambda U_\lambda,\ U_\lambda = f^{-1}(V_\lambda) = \operatorname{Spec} A_\lambda$$

$$A_\lambda : \text{finitely generated } B_\lambda\text{-module}$$

とする。

まず X, Y は affine としてよいことを示す。$Z \subseteq X$ を閉集合とする。

性質 3. 位相空間 X において Z が閉集合である条件は、X のカバー $\{U_\lambda\}_\lambda$ に対して、$Z \cap U_\lambda$ が U_λ で閉集合になることである。

(証明) X における Z の閉包を $\overline{Z}$ とすると、$Z \cap U_\lambda = \overline{Z} \cap U_\lambda$ の和集合をとれば $Z = \overline{Z}$ が得られ、Z は閉集合となる。(証明終)

よって Z が閉集合ならば $Z_\lambda = Z \cap U_\lambda$ は U_λ で閉集合である。このとき、$f(Z_\lambda) = f(Z) \cap V_\lambda$ となる。実際、

$$a \in f(Z) \cap V_\lambda \Leftrightarrow a = f(\exists b) \in V_\lambda,\ b \in Z \Leftrightarrow b \in f^{-1}(V_\lambda),\ b \in Z \Leftrightarrow a \in f(Z \cap U_\lambda)$$

よって、$f(Z_\lambda)$ が V_λ で閉集合ならば $f(Z)$ は閉集合ゆえ、f は閉写像となる。また $U_\lambda \to V_\lambda$ においては $f|_{U_\lambda} = f$ なので $f|_{U_\lambda}$ も finite morphism である。

以上により、$f : X = \operatorname{Spec} A \to Y = \operatorname{Spec} B$、$A$ は有限生成 B-module としてよい。$\varphi : B \to A$ としたとき、X の閉集合は $Z = V(\mathfrak{a}),\ \mathfrak{a} \subseteq A$ とおける。このとき、次に示すように

$$f(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}))$$

が成立するので、f は閉写像である。

$(\because)$ $(\subseteq) : \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \Rightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \supseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{a}) \Rightarrow f(\mathfrak{p}) \in V(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}))$。$(\supseteq) : \mathfrak{q} \supseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ とする。A は有限生成 B-module なので B 上整である ([1], Proposition 5.1, (iii))。すると $A/\mathfrak{a}$ は $B/\varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ 上整なので ([1], Proposition 5.6, (i))、$\tilde{\mathfrak{q}} \subseteq B/\varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ に対し $\tilde{\mathfrak{p}} \subseteq A/\mathfrak{a}$ が存在して $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{\mathfrak{p}}) = \tilde{\mathfrak{q}}$ である ([1], Theorem 5.10)。よって、$\mathfrak{q} \supseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ に対し $\exists \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a},\ \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$ である。

(c) k を代数的閉体、ring $A,\ B$ を次のように与える。

$$A = k[x]_x \times k[x]_{x-1} = k[x,y]/(xy-1) \times k[x,y]/((x-1)y-1),\ B = k[x]$$

$$\varphi : B \to A,\ g(x) \mapsto (g(\overline{x}), g(\tilde{x}))$$

$$f : X = \operatorname{Spec} A \to Y = \operatorname{Spec} B$$

ここで $\overline{x},\ \tilde{x}$ はそれぞれ $k[x] \to k[x]_x,\ k[x] \to k[x]_{x-1}$ による x の像である。このとき、

$$A = k[x][(\overline{y}, 0), (0, \tilde{y})]$$

[7] [1], Exercise 5.1

より A は有限生成 B-代数であり、f は finite type である。

$\dim k[x,y]=2$ から

$$\operatorname{Spec} k[x]_x = \{(0),(x-a,y-a^{-1})\,|\,a\in k\backslash\{0\}\}$$

$$\operatorname{Spec} k[x]_{x-1} = \{(0),(x-a,y-(a-1)^{-1})\,|\,a\in k\backslash\{1\}\}$$

であり、

$$\operatorname{Spec} A = \{\mathfrak{p}_0\times k[x]_{x-1}, k[x]_x\times\mathfrak{p}_1\,|\,\mathfrak{p}_0\in\operatorname{Spec} k[x]_x,\ \mathfrak{p}_1\in\operatorname{Spec} k[x]_{x-1}\} \quad (7)$$

$$\operatorname{Spec} B = \{(0),(x-a)\,|\,a\in k\} \quad (8)$$

となる。

$\mathfrak{q}\in Y=\operatorname{Spec} B$ に対し

$$f^{-1}(\mathfrak{q}) = \operatorname{Spec}\,(A/\varphi(\mathfrak{q})^e)_{\widetilde{\varphi(\mathfrak{q})^e}}$$

なので ([1], Exercise 3.21(iv))、

$$\varphi(\mathfrak{q})^e = A\varphi(\mathfrak{q}) = \overline{\mathfrak{q}}^e\times\tilde{\mathfrak{q}}^e$$

$$(A/\varphi(\mathfrak{q})^e)_{\widetilde{\varphi(\mathfrak{q})^e}} = ((k[x,y]/(xy-1))/\overline{\mathfrak{q}}^e)_{\widetilde{\overline{\mathfrak{q}}^e}}\times((k[x,y]/((x-1)y-1))/\tilde{\mathfrak{q}}^e)_{\widetilde{\tilde{\mathfrak{q}}^e}}$$

$$=\begin{cases} k(x)\times k(x) & ;\mathfrak{q}=(0)\\ k\times k & ;\mathfrak{q}=(x-a),\ a\neq 0,1\\ 0\times k & ;\mathfrak{q}=(x)\\ k\times 0 & ;\mathfrak{q}=(x-1)\end{cases}$$

が得られ、

$$|f^{-1}(\mathfrak{q})| = \begin{cases} 2 & ;\mathfrak{q}=(0),\ \text{or }\mathfrak{q}=(x-a),a\neq 0,1\\ 1 & ;\mathfrak{q}=(x-a),a=0,1\end{cases} \quad (9)$$

より、f は全射でかつ quasi-finite である。

しかるに A は有限生成 B-module とはならない。もし A が $k[x]$ 上 $g_1,\cdots,g_n$ の一次結合でかけたとする。すると $N=\max_i \deg_{\overline{y}} g_i,\ M=\max_i\deg_{\tilde{y}} g_i$ に対し、$(\overline{y}^{N+1},\tilde{y}^{M+1})\in A$ は $k[x]$ 上 $g_1,\cdots,g_n$ の一次結合では表せない。従って、f は finite morphism ではない。

2.3.6

X は integral scheme なので既約である。

$U=\operatorname{Spec} A\subseteq X$ を任意の open affine とする。もし、$\xi\notin U$ とすると $\xi\in U^c\Rightarrow\overline{\{\xi\}}\subseteq U^c$ より ξ が generic point に反する。よって $\xi\in U$ である。

$\xi\in U=\operatorname{Spec} A\subseteq X$ とすると $\{\xi\}^-=V(\xi)=\operatorname{Spec} A=V((0))$ となるが、Exercise 2.2.9 より $\xi=(0)$ である。従って $\mathcal{O}_\xi=\mathcal{O}_{(0),U}=A_{(0)}=\operatorname{Frac} A$ は体となる。

2.3.7

まず Y が affine scheme とできることを示す。

$$Y = \bigcup_\lambda Y_\lambda,\ Y_\lambda : \text{open affine},\ X_\lambda = f^{-1}(Y_\lambda)$$

$$f_\lambda = f|_{X_\lambda} : X_\lambda \to Y_\lambda$$

もしある $U \subseteq Y_\lambda$ に対して $f_\lambda^{-1}(U) \to U$ が finite であることを証明できるなら、$f^{-1}(U) = f_\lambda^{-1}(U)$ より本問の証明も終了する。よって $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ が $f : X \to Y$ の条件を引き継いでいれば、Y_λ を Y とできるので、Y は open affine となる。まず

$$f(X_\lambda) \subseteq f(\overline{X_\lambda}) = f(X) \subseteq \overline{f(X_\lambda)} \Rightarrow \overline{f_\lambda(X_\lambda)} = \overline{f(X_\lambda)} = \overline{f(X)} = Y$$

$$\Rightarrow \overline{f_\lambda(X_\lambda)}^{\lambda} = \overline{f_\lambda(X_\lambda)} \cap Y_\lambda = Y \cap Y_\lambda = Y_\lambda \tag{10}$$

より、f_λ は dominant である。f_λ が finite type、generically finite なこと、及び $X_\lambda,\ Y_\lambda$ が integral scheme であるのは明らかである。

$Y = \operatorname{Spec} B$ とし、X の open affine の一つを $U = \operatorname{Spec} A$ とする。

$$f_U = f|_U : \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$$

は dominant なので (上式 (10) と全く同様)、$\varphi : B \to A$ に対し $\ker \varphi \subseteq \mathfrak{N}(B)$ であり ([1], Exercise 1.21(v))、B は reduced ゆえ φ は単射となって、$B \subseteq A$ とみなせる。f は finite type なので A は有限生成 B-代数であり、従って $B'^{-1}A$ は有限生成 $k(B)$-代数となる ($B' = B \setminus 0,\ k(B) := \operatorname{Frac} B$)。

このとき、ネーター正規化定理より $B'^{-1}A$ は $k(B)[t_1, \cdots, t_n]$ 上整なので ($t_i \in B'^{-1}A$ は超越元)、$B'^{-1}A$ は有限生成 $k(B)[t_1, \cdots, t_n]$-module である ([1], Corollary 5.2)。また、$\operatorname{Spec} B'^{-1}A \to \operatorname{Spec} k(B)[t_1, \cdots, t_n]$ は全射となる ([1], Theorem 5.10)。

ここで $k(\eta) = k((0)) = B_{(0)} = \operatorname{Frac} B = k(B) = K(Y)$ なので、f の generically finite 性より

$$B'^{-1}A = k(B) \otimes_B A = k(\eta) \otimes_B A \Rightarrow f^{-1}(\eta) = \operatorname{Spec} B'^{-1}A \Rightarrow |\operatorname{Spec} B'^{-1}A| < \infty$$

が得られるが、先程の全射性から

$$|\operatorname{Spec} k(B)[t_1, \cdots, t_n]| \leq |\operatorname{Spec} B'^{-1}A| < \infty$$

となる。しかるに、超越拡大は無限次拡大で無限集合となるので、今の場合 $n = 0$ でなければならない。

従って、$B'^{-1}A$ は有限生成 $k(B)$-module であり、ひいては A が有限生成 $k(B)$-module となる。その生成元を $a_1, \cdots, a_m$ とおく。a_i は代数的数なので $k(B)$ に係数をもつ多項式の根となるが、係数の分母を払うと $f_i(a_i) = 0,\ f_i(x) \in B[x]$ となる。

f_i の最高次係数 b_i に対し $b = \prod_i b_i \in B$ とおいて、$f_i(x) \in B_b[x]$ とみなすと $f_i(x)$ を monic にできる。よって $a_i/1$ は monic f_i/b_i の根なので B_b 上整、$A_b = B_b[a_1/1, \cdots, a_m/1]$ も B_b 上整でかつ有限生成 B_b-module となる。従って、

$$\operatorname{Spec} A_b \to \operatorname{Spec} B_b \tag{11}$$

は finite である。

さて、$Y = \operatorname{Spec} B$ に対し

$$f^{-1}(\operatorname{Spec} B) = \bigcup_{j \in J} U_j,\ U_j = \operatorname{Spec} A^j,\ |J| < \infty$$

とする。このとき A^j は有限生成 B-代数である。U_j に対する上記 b を b^j とおくと、

$$f^{-1}(\operatorname{Spec} B_{b^j}) = \bigcup_{j \in J} \operatorname{Spec} A^j_{b^j}$$

であり、式 (11) から

$$\operatorname{Spec} A^j_{b^j} \to \operatorname{Spec} B_{b^j}$$

は finite であるが、$b' = \prod_j b^j$ とすると

$$\operatorname{Spec} (A^j_{b^j})_{b'} = \operatorname{Spec} A^j_{b'} \to \operatorname{Spec} (B_{b^j})_{b'} = \operatorname{Spec} B_{b'}$$

も finite となる。

そこで、改めて $B_{b'}$ を B、$A^j_{b'}$ を A^j とすることにより、

$$f : X \to Y,\ Y = \operatorname{Spec} B,\ X = f^{-1}(Y) = \bigcup_i \operatorname{Spec} A^i$$

$$f_i = f|_{U_i} : U_i = \operatorname{Spec} A^i \to Y = \operatorname{Spec} B$$

とでき、f_i は finite かつ dominant である ($\because B \subseteq A^i$)。

すると

$$D(g) \subseteq \bigcap_i \operatorname{Spec} A^i,\ D(g) \approx \operatorname{Spec} A^i_{a^i},\ A^i_{a^i} \approx A^i_{a^i},\ a^i \in A^i$$

となるようにとれる (Exercise 2.3.1 性質 1)。

A^i は B 上整なので $g_i(a^i) = 0$ となる最小次数 monic $g_i(x) \in B[x]$ が存在する。その定数項を b_{i0} とし、$d = \prod_i b_{i0} \in B$ とおく。すでに示したように $B \subseteq A^i$ なので、d は A^i の元でもあり $d = a^i h_i$ の形に書け (b_{i0} は $a^i h_i'$ の形)、$(A^i_{a^i})_d = A^i_d$ から $A^i_d = A^j_d$ となる。

$$\operatorname{Spec} A^i \to \operatorname{Spec} B : \text{finite}$$

から

$$\operatorname{Spec} A^i_d \to \operatorname{Spec} B_d : \text{finite}$$

が得られ、$A_d^i = A_d^j$ より

$$f^{-1}(\mathrm{Spec}\, B_d) = \bigcup_i \mathrm{Spec}\, A_d^i = \mathrm{Spec}\, A_d^i$$

となる。従って、$U = \mathrm{Spec}\, B_d$ とすると Y 既約から U は dense であり、$f^{-1}(U) \to U$ は finite である。

2.3.8

$X = \bigcup_i X_i,\ X_i = \mathrm{Spec}\, A^i$ に対し、$\tilde{X}_i = \mathrm{Spec}\, \tilde{A}^i$ は normal subscheme である。$A^i \subseteq \tilde{A}^i$ より morphism $\varphi_i : \mathrm{Spec}\, \tilde{A}^i \to \mathrm{Spec}\, A^i$ が得られる。

$U_{ij} = \varphi_i^{-1}(X_i \cap X_j) \subseteq \tilde{X}_i$ に対し

$$\varphi_{ij} : U_{ij} = \varphi_i^{-1}(X_i \cap X_j) \xrightarrow{\sim} U_{ji} = \varphi_j^{-1}(X_i \cap X_j) \tag{12}$$

を次のように定義する (下記式 (13) の 2 行下まで続く)。

$x \in U_{ij} = \varphi_i^{-1}(X_i \cap X_j)$ のとき $\varphi_i(x) \in X_i \cap X_j$ なので、

$$\varphi_i(x) \in \mathrm{Spec}\, A^i_{f_i^{(j)}} \approx \mathrm{Spec}\, A^j_{f_j^{(i)}} \subseteq \mathrm{Spec}\, A^i \cap \mathrm{Spec}\, A^j$$

とできる (f_i については、相手を明記する必要があるときは $f_i^{(j)}$ のように記す)。

整閉包については次の普遍的な性質がある。

性質 4. 整域 A、その商体 $k(A)$ における整閉包を $\tilde{A}$、$\iota : A \hookrightarrow \tilde{A}$ とおく。このとき、整閉 B と単射 $g : A \hookrightarrow B$ に対し、$g' : \tilde{A} \hookrightarrow B,\ g = g'\iota$ となる単射 g' が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\iota"'] & & B \arrow[rr, "\lambda"] & & k(B) \\
& \tilde{A} \arrow[ur, dotted, "\exists ! g'"'] \arrow[rr, "\kappa"] & & k(\tilde{A}) = k(A) \arrow[ur, "g''"'] &
\end{tikzcd}$$

(証明) 上図式において、ι, κ, λ は埋め込みである。B は A を含む整閉なので、埋め込み $g' : \tilde{A} \hookrightarrow B$ が存在し、$g = g'\iota$ を満たす。よってその一意性を示す。$\lambda g(A \setminus 0)$ は $k(B)$ において単元となるので、商体 $k(A)$ の Universal Property から $\lambda g = g''\kappa\iota$ を満たす $g'' : k(A) \hookrightarrow B$ が一意に存在する[8] ([1], Proposition 3.1)。同様に $k(\tilde{A}) = k(A)$ の Universal Property から $\lambda g' = \overline{g}\kappa$ を満たす $\overline{g}$ が存在する。このとき、g'' の一意性から

$$\lambda g' = \overline{g}\kappa \Rightarrow \lambda g'\iota = \overline{g}\kappa\iota \Rightarrow \lambda g = \overline{g}\kappa\iota \Rightarrow \overline{g} = g'' \Rightarrow \lambda g' = g''\kappa$$

となるが、λ が単射なので $\lambda g' = g''\kappa$ を満たす g' は一意的である。なお $g' = g''|_{\tilde{A}}$ であり、g'' は g の拡張である。(証明終)

[8] 具体的には $g''(a/b) = g(a)/g(b)$ なので、g が単射ゆえ g'' も単射である。

よって

$$A^i_{f_i} \approx A^j_{f_j} \Rightarrow \widetilde{A^i_{f_i}} \approx \widetilde{A^j_{f_j}}$$

が成り立つ。

$$\varphi_i^{-1}(\operatorname{Spec} A^i_{f_i}) = \operatorname{Spec} \widetilde{A^i}_{f_i} = \operatorname{Spec} \widetilde{A^i_{f_i}} \overset{\sigma}{\approx} \operatorname{Spec} \widetilde{A^j_{f_j}} = \operatorname{Spec} \widetilde{A^j}_{f_j} = \varphi_j^{-1}(\operatorname{Spec} A^j_{f_j}) \tag{13}$$

から ([1], Proposition 5.12)、$\varphi_i^{-1}(\operatorname{Spec} A^i_{f_i^{(j)}}) = \operatorname{Spec} \widetilde{A^j}_{f_j^{(i)}}$ となる。従って $\operatorname{Spec} \widetilde{A^j}_{f_j^{(i)}}$ から同型な開近傍 $\operatorname{Spec} \widetilde{A^j}_{f_j^{(i)}}$ への対応を φ_{ij} と定義する。

このとき φ_{ij} が morphism となるためには、他の

$$\operatorname{Spec} \tilde{A}^i_{g_i^{(j)}} \approx \operatorname{Spec} \tilde{A}^j_{f_j^{(i)}}$$

に対し

$$\operatorname{Spec} \tilde{A}^i_{f_i^{(j)}} \cap \operatorname{Spec} \tilde{A}^i_{g_i^{(j)}} \approx \operatorname{Spec} \tilde{A}^j_{f_j^{(i)}} \cap \operatorname{Spec} \tilde{A}^j_{g_j^{(i)}} \tag{14}$$

でなければならないが、それは次の性質から成立する。

性質 **5.**

$$A_a \approx B_b,\ A_c \approx B_d \ \Rightarrow\ A_{ac} \approx B_{bd}$$

(証明) Exercise 2.3.1 の性質 1 に示したように、上式は正確には

$$A_{ab'} = B_b,\ b|_{\operatorname{Spec} A_a} = b'/a^n,\ b' \in A,\ \operatorname{Spec} A_a \subseteq \operatorname{Spec} A \cap \operatorname{Spec} B$$

$$A_{cd'} = B_d,\ d|_{\operatorname{Spec} A_c} = d'/c^m,\ d' \in A,\ \operatorname{Spec} A_c \subseteq \operatorname{Spec} A \cap \operatorname{Spec} B$$

であり、このときの ab', cd' を a, c としたものである。すると、

$$b|_{\operatorname{Spec} A_{ac}} = b'c^n/(ac)^n,\ d|_{\operatorname{Spec} A_{ac}} = d'a^m/(ac)^m \ \Rightarrow\ (bd)|_{\operatorname{Spec} A_{ac}} = b'd'c^n a^m/(ac)^{n+m}$$

$$\operatorname{Spec} A_{ac} = \operatorname{Spec} A_a \cap \operatorname{Spec} A_c \subseteq \operatorname{Spec} A \cap \operatorname{Spec} B$$

より

$$A_{acb'd'} = A_{acb'd'c^n a^m} = B_{bd}$$

である。(証明終)

よって式 (14) から貼り合わせが可能となり式 (12) が得られる。なお、この φ_i に関しては、式 (13) から下図式が可換になるので

$$\varphi_i = \varphi_j \varphi_{ij} \tag{15}$$

が成立し、上昇定理から全射である。

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} \tilde{A}^i_{f_i^{(j)}} \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & \operatorname{Spec} \tilde{A}^j_{f_j^{(i)}} \arrow[dl, "\varphi_j"] \\
& \operatorname{Spec} A^i_{f_i^{(j)}} = \operatorname{Spec} A^j_{f_j^{(i)}} &
\end{tikzcd}
$$

$\tilde{X}_i,\ U_{ij},\ \varphi_{ij}$ が Exercise 2.2.12 の条件を満たすことを示す。まず、

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1},\ \varphi_{ii} = \mathrm{id}$$

は明らかである。

$\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$ を示す。$\varphi_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}$ から $\varphi_{ij}\varphi_i^{-1}(X_i \cap X_j) \subseteq \varphi_j^{-1}(X_i \cap X_j)$ であるが、$X_j = \operatorname{Spec} A^j$ の代わりに $\operatorname{Spec} A^j_{f_j^{(k)}}$ ($\subseteq \operatorname{Spec} A^j \cap \operatorname{Spec} A^k \subseteq X_j$) とすれば $\varphi_{ij}\varphi_i^{-1}(X_i \cap \operatorname{Spec} A^j_{f_j^{(k)}}) \subseteq \varphi_j^{-1}(X_i \cap \operatorname{Spec} A^j_{f_j^{(k)}})$ となるので

$$\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = \varphi_{ij}\varphi_i^{-1}(X_i \cap X_j \cap X_k) \subseteq \varphi_j^{-1}(X_i \cap X_j \cap X_k) = U_{ji} \cap U_{jk}$$

が得られる。このとき

$$U_{ij} \cap U_{ik} = \varphi_{ji}\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) \subseteq \varphi_{ji}(U_{ji} \cap U_{jk}) \subseteq U_{ij} \cap U_{ik}$$

$$\Rightarrow\ \varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$$

が成り立つ。

さらに、$U_{ij} \cap U_{ik}$ において

$$\varphi_{ik} : \varphi_i^{-1}(X_i \cap X_j \cap X_k) \overset{\varphi_{ij}}{\to} \varphi_j^{-1}(X_i \cap X_j \cap X_k) \overset{\varphi_{jk}}{\to} \varphi_k^{-1}(X_i \cap X_j \cap X_k)$$

より

$$\varphi_{ik} = \varphi_{jk}\varphi_{ij}$$

である。

以上により Exercise 2.2.12 を満たす $\tilde{X},\ \psi_i : \tilde{X}_i \to \tilde{X}$(中への isomorphism) が構成できた。

$\tilde{X}$ は normal scheme である。実際、$\tilde{X} = \bigcup_i \psi_i(\tilde{X}_i)$ であり、$\tilde{A}^i$ が整閉ゆえ ([1], Corollary 5.5)、$\tilde{A}^i_{\mathfrak{p}},\ \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ も整閉なので ([1], Proposition 5.13)、$\tilde{X}_i = \operatorname{Spec} \tilde{A}^i$ 及び $\psi_i(\tilde{X}_i)$ は normal である。Normal 性は局所的性質なので $\tilde{X}$ も normal である。

次に $\varphi_i\psi_i^{-1} : \psi_i(\tilde{X}_i) \to X$ を貼り合わせて ($\varphi_i : \tilde{X}_i \to X$ とみなす)、$\pi : \tilde{X} \to X$ を定義する。これは $\psi_i(\tilde{X}_i) \cap \psi_j(\tilde{X}_j) = \psi_i(U_{ij}) = \psi_j(U_{ji})$ において

$$\varphi_i\psi_i^{-1} = \varphi_j\varphi_{ij}\psi_i^{-1} = \varphi_j\psi_j$$

なので可能である。従って

$$\pi : \tilde{X} \to X$$

$$\pi\psi_i = \varphi_i$$

が得られる。

Normal scheme Z に対し morphism $f : Z \to X$ が存在したとする。

$$X = \bigcup_i X_i,\ X_i = \operatorname{Spec} A_i,\ V_i = f^{-1}(X_i) = \bigcup_j V_i^k = \bigcup_j \operatorname{Spec} B_i^k$$

とおくと、$Z = \bigcup_{i,k} V_i^k,\ f(V_i^k) \subseteq X_i$ である。

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rrr, bend left, "f"] \arrow[rrrd, bend right=60, "\theta"'] & V_i^k \arrow[l, "\supseteq"] \arrow[r, "f|_{V_i^k}"] \arrow[rd, "\theta_i^k"] \arrow[rrd, bend right=50, "\overline{\theta}_i^k"'] & X_i \arrow[r, "\subseteq"'] & X \\
 & & \tilde{X}_i \arrow[u, "\varphi_i"'] \arrow[r, "\psi_i"] & \tilde{X} \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd} \tag{16}$$

f は dominant ゆえ $f|_{V_i^k}$ も dominant で[9]、Z は reduced なので対応する $g_i^k : A_i \to B_i^k$ は単射である。また、Z が normal scheme ゆえ B_i^k は整閉である。そこで、整閉包の普遍的性質 4 を用いると $g_i^{k\prime} : \tilde{A}_i \to B_i^k$ は一意的であり、対応して

$$\theta_i^k : V_i^k \to \widetilde{X_i},\ f|_{V_i^k} = \varphi_i\theta_i^k \tag{17}$$

を満たす θ_i^k も一意的である。

このとき $\overline{\theta}_i^k = \psi_i\theta_i^k$ を貼り合わせて

$$\theta : Z \to \tilde{X}$$

を作る。そのために、$V_i^k \cap V_j^l$ において $\overline{\theta}_i^k = \overline{\theta}_j^l$ となることを示す。

$V_i^k \cap V_j^l$ において $\varphi_i\theta_i^k = f|_{V_i^k \cap V_j^l} = \varphi_j\theta_j^l$ なので

$$\varphi_i\theta_i^k = \varphi_j\theta_j^l \overset{(15)}{\Rightarrow} \varphi_j\varphi_{ij}\theta_i^k = \varphi_j\theta_j^l = f|_{V_i^k \cap V_j^l}$$

となる。ここで、$V_i^k \cap V_j^l$ においても、$\varphi_j\theta_j^l = f$ を満たす θ_j^l の一意性は式 (17) の場合とほぼ同様に証明できる[10]ので、

$$\varphi_{ij}\theta_i^k = \theta_j^l \ \Rightarrow\ \psi_j\varphi_{ij}\theta_i^k = \psi_j\theta_j^l \ \Rightarrow\ \psi_i\theta_i^k = \psi_j\theta_j^l \ \Rightarrow\ \overline{\theta}_i^k = \overline{\theta}_j^l$$

---

[9] Z は integral scheme なので既約、よって $f(Z) = f(\overline{V_i^k}) \subseteq \overline{f(V_i^k)} \Rightarrow X = \overline{f(Z)} \subseteq \overline{f(V_i^k)} \Rightarrow \overline{f(V_i^k)}|_{X_i} = X_i$

[10] $x \in V_i^k \cap V_j^l \Rightarrow f(x) \in X_i \cap X_j \Rightarrow f(x) \in \operatorname{Spec}(A_i)_{f_i} \approx \operatorname{Spec}(A_j)_{f_j} \Rightarrow x \in \operatorname{Spec}(B_i^k)_{h_i} \approx \operatorname{Spec}(B_j^l)_{h_j} \subseteq f^{-1}(\operatorname{Spec}(A_i)_{f_i}) \approx f^{-1}(\operatorname{Spec}(A_j)_{f_j})$ なので、整閉包の普遍的性質 4 を用いると $(A_i)_{f_i} \to (B_i^k)_{h_i}$ は $(A_i)_{f_i} \to (A_i)_{f_i} \overset{\exists!}{\to} (B_i^k)_{h_i}$ に一意に分解されるので $V_i^k \cap V_j^l$ において $\varphi_i\theta_i^k = f$ となる θ_i^k は一意的である。

が得られる。

図式 (16) の全ての区域は可換なので

$$f = \pi\theta$$

であり、θ_i^j の一意性から θ は一意的である。

$X \to \operatorname{Spec} k$ が finite type のとき、$\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{\beta} \operatorname{Spec} k$ において $X = \beta^{-1}((0)) = \bigcup_{i \in I} X_i,\ X_i = \operatorname{Spec} A^i,\ |I| < \infty$、$A^i$ は有限生成 k-代数である。

$$\pi^{-1}(X_i) \overset{\#}{=} \psi_i(\tilde{X}_i) = \psi_i(\operatorname{Spec} \widetilde{A^i}) \tag{18}$$

において、$\widetilde{A^i}$ は $\operatorname{Frac} A^i$ における integral closure なので $\widetilde{A^i}$ は有限生成 A^i-module(Theorem 3.9A, L:=K)、よって π は finite である。

上式で $\overset{\#}{=}$ が成り立つのは次の通りである。$\pi^{-1}(X_i)$ は開集合なので、位相空間として $\psi_i(\tilde{X}_i)$ に等しいことを言えばよい。($\supseteq$) は明らかなので ($\subseteq$) を示す。

$$x \in \pi^{-1}(X_i),\ \exists x \in \psi_j(\tilde{X}_j)$$

$$\Rightarrow\ \pi(x) \in X_i,\ x = \psi_j(x_j), x_j \in \tilde{X}_j,\ \pi(x) \in \pi\psi_j(\tilde{X}_j) = \varphi_j(\tilde{X}_j) \overset{surjective}{=} X_j$$

$$\Rightarrow\ X_i \cap X_j \ni \pi(x) = \pi(\psi_j(x_j)) = \varphi_j(x_j)$$

$$\Rightarrow\ x_j \in \varphi_j^{-1}(X_i \cap X_j) = U_{ji}$$

$$\Rightarrow\ x = \psi_j(x_j) \in \psi_j(U_{ji}) = \psi_j(\tilde{X}_j) \cap \psi_i(\tilde{X}_i) \subseteq \psi_i(\tilde{X}_i)$$

2.3.9

(a) $k[x] \otimes_k k[y] = k[x, y]$ なので ([1], Exercise 2.6)、

$$\mathbf{A}_k^1 \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbf{A}_k^1 = \mathbf{A}_k^2$$

である。

位相空間として $f = (p_x, p_y) : \operatorname{Spec} k[x, y] \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} k[x] \times \operatorname{Spec} k[y]$ だったとすると (右辺は fibred product でなく積位相)、$p_x : \operatorname{Spec} k[x, y] \to \operatorname{Spec} k[x]$ は $i_x : k[x] \hookrightarrow k[x, y]$ に対応し、p_y, i_y も同様である。

このとき $p_x((xy-1)) = i_x^{-1}((xy-1)) = (xy-1) \cap k[x] = (0),\ p_y((xy-1)) = (0) \Rightarrow f((xy-1)) = ((0), (0))$ であり同様に $f((x-y)) = ((0), (0))$ なので $\operatorname{Spec} k[x, y]$ と $\operatorname{Spec} k[x] \times \operatorname{Spec} k[y]$ は位相同型ではない。

(b) $S = k[s] \setminus 0,\ T = k[t] \setminus 0$ とすると

$$k(s) \otimes_k k(t) = S^{-1}k[s] \otimes_k T^{-1}k[t] = (S^{-1}k[s] \otimes_{k[s]} k[s]) \otimes_k T^{-1}k[t]$$

$$= S^{-1}k[s] \otimes_{k[s]} (k[s] \otimes_k T^{-1}k[t]) \overset{am2.6}{=} S^{-1}k[s] \otimes_{k[s]} (T^{-1}k[t])[s]$$

$$= S^{-1}k[s] \otimes_{k[s]} T^{-1}k[t, s] \overset{am3.5}{=} S^{-1}T^{-1}k[t, s] = (ST)^{-1}k[t, s]$$

なので $\mathrm{Spec}\, k(x) \otimes_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\, k(y)$ は $(ST)^{-1}k[x,y]$ の prime ideal からなる。ここで $\overset{am2.6}{=}$ は [1], Exercise 2.6 に拠り、$\overset{am3.5}{=}$ は [1], Proposition 3.5 に拠る。

$\dim k[x,y] = 2$ から prime ideal $\mathfrak{p} \subseteq k[x,y]$ は $(0), (f(x,y)), (x-a, y-b)$ の形に限られる (f は既約多項式)。

$\mathfrak{p} \cap ST = \varnothing$ のとき、$\mathfrak{p}$ は $\mathrm{Spec}\,(ST)^{-1}k[x,y]$ の prime ideal に 1 対 1 対応する。すると、$(x-a, y-b) \cap ST \ni (x-a)$ から $(x-a, y-b)$ は除外されるので、

$$\mathrm{Spec}\,(ST)^{-1}k[x,y] = \{(0), \{(f(x,y))\}\}$$

であり、$(ST)^{-1}k[x,y]$ は次元 1 のネーター整域となる。ここで、$f(x,y)$ は変数 x, y を真に含む、すなわち $f(x,y) \neq f(0,y), f(x,y) \neq f(x,0)$ となる既約多項式である。

このような既約多項式は無限に存在する。例えば、$x - y^n$ は $k[x,y]/(x-y^n) \approx k[y]$ が整域なので既約多項式である。また、$n \neq m$ なら $(x-y^n) \neq (x-y^m)$ である ($x = y^n$ とすると左辺は 0 だが右辺は 0 ではない)。

2.3.10

(a) $f : X \to Y,\ Y = \bigcup_\lambda V_\lambda,\ V_\lambda = \mathrm{Spec}\, B_\lambda$ とする。このとき、$y \in Y$ に対し、$y \in V_\lambda$ となる V_λ が存在する。

$$\begin{tikzcd}
 & X_y = X \times_Y \mathrm{Spec}\, k(y) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & \mathrm{Spec}\, k(y) \arrow[dl, "g"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

において、$g^{-1}(V_\lambda) = \mathrm{Spec}\, k(y)$ なので Theorem 3.3 の証明中 Step 7 で示されたことから、$X_y = f^{-1}(V_\lambda) \times_{V_\lambda} \mathrm{Spec}\, k(y)$ が得られる。よって、Y を $V = \mathrm{Spec}\, B$ としてよい。

$U \subseteq X$ を任意の開集合としたとき、位相空間として $U_y = f^{-1}(y) \cap U = f|_U^{-1}(y)$ を示せたとしよう。すると $X = \bigcup_i U_i,\ U_i = \mathrm{Spec}\, A_i$ に対し

$$X_y = p_1^{-1}(X) = \bigcup_i p_1^{-1}(U_i) = \bigcup_i (f^{-1}(y) \cap U_i) = f^{-1}(y)$$

が成立し、証明が終了する。よって X は $U = \mathrm{Spec}\, A$ としてよい。

従って問題は $X = \mathrm{Spec}\, A,\ Y = \mathrm{Spec}\, B$ の場合に帰着されるが、[1], Exercise 3. 21(iv) より $X_y = \mathrm{Spec}\, A \otimes_B k(y) = f^{-1}(y)$ なのでこれは成立する。

(b) k を代数的閉体とする。$X = \mathrm{Spec}\, k[s,t]/(s-t^2),\ Y = \mathrm{Spec}\, k[s]$ のとき

$$\varphi : k[s] \to k[s,t]/(s-t^2),\ s \mapsto s$$

が存在するので

$$f : X \to Y$$

が定義できる。$Y = \{(s-a), \eta\}_{a\in k}$ より、場合に分けて

$$X_y = X \times_Y \operatorname{Spec} k(y) = \operatorname{Spec} k[s,t]/(s-t^2) \otimes_{k[s]} k(y)$$

を調べる。

[i] $y = (s-a),\ a \neq 0$ の場合
一般に A の ideal $I,\ J$ に対し、$A/(I+J) = (A/I)/((I+J)/I) = (A/I)/J^e$ なので、$k(y) = k[s]_{(s-a)}/(s-a)_{(s-a)} = k[s]/(s-a)$ を用いると

$$k[s,t]/(s-t^2)\otimes_{k[s]}k[s]/(s-a) \overset{\$}{=} (k[s,t]/(s-t^2))/(s-a)^e = k[s,t]/(s-t^2, s-a) = k[t]/(t^2-a)$$

なので ($\overset{\$}{=}$ は [1], Exercise 2.2 による)、

$$X_a = \operatorname{Spec} k[t]/(t^2-a) = \{\mathfrak{p}_+ = (t+\sqrt{a})/(t^2-a),\ \mathfrak{p}_- = (t-\sqrt{a})/(t^2-a)\}$$

ここで $A = k[t]/(t^2-a)$ とおくと

$$k(\mathfrak{p}_\pm) = (A/\mathfrak{p}_\pm)_{p_\pm} = ((k[t]/(t^2-a))/((t\pm\sqrt{a})/(t^2-a)))_{p_\pm} = (k[t]/(t\pm\sqrt{a}))_{p_\pm} = k$$

[ii] $y = (s)$ の場合

$$X_0 = \operatorname{Spec} k[t]/(t^2) = \{\mathfrak{p} = (t)/(t^2)\}$$

$$k(\mathfrak{p}) = ((k[t]/(t^2))/((t)/(t^2)))_{\mathfrak{p}} = (k[t]/(t))_{\mathfrak{p}} = k$$

ここで t は $k[t]/(t^2)$ で冪零元なので X_0 は non-reduced である。

[iii] $y = \eta = (0)$ の場合

$$k(\eta) = k[s]_{(0)}/(0) = k(s)$$

$$X_\eta = \operatorname{Spec} k[s,t]/(s-t^2) \otimes_{k[s]} k(s) = \operatorname{Spec} k(s)[t]/(s-t^2)$$

ここで $B = k(s)[t]/(s-t^2)$ は $s-t^2$ が t の 2 次既約多項式なので、$k(s)$ の 2 次拡大体である。

$$X_\eta = \operatorname{Spec} B = \{(0)\}$$

$$k((0)) = B_{(0)}/(0)_{(0)} = \operatorname{Frac} B = B$$

より、$k((0))$ は $k(\eta)$ の 2 次拡大体である。

2.3.11

(b) を先に証明する。

$$f : Y \to X = \operatorname{Spec} A,\ Y = f^{-1}(X) = \bigcup_i U_i,\ U_i = \operatorname{Spec} B_i$$

U_i は Y で open なので X の open U^i を用いて

$$U_i = U^i \cap Y = f^{-1}(U^i)$$

とかける。$f(y) \in \exists U^i$ から

$$f(y) \in D(g) \subseteq U^i,\ \exists g \in A$$

とできるので、$f(Y)$ は $D(g)$ で覆われる。$f(Y)^c$ は開集合だから $f(Y)^c$ も $D(g')$ で覆われ、結局 X はこれらの $D(g)$ で覆われる。X は affine なので quasi-compact ゆえ有限個の $D(g)$ で覆われ

$$(g_1, \cdots, g_n) \ni 1 \ \Rightarrow\ (\varphi(g_1), \cdots, \varphi(g_n)) \ni 1$$

である (Exercise 2.3.3 の証明参照)。

$$Y = f^{-1}(X) = f^{-1}(\bigcup_i D(g_i)) = \bigcup_i f^{-1}(D(g_i))$$

において、affine X では $D(g_i) = X_{g_i}$ なので、性質 2 から

$$f^{-1}(D(g_i)) = f^{-1}(X_{g_i}) = Y_{\varphi(g_i)}$$

である。一方、U^i においては $D(g_i) \subseteq U^i$ ゆえ

$$Y_{\varphi(g_i)} = f^{-1}(D(g_i)) \subseteq f^{-1}(U^i) = U_i = \operatorname{Spec} B_i$$

なので、Exercise 2.2.16(a) から

$$Y_{\varphi(g_i)} = Y_{\varphi(g_i)} \cap U_i = D(\varphi(g_i)|_{U_i}) = \operatorname{Spec}(B_i)_{\varphi(g_i)|_{U_i}}$$

となり[11]、$Y_{\varphi(g_i)}$ は affine である。よって Exercise 2.2.17(b) から $Y = \bigcup_i Y_{\varphi(g_i)}$ は affine である。

$f : Y = \operatorname{Spec} B \to X = \operatorname{Spec} A$ とすると、f は closed immersion なので Exercise 2.2.18(d) から $\psi : A \to B$ は全射である。よって

$$B = A/\ker\psi \Rightarrow f : \operatorname{Spec} B = \operatorname{Spec} A/\ker\psi \to X = \operatorname{Spec} A$$

となり、$Y = \operatorname{Spec} A/\ker\psi$ である。

(a) $g : X' \to X$ とおく。X の affine 開被覆の一つを $U = \operatorname{Spec} A,\ V = f^{-1}(U)$ とすると、$\operatorname{Spec} A$ の世界において $f|_V : V \to U$ は closed immersion である。な

[11] $\varphi(g_i) \in B = \mathcal{O}_Y(Y) \ \Rightarrow\ \varphi(g_i)|_{U_i} \in \mathcal{O}_Y(U_i) = \mathcal{O}_Y|_{U_i}(U_i) = B_i$

ぜなら単射は明らかであり、連続性、逆写像の連続性、$f|_V^{\#}$ の全射性 (stalk 利用) とも局所的に示せるからである。よって、(b) から V は A のある ideal を用いて $f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} A/I$ とかける。

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Spec} A/I \times_U g^{-1}(U) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "f'"] & \\
Y \supseteq \operatorname{Spec} A/I \arrow[dr, "f"'] & & X' \supseteq g^{-1}(U) \arrow[dl, "g"] \\
& X \supseteq U = \operatorname{Spec} A &
\end{tikzcd}$$

$g^{-1}(U)$ の affine 開被覆の一つを $U' = \operatorname{Spec} A'$ とすると

$$f'^{-1}(U') = \operatorname{Spec} A/I \times_U \operatorname{Spec} A' = \operatorname{Spec}(A/I \otimes_A A') \overset{am2.2}{=} \operatorname{Spec} A'/I^e$$

であり ($\overset{am2.2}{=}$ は [1], Exercise 2.2 による)、$f'|_{f'^{-1}(U')} : f'^{-1}(U') \to U'$ は $A' \to A'/I^e$ が全射なので closed immersion である。すると $g^{-1}(U)$ の open affine で貼り合わせた

$$f'|_{\operatorname{Spec} A/I \times_U g^{-1}(U)} : \operatorname{Spec} A/I \times_U g^{-1}(U) \to g^{-1}(U)$$

も closed immersion となる (単射は明らか、他の性質は局所的ゆえ)。

Theorem 3.3 の証明中 Step 7 より $Y \times_X g^{-1}(U) = \operatorname{Spec} A/I \times_U g^{-1}(U)$ なので、$f'|_{Y \times_X g^{-1}(U)} : Y \times_X g^{-1}(U) \to g^{-1}(U)$ が closed immersion となる。

さらに $X = \bigcup_i U_i,\ X' = \bigcup_i g^{-1}(U_i)$ となる開被覆で貼り合わせたものが $f' : Y \times_X X \to X'$ であるが、同様にして closed immersion となる。

(c) $f : Y \to X,\ g : Y' \to X$ を closed immersion とする。$X \supseteq U = \operatorname{Spec} A$ とおくと、Y は reduced induced closed subscheme なので、Y の open subscheme $U_Y = U \cap Y$ も reduced induced closed subscheme となり、Example 3.2.6 より

$$f^{-1}(U) = U \cap Y = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a},\ \mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in U \cap Y} \mathfrak{p}$$

が成り立つ。また (b) で示したように $U = \operatorname{Spec} A$ において $Y' \cap U$ は affine ゆえ

$$g^{-1}(U) = U \cap Y' = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}'$$

とおける。

このとき、$\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{a}'$ なので (Example 3.2.6)、

$$A \to A/\mathfrak{a}' \to A/\mathfrak{a}$$

から

$$f = g\varphi_U : \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \overset{\varphi_U}{\to} \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}' \overset{g}{\to} \operatorname{Spec} A$$

を満たす φ_U が存在する。

$$\begin{tikzcd}
Y \supseteq \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "f"'] & & \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}' \subseteq Y' \arrow[dl, "g"] \\
& X \supseteq U = \operatorname{Spec} A &
\end{tikzcd}$$

ここで、もし $y \in U \cap V$ において $\varphi_U(y) \neq \varphi_V(y)$ とすると、g は単射なので $g\varphi_U(y) \neq g\varphi_V(y)$ となるが、すると $f(y) \neq f(y)$ という矛盾を生じる。よって $\varphi_U(y) = \varphi_V(y)$ ゆえ貼り合わせ可能となり、$\varphi : Y \to Y'$ が定義できて、$f = g\varphi$ となる。

(d) X が affine の場合

$f : Z \to X = \operatorname{Spec} A$ に対し $\varphi : A \to \mathcal{O}_Z(Z)$ が存在するので (Exercise 2.2.4)、closed subscheme を $Y = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a},\ \mathfrak{a} = \ker\varphi$ と定義する。φ は次のように分解できる。

$$\varphi : A \to A/\mathfrak{a} \to \mathcal{O}_Z(Z)$$

すると再び Exercise 2.2.4 から

$$f = \iota g : Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{\iota} X$$

となり、f は Y を経由する。なお、$A \to A/\ker\varphi$ は全射なので ι は closed immersion である。

さて、

$$f = \iota' g' : Z \xrightarrow{g'} Y' \xrightarrow{\iota'} X$$

を満たす X の closed subscheme Y' が与えられたとする (ι' は closed immersion)。(b) より $Y' = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{b}$ とかけるので、

$$\varphi : A \xrightarrow{\widetilde{\iota'}} A/\mathfrak{b} \xrightarrow{\widetilde{g'}} \mathcal{O}_Z(Z)$$

とできる。このとき $\mathfrak{a} = \ker\varphi = \varphi^{-1}(0) \supseteq \widetilde{\iota'}^{-1}(0) = \mathfrak{b}$ より

$$A \to A/\mathfrak{b} \to A/\mathfrak{a} \to \mathcal{O}_Z(Z)$$

となるので、ι は

$$\iota : Y \xrightarrow{h} Y' \xrightarrow{\iota'} X$$

と分解できる。

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[dr, "g'"'] & Y \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, dotted, "\exists h"'] & X \\
& Y' \arrow[ur, hook, "\iota'"'] &
\end{tikzcd}$$

ι' は単射 (closed immersion) なので ι に対し h は一意的であり、よってこのような Y も一意的となる。

Z が reduced のときは Y は reduced である。なぜなら Z が reduced なので $\mathcal{O}_Z(Z)$ が reduced、よって $\mathfrak{N}(\mathcal{O}_Z(Z)) = 0$ であり、

$$\varphi^{-1}(0) = \varphi^{-1}(\mathfrak{N}(\mathcal{O}_Z(Z))) = \varphi^{-1}(\sqrt{0}) = \sqrt{\varphi^{-1}(0)}$$

が成り立つ。従って $\ker\varphi$ は radical ideal なので $Y = \operatorname{Spec} A/\ker\varphi$ は reduced である (Example 3.2.6)。

さらに Z が reduced のときは $\iota(Y) = \overline{f(Z)}$ が成り立つことを示す。まず $f = \iota g$ より

$$\iota(Y) \supseteq f(Z) \Rightarrow \iota(Y) \supseteq \overline{f(Z)}$$

が成り立つ。

次に $\operatorname{sp} Y \subseteq \overline{f(Z)}$ を示す。$Z = \bigcup_i W_i,\ W_i = \operatorname{Spec} B^i$ とすると

$$W_i \to Z \to X$$

より

$$\sigma_i : A \overset{\varphi}{\to} \mathcal{O}_Z(Z) \overset{\rho_i}{\to} \mathcal{O}_Z(W_i) = B^i$$

が存在する。このとき $\overline{f(W_i)} = \overline{f|_{W_i}(V(0))} = V(\sigma_i^{-1}(0))$ なので ([1], Exercise 1.21(iii))

$$\overline{f(Z)} = \overline{f(\bigcup_i W_i)} \supseteq \overline{\bigcup_i f(W_i)} = \bigcup_i \overline{f(W_i)} = \bigcup_i V(\sigma_i^{-1}(0)) \supseteq V(\sigma_i^{-1}(0))$$

である。

ここで $\overline{f(Z)} = V(\mathfrak{b})$ とおくと $V(\mathfrak{b}) \supseteq V(\sigma_i^{-1}(0))$ より

$$\sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\sigma_i^{-1}(0)} = \sigma_i^{-1}(\sqrt{0}) \overset{\%}{=} \sigma_i^{-1}(0) \Rightarrow \sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \bigcap_i \sigma_i^{-1}(0)$$

となる。なお、$\overset{\%}{=}$ は Z が reduced だからである。一方、

$$\operatorname{sp} Y = V(\ker\varphi) = V(\varphi^{-1}(0)) \overset{sheaf}{=} V(\varphi^{-1}((\bigcap_i \rho_i^{-1}(0)))) = V(\bigcap_i \varphi^{-1}\rho_i^{-1}(0)) = V(\bigcap_i \sigma_i^{-1}(0))$$

なので ($\overset{sheaf}{=}$ は Z の sheaf 条件 (3) による)

$$\overline{f(Z)} = V(\sqrt{\mathfrak{b}}) \supseteq V(\bigcap_i \sigma_i^{-1}(0)) = \operatorname{sp} Y$$

が得られる。

X が一般の scheme の場合

$X = \bigcup_i U_i,\ U_i = \operatorname{Spec} A^i,\ V_i = f^{-1}(U_i)$ とする。

$$\varphi_i : A^i \to A^i / \ker \varphi_i \to \mathcal{O}_Z(V_i)$$

$$f|_{V_i} : V_i \overset{g_i}{\to} Y_i = \operatorname{Spec} A^i / \ker \varphi_i \overset{\iota_i}{\to} U_i = \operatorname{Spec} A^i$$

Exercise 2.2.12 を用いて Y を構成する。まず、

$$U_{ij} = \iota_i^{-1}(U_i \cap U_j)$$

とすると

$$\varphi_{ij} = \iota_j^{-1}\iota_i : U_{ij} \to U_{ji}$$

が定義できることを示す。

$$\iota_i(x) \in \operatorname{Spec} A^i \cap \operatorname{Spec} A^j \ \Rightarrow\ \iota_i(x) \in \operatorname{Spec} A^i_{g_i} \approx \operatorname{Spec} A^j_{g_j}$$

とする。ここで、$f : Z \to X$ に対し、$\mathcal{O}_X / \ker f^{\#}$ は sheaf なので、$\operatorname{Spec} A^i_{g_i} \approx \operatorname{Spec} A^j_{g_j}$ から

$$(\mathcal{O}_X / \ker f^{\#})(\operatorname{Spec} A^i_{g_i}) \approx (\mathcal{O}_X / \ker f^{\#})(\operatorname{Spec} A^j_{g_j})$$

$$\Rightarrow\ A^i_{g_i} / \ker \varphi'_i = (A^i / \ker \varphi_i)_{g_i} \approx A^j_{g_j} / \ker \varphi'_j = (A^j / \ker \varphi_j)_{g_j}$$

となる[12]。従って

$$\operatorname{Spec}(A^i / \ker \varphi_i)_{g_i}\ (\approx \operatorname{Spec}(A^j / \ker \varphi_j)_{g_j}\ ) \overset{\iota_i\ (\approx \iota_j)}{\to} \operatorname{Spec} A^i_{g_i}\ (\approx \operatorname{Spec} A^j_{g_j}\ )$$

より Y_i における x の開近傍 $\operatorname{Spec}(A^i / \ker \varphi_i)_{g_i}$ が Y_j の開近傍 $\operatorname{Spec}(A^j / \ker \varphi_j)_{g_j}$ と同型なので $\varphi_{ij} = \iota_j^{-1}\iota_i$ として φ_{ij} が定義できる。

このとき、$\iota_i = \iota_j \varphi_{ji}$ であり $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$ を満たす。また、

$$\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = \iota_j^{-1}\iota_i\iota_i^{-1}(U_i \cap U_j \cap U_k) = \iota_j^{-1}(U_i \cap U_j \cap U_k) = U_{ji} \cap U_{jk}$$

である。$U_{ij} \cap U_{ik}$ において $\varphi_{ik} = \varphi_{jk}\varphi_{ij}$ となるのは明らかである。

従って Exercise 2.2.12 より scheme $Y,\ \psi_i : Y_i \hookrightarrow Y$ が構成でき

$$Y = \bigcup_i \psi_i(Y_i)$$

$$\psi_j = \psi_i \varphi_{ij}$$

$$\psi_i(Y_i) \cap \psi_j(Y_j) = \psi_i(U_{ij})$$

である。

Exercise 2.3.5 の注 8 から Y は閉集合となる。

---

[12] $\ker \varphi_i = \ker f^{\#}(U_i),\ \ker \varphi'_i = \ker f^{\#}(\operatorname{Spec} A^i_{g_i})$

$\iota_i \psi_i^{-1} : \psi_i(Y_i) \to X$ を貼り合わせて ($\iota_i : Y_i \to X$ と見做して)、$\iota : Y \to X$ を定義する。

$$\begin{tikzcd}
U_{ij} \arrow[d, "\psi_i"'] \arrow[drr, "\iota_i"] & & \\
\psi_i(Y_i) \cap \psi_j(Y_j) = \psi_i(U_{ij}) = \psi_j(U_{ji}) & & U_i \cap U_j \\
U_{ji} \arrow[u, "\psi_j"] \arrow[urr, "\iota_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

より、$\iota_i \psi_i^{-1} = \iota_i \varphi_{ij} \psi_j^{-1} = \iota_j \psi_j^{-1}$ なので、

$$\iota : Y \to X$$

$$\iota_i = \iota \psi_i$$

が得られる。ι_i が closed immersion だったので ι も closed immersion である。

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rrrr, bend left, "f"] \arrow[rr, "g"'] & V_i \arrow[l] \arrow[r, "g_i"] & Y_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "\psi_i"'] & U_i \arrow[r] & X \\
& & Y \arrow[urr, "\iota"'] & &
\end{tikzcd} \tag{19}$$

同様にして $\psi_i g_i : V_i \to Y$ を貼り合わせて $g : Z \to Y$ を定義できる。実際、Affine のときの作り方から $f|_{V_i} = \iota_i g_i$ であり、$V_i \cap V_j$ において、

$$\iota_i g_i = f|_{V_i \cap V_j} = \iota_j g_j \Rightarrow \iota \psi_i g_i = \iota \psi_j g_j \Rightarrow \psi_i g_i = \psi_j g_j$$

である。図式 (19) の各区画が可換なので

$$g : Z \to Y$$

$$f = \iota g$$

である。

$Y' \subseteq X$ に対して、$f = \iota' g' : Z \to Y' \to X$ とする。ここでは $\psi_i(X_i)$ が affine

の場合の Y_i に相当する。

$$
\begin{tikzcd}
 & & Y \arrow[rrd, "\iota"] \arrow[dd, bend right, "h"'] & & \\
Z \arrow[rru, "g"] \arrow[rrrr, bend left=60, "f"] \arrow[rrdd, "g'"'] & V_i \arrow[l] \arrow[r, "g_i"] & \psi_i(Y_i) \arrow[u] \arrow[r, "\iota|_{\psi_i(X_i)}"] \arrow[d, "h_i"] & U_i \arrow[r] & X \\
 & & Y'_i \arrow[ru, "\iota'|_{Y'_i}"'] \arrow[d] & & \\
 & & Y' \arrow[rruu, "\iota'"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$Y'_i = Y' \cap U_i$ とおくと、$Y'_i \to U_i$ は closed immersion になるので、affine の場合に示したことから、$\iota|_{\psi_i(Y_i)} = \iota'|_{Y'_i} h_i$ となる $h_i : \psi_i(Y_i) \to Y'_i$ が一意に存在する。このとき、$\psi_i(Y_i) \cap \psi_j(Y_j) = \psi_i(U_{ij}) = \psi_j(U_{ji})$ において

$$(\iota' h_i)|_{\psi_i(U_{ij})} = \iota_{\psi_i(Y_i)\cap\psi_j(Y_j)} = (\iota' h_j)_{\psi_j(U_{ji})} \Rightarrow h_i|_{\psi_i(Y_i)\cap\psi_j(Y_j)} = h_j|_{\psi_i(Y_i)\cap\psi_j(Y_j)}$$

となることから

$$h : Y \to Y',\ \iota = \iota' h$$

となる h が一意に存在する。

この h の一意性から、Y も一意的となる。

Z が reduced のときは、affine の場合に示したことから Y は reduced である (reduced というのは局所的性質)。また、affine の場合 $\overline{f(V_i)} = \operatorname{sp} Y_i$ だったので、位相空間において

$$\overline{f(Z)} = \overline{\bigcup_i f(V_i)} = \bigcup_i \overline{f(V_i)} = \bigcup_i \psi_i(Y_i) = Y$$

となる。$\operatorname{sp} Y = \overline{f(Z)}$ の reduced induced closed subscheme は (c) で示したように一意的なので、Y に等しい。

2.3.12

(a) $\varphi : S \to T$ は次数を保存する全射なので $\varphi(S_+) = T_+$ である。よって

$$U = \{\mathfrak{q} | \mathfrak{q} \not\supseteq \varphi(S_+)\} = \{\mathfrak{q} | \mathfrak{q} \not\supseteq T_+\} = \operatorname{Proj} T$$

となる。

φ が全射のとき f が closed immersion となることは、Exercise 2.2.18(c) と全く同様にして証明できる。

(b) $\varphi : S \to S/I$ は全射なので (a) から

$$f : \operatorname{Proj} S/I \to \operatorname{Proj} S$$

は closed immersion である。$I = \oplus_{d\geq 0} I_d$ に対して $I' = \oplus_{d\geq d_0} I_d$ とすると、同様に $f' : \operatorname{Proj} S/I' \to \operatorname{Proj} S$ も closed immersion である。

Exercise 2.2.14(c) より $\operatorname{Proj} S/I \xrightarrow{\sim} \operatorname{Proj} S/I'$ は isomorphism なので、f, f' は同一の (equivalent な)closed subscheme を与える。

2.3.13

(a) $f : Y \to X$ を closed immersion、$U = \operatorname{Spec} A \subseteq X$ を任意の open affine とすると、$f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ は closed immersion である。実際 $f^{-1}(U) = U \cap Y$ は U の閉集合であり、$f^{\#}$ の全射性は stalk を用いて局所的に示せるからである。

従って、Exercise 2.3.11(b) より

$$f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$$

とおける。このとき $A \to A/\mathfrak{a}$ において、$A/\mathfrak{a}$ は有限生成 A-module なので f は finite type である。

(b) Exercise 2.3.3(a) から $f : Y \to X$ が locally of finite type であることを示せばよい。

Y は open なので X の open affine $V = \operatorname{Spec} A$ に対し $f^{-1}(V) = V \cap Y$ は X で open である。従って、$f^{-1}(V) = \bigcup_i D(g_i) = \bigcup_i \operatorname{Spec} A_{g_i},\ g_i \in A$ とかける。すると $A_{g_i} = A[1/g_i]$ から A_{g_i} は有限生成 A-代数なので、$A \to A_{g_i}$ は locally of finite type である。

(c) Finite type f, g の合成を

$$h = gf : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

とする。Exercise 2.3.3(b) より $Z = \operatorname{Spec} C$ としてよい。g が finite type なので

$$Y = g^{-1}(Z) = \bigcup_{i\in I} Y_i,\ Y_i = \operatorname{Spec} B_i,\ |I| < \infty,\ B_i = C[b_i^1, \cdots, b_i^n]$$

となり、f も finite type なので

$$f^{-1}(Y_i) = \bigcup_{j\in J_i} X_{ij},\ X_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij},\ |J_i| < \infty,\ A_{ij} = B_i[a_{ij}^1, \cdots, a_{ij}^m]$$

となる。従って、

$$h^{-1}(Z) = f^{-1}g^{-1}(Z) = \bigcup_i f^{-1}(Y_i) = \bigcup_{i,j} X_{ij},\ X_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij}$$

となり、(i,j) は有限個である。

$$A_{ij}=B_i[a_{ij}^1,\cdots,a_{ij}^m]=C[b_i^1,\cdots,b_i^n][a_{ij}^1,\cdots,a_{ij}^m]=C[b_i^1,\cdots,b_i^n,a_{ij}^1,\cdots,a_{ij}^m]$$

から、A_{ij} は有限生成 C 代数となる。

以上により $h=gf$ は finite type であることが示された。

(d) $f:X\to Y$ を finite type, $S'\to S$ を scheme morphism とする。

$$\begin{tikzcd}
 & X'=X\times_S S' \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2=f'"] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & S' \arrow[dl, "g"] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

$$S=\bigcup_\lambda S_\lambda,\ S_\lambda=\operatorname{Spec}B_\lambda$$

$$f^{-1}(S_\lambda)=\bigcup_{i\in I}U_{\lambda i},\ U_{\lambda i}=\operatorname{Spec}A_{\lambda i},\ |I|<\infty$$

において、$A_{\lambda i}$ は有限生成 B_λ-代数とする。

$g^{-1}(S_\lambda)$ は open subscheme だから $g^{-1}(S_\lambda)=\bigcup_\mu W_{\lambda\mu},\ W_{\lambda\mu}=\operatorname{Spec}C_{\lambda\mu}$ とかけ、$S'=g^{-1}(S)=\bigcup_{\lambda\mu}W_{\lambda\mu}$ となる。

$$f'^{-1}(W_{\lambda\mu})=X\times_S W_{\lambda\mu}\overset{\#}{=}f^{-1}(S_\lambda)\times_{S_\lambda}W_{\lambda\mu}=\bigcup_{i\in I}U_{\lambda i}\times_{S_\lambda}W_{\lambda\mu}=\bigcup_{i\in I}\operatorname{Spec}(A_{\lambda i}\otimes_{B_\lambda}C_{\lambda\mu})$$

より、$f'^{-1}(W_{\lambda\mu})$ は有限個の open affine でカバーされる。等号 $(\overset{\#}{=})$ は Theorem 3.3 の証明の Step 7 による。

一方、$A_{\lambda i}$ は有限生成 B_λ-代数なので $A_{\lambda i}=B_\lambda[a_1,\cdots,a_n],\ a_j\in A_{\lambda i}$ と表せる。$C_{\lambda\mu}$ は B_λ-代数なのでスカラーの拡大より $A_{\lambda i}\otimes_{B_\lambda}C_{\lambda\mu}$ は $C_{\lambda\mu}$-代数である。従って

$$A_{\lambda i}\otimes_{B_\lambda}C_{\lambda\mu}=C_{\lambda\mu}[a_1\otimes_{B_\lambda}1,\cdots,a_n\otimes_{B_\lambda}1]$$

となり、有限生成 $C_{\lambda\mu}$-代数である。

(e) $f:X\to S$ が finite type なので (d) より $f':X\times_S Y\to Y$ は finite type であり、$g:Y\to S$ が finite type なので (c) より合成 $gf':X\times_S Y\to Y\to S$ も finite type である。

(f) f は quasi-compact なので、Exercise 2.3.3(a) より f が locally of finite type であることを示せばよい。Exercise 2.3.1 から $Z=\operatorname{Spec}C$ とできる。

$$g^{-1}(Z)=\bigcup_i Y_i,\ Y_i=\operatorname{Spec}B_i,\ f^{-1}(Y_i)=\bigcup_j X_{ij},\ X_{ij}=\operatorname{Spec}A_{ij}$$

とすると、B_i は C 代数であり、A_{ij} は B_i 代数である。

$$(gf)^{-1}(Z) = \bigcup_i f^{-1}(Y_i) = \bigcup_{i,j} X_{ij}$$

において、gf が finite type なので Exercise 2.3.3(c) より A_{ij} は有限生成 C 代数である。B_i は C 代数なので、当然 A_{ij} は有限生成 B_i 代数となる。従って、f は locally of finite type である。

(g) $f : X \to Y$ において、Y は noetherian ゆえ

$$Y = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Spec} B_i, |I| < \infty,\ B_i :\ \text{noetherian}$$

であり、f が finite type なので

$$f^{-1}(\operatorname{Spec} B_i) = \bigcup_{j \in J_i} \operatorname{Spec} A_{ij}, |J_i| < \infty,\ A_{ij} :\ \text{finitely generated } B_i\text{-algebra}$$

である。このとき B_i が noetherian なので、[1], Corollary 7.7 から A_{ij} も noetherian である。すると、

$$X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\operatorname{Spec} B_i) = \bigcup_{i \in I, j \in J_i} \operatorname{Spec} A_{ij},\ A_{ij} :\ \text{noetherian},\ \sum_{i \in I} |J_i| < \infty$$

より、X は noetherian である。

2.3.14

Finite type morphism f を

$$f : X \to \operatorname{Spec} k,\ X = \bigcup_i U_i,\ U_i = \operatorname{Spec} A^i,\ A^i :\ \text{finitely generated } k\text{-algebra}$$

とする[13]。$\operatorname{Spec} A^i$ の開基 $D(g) = \operatorname{Spec} A^i_g,\ g \in A^i$ に対し、A^i が有限生成 k-代数なので A^i_g も有限生成 k-代数である。

X の任意の開集合 V には X の閉点が存在することを示す。$x \in V$ を V の閉点とする。V は $D(g)$ としてよいので $V = \operatorname{Spec} B$ とできる。

V の閉点を x とし、$x \in U_i$ となる任意の U_i を取ると、

$$x \in W := \operatorname{Spec} A^i_g \approx \operatorname{Spec} B_h \subseteq V \cap U_i \subseteq U_i,\ g \in A^i, h \in B$$

とでき、A^i_g は有限生成 k-代数である。x は V の閉点なので W $(\subseteq V)$ の閉点でもある。

$W \overset{\iota}{\subseteq} U_i$ に対応して $\varphi : A^i \to A^i_g$ とすると、x は $W = \operatorname{Spec} A^i_g$ の閉点なので A^i_g の max ideal $\mathfrak{m}$ に対応している。このとき、次の性質 6 から $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ は A^i の max ideal であり、対応して $\iota(x) = x \in U_i$ は U_i の閉点である。

[13] f は locally of finite type でも成立するので、ここではその証明を与える。

性質 **6.** 有限生成 k-代数 A, B と morphism $\psi : A \to B$ において、$\mathfrak{m}$ が B の max ideal なら $\psi^{-1}(\mathfrak{m})$ は A の max ideal である。

(証明) $K = B/\mathfrak{m}, L = A/\psi^{-1}(\mathfrak{m})$ とおくと K は体、L は整域である。このとき

$$\psi' : L \to K,\ \tilde{x} \mapsto \widetilde{\psi(x)}$$

は単射である。実際

$$\widetilde{\psi(x)} = 0 \Leftrightarrow \psi(x) \in \mathfrak{m} \Leftrightarrow x \in \psi^{-1}(\mathfrak{m}) \Leftrightarrow \tilde{x} = 0$$

である。

B は有限生成 k-代数ゆえ、体 $K = B/\mathfrak{m}$ も有限生成 k-代数であり、K は k の有限次代数拡大体となる ([1], Corollary 5.24)。よって K の元は k 上モニック多項式の根であり、L は k 代数なので K は L 上整となる。すると L は体 ([1], Proposition 5.7)、$\psi^{-1}(\mathfrak{m})$ は max ideal となる。(証明終)

以上により V の閉点 x は $x \in U_i$ となる全ての U_i において閉点となる。すると、U_i は開集合なので、x の U_i における補集合 $\{x\}^c \cap U_i$ はそれ自身 X の開集合であり、$\{x\}^c \cap U_i = V_i$ とかける。x を含まない U_j においては $\{x\}^c \cap U_j = U_j$ が成り立つ。これら全ての和集合をとると

$$\{x\}^c = \bigcup_i V_i \cup \bigcup_j U_j$$

は開集合である。よって、x は X においても閉集合、すなわち閉点である。従って、V には X の閉点が存在する。

反例は Example 2.3.2 に述べられている。すなわち discrete valuation ring R に対する $T = \operatorname{Spec} R = \{t_0, t_1\}$ において、閉点集合は t_0 のみなので、t_1 は開集合であるが閉点を含まない。

2.3.15

(a) (i) → (iii) → (ii) → (i) を示す。ここで (iii) → (ii) は自明である。

(i) → (iii): $X_{\overline{k}}$ が既約、$k \subseteq K$ とする。

まず、k は代数的閉体としてよいことを示す。$\operatorname{Spec} \overline{K} \to \operatorname{Spec} K$ が全射なので、次の性質 7 から $X_{\overline{K}} \to X_K$ も全射となり[14]、もし $X_{\overline{K}}$ が既約であることを示せれば X_K も既約となる[15]。さらに $f : X \to \operatorname{Spec} k$ が finite type ならば $\overline{f} : X_{\overline{k}} \to \operatorname{Spec} \overline{k}$ も finite type である (Exercise 2.3.13(d))。

つまり、finite type $\overline{f} : X_{\overline{k}} \to \operatorname{Spec} \overline{k}$ において、$X_{\overline{k}}$: 既約のとき、$\forall K/\overline{k}$ に対し X_K: 既約を示せばよいことになる。よって k は代数的閉体とする。

[14] Surjective scheme morphism は位相空間上で全射をいう (Stacks Project 29.9.1)。

[15] $f : X \twoheadrightarrow Y,\ Y = V_1 \cup V_2 \Rightarrow X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) \overset{X:\text{irreducible}}{\Longrightarrow} f^{-1}(V_i) = X \Rightarrow V_i = Y$

性質 **7.** (全射性は base change で保存)

$f : X \to Y$ が全射なら morphism $Y' \to Y$ に対し $X \times_Y Y' \to Y'$ も全射である。

(証明) $g : Y' \to Y,\ y' \mapsto y$ に対し、f が全射なので $f(x) = y = g(y')$ となる $x \in X$ が存在する。このとき、Exercise 2.2.7 から

$$\operatorname{Spec} k(x) \to X \to Y \ \Rightarrow\ k(y) \hookrightarrow k(x) \ \Rightarrow\ \operatorname{Spec} k(x) \to \operatorname{Spec} k(y)$$

となる。同様にして $\operatorname{Spec} k(y') \to Y',\ \operatorname{Spec} k(y') \to \operatorname{Spec} k(y)$ となるので

$$\operatorname{Spec} k(x) \times_{\operatorname{Spec} k(y)} \operatorname{Spec} k(y') = \operatorname{Spec}\left(k(x) \otimes_{k(y)} k(y')\right)$$

が得られる。Fibred product の普遍的性質から

$$\theta : \operatorname{Spec}\left(k(x) \otimes_{k(y)} k(y')\right) \to X \times_Y Y'$$

が存在する。

$$\begin{tikzcd}
 & & X \times_Y Y' \arrow[lld] \arrow[rrd, "f'"] & & \\
x \in X \arrow[rrdd, "f"'] & \operatorname{Spec} k(x) \arrow[l] \arrow[rd] & \operatorname{Spec}\left(k(x) \otimes_{k(y)} k(y')\right) \arrow[l] \arrow[u, "\theta"'] \arrow[r, "\sigma"'] & \operatorname{Spec} k(y') \arrow[r, "\rho"'] \arrow[ld] & Y' \ni y' \arrow[lldd, "g"] \\
 & & \operatorname{Spec} k(y) \arrow[d] & & \\
 & & Y \ni y & &
\end{tikzcd}$$

$k(y) \hookrightarrow k(x)$ から $k(x)$ は $k(y)$-加群なので、$k(y)$-flat であり[16]、従って、$0 \neq k(y') = k(y) \otimes_{k(y)} k(y') \hookrightarrow k(x) \otimes_{k(y)} k(y')$ から $\operatorname{Spec}\left(k(x) \otimes_{k(y)} k(y')\right) \neq \varnothing$ である。

上図式の可換性から、$z \in \operatorname{Spec}\left(k(x) \otimes_{k(y)} k(y')\right)$ とすると

$$f'\theta(z) = \rho\sigma(z) = y'$$

であり、f' は全射となる。(証明終)

次に X は affine としてよいことを示す。そのために、次の性質 8 を用いる。

性質 **8.**

X : irreducible $\Leftrightarrow$ $X = \bigcup_i U_i,\ U_i$: open and irreducible, $U_i \cap U_j \neq \varnothing,\ \forall i, j$

[16] $k' = k(y)$ は k'-flat、k'-module はベクトル空間 (自由加群) なので k'-flat である ([1], Exercise 2.4)。

(証明) ($\Rightarrow$) X を irreducible scheme とすると、open covering U_i が存在し、それは既約で、$U_i \cap U_j \neq \varnothing$ である。

($\Leftarrow$) $X = Z_1 \cup Z_2,\ Z_i$: closed とする。$U_i = U_i \cap X = (U_i \cap Z_1) \cup (U_i \cap Z_2)$: 既約より、$U_i = Z_1 \cap U_i \ \Rightarrow\ U_i \subseteq Z_1$ とできる。任意の j に対し U_j は既約なので、$\varnothing \neq U_i \cap U_j \subseteq Z_1 \cap U_j$ から

$$U_j = \overline{U_i \cap U_j}^{U_j} \subseteq Z_1 \cap U_j$$

が得られる。すると $U_j \subseteq Z_1 \ \Rightarrow\ X \subseteq Z_1$ から X は既約となる。なお、U_i は affine に限ってもよい。(証明終)

X が既約なので

$$X = \bigcup_i U^i,\ U^i = \operatorname{Spec} A^i,\ U^i : \text{irreducible},\ U^i \cap U^j \neq \varnothing$$

とできる。$p : X_K \to X,\ U^i_K = U^i \times_k K$ とおくと $U^i \times_k K = p^{-1}(U^i)$ から U^i_K は open であり、

$$X_K = p^{-1}(X) = p^{-1}(\bigcup_i U^i) = \bigcup_i U^i_K$$

となる。

$$x \in U^i \cap U^j \ \Rightarrow\ x \in \operatorname{Spec} A^i_{f_i} \approx \operatorname{Spec} A^j_{f_j},\ A^i_{f_i} \approx A^j_{f_j}$$

$$\Rightarrow\ A^i_{f_i} \otimes_k K \approx A^j_{f_j} \otimes_k K \ \Rightarrow\ \operatorname{Spec} A^i_{f_i} \times_k K \approx \operatorname{Spec} A^j_{f_j} \times_k K$$

ここで、$U^i \cap U^j \neq \varnothing$ から $A^i \neq 0$ であり、k 加群 $A^i_{f_i}$ は flat なので $0 \neq A^i_{f_i} = A^i_{f_i} \otimes_k k \hookrightarrow A^i_{f_i} \otimes_k K$ より $A^i_{f_i} \otimes_k K \neq 0$ となる。

すると $\varnothing \neq \operatorname{Spec} A^i_{f_i} \times_k K \subseteq \operatorname{Spec} A^i \times_k K =: U^i_K$ より[17] $U^i_K \cap U^j_K \neq \varnothing$ である。従って、U^i_K: 既約を証明できれば X_K: 既約となるので、改めて U^i を X とする (affine)。

$X = \operatorname{Spec} A$ とする。X の既約性は位相空間における既約性なので、Exercise 2.2.3(b) より X は reduced としてよく、よって X は integral scheme、A は整域となる。

このとき X_K が integral、即ち $A_K = A \otimes_k K$ が整域であることを示すために、仮に A_K に非零零因子

$$a = \sum_i a'_i \otimes_k a''_i \neq 0,\ b = \sum_i b'_i \otimes_k b''_i \neq 0,\ ab = 0$$

が存在したとする。すると、K において $\{a''_i\}_i, \{b''_i\}_i$ から生成される有限生成 k-代数 (整域)B を取ることができる。すると k 加群 A は flat なので $A \otimes_k B \hookrightarrow A \otimes_k K$ は単射となる ([1], Proposition 2.19)、

[17] $X \times Y,\ U \subseteq X \ \Rightarrow\ U \times Y = p^{-1}(U) \subseteq X \times Y$

従って a,b を含む $A\otimes_k B$ は $A\otimes_k K$ の部分環とみられるので、a,b は $A\otimes_k B$ の非零零因子となる。

k 上ベクトル空間 A の基底を $\{e_i\}_i$ とする[18]。このとき、$\{e_i\otimes_k 1\}_i$ は B-加群 $A\otimes_k B$ の基底となる。
$(\because)$

$$\delta_i : A \to k, e_j \mapsto \begin{cases} 1 & ; j = i \\ 0 & ; j \neq i \end{cases}$$

とすると、

$$\psi_i : A \times B \to B,\ (a,b) \mapsto \delta_i(a)b$$

は双線形なので、tensor の普遍的性質から

$$\tilde{\psi}_i : A\otimes_k B \to B,\ a\otimes_k b \mapsto \delta_i(a)b$$

が存在する。

$$A\otimes_k B \ni \sum_i a_i\otimes b_i = \sum_i(\sum_j k_{ij}e_j)\otimes b_i = \sum_j(\sum_i k_{ij}b_i)(e_j\otimes_k 1),\ \sum_i k_{ij}b_i \in B$$

から $A\otimes_k B$ は $\{e_i\otimes_k 1\}_i$ で生成される。

次に $\sum_j b_j(e_j\otimes_k 1) = 0$ とする。このとき $b_j(e_j\otimes_k 1) = e_j\otimes_k b_j$ なので、

$$0 = \tilde{\psi}_i(\sum_j b_j(e_j\otimes_k 1)) = \tilde{\psi}_i(\sum_j(e_j\otimes_k b_j)) = \sum_j \tilde{\psi}_i(e_j\otimes_k b_j) = \sum_j \delta_i(e_j)b_j = b_i$$

より、$\{e_i\otimes_k 1\}_i$ は基底をなす。($(\because)$ 終)

さて、零因子の基底表現を

$$a = \sum_j a_j(e_j\otimes_k 1) \neq 0, b = \sum_j b_j(e_j\otimes_k 1) \neq 0,\ a_j, b_j \in B$$

としたとき、ある a_i, b_j は非零なので $a_ib_j \neq 0$ となる (B は整域)。

このとき、$a_ib_j \notin \exists\mathfrak{m}$ となる B の極大 ideal $\mathfrak{m}$ が存在する。なぜなら、B は有限生成 k-代数ゆえ Jacobson 環なので ([1], Exercise 5.24)、もし a_ib_j が全ての極大 ideal に属すと Jacobson 根基 $= \sqrt{0}$ に属すので、$(a_ib_j)^n = 0 \Rightarrow a_ib_j = 0$ となり、仮定に反する。

よって $a_ib_j \notin \mathfrak{m}$ となる B の極大 ideal $\mathfrak{m}$ が存在する。k が代数的閉体[19] なので $B/\mathfrak{m} = k$ であり ([1], Corollary 7.10)、$A\otimes_k B/\mathfrak{m} = A\otimes_k k = A$ となる。

よって $\varphi_\mathfrak{m} : B \to B/\mathfrak{m} = k$ を標準的全射とすると、環準同型

$$\varphi = 1\otimes_k \varphi_\mathfrak{m} : A\otimes_k B \to A$$

---

[18] ベクトル空間 V には基底 $\{e_i\}_i$ が存在し (有限とは限らない)、任意の元は $\sum_i a_ie_i,\ a_i \in k$ とかける。ここで $a_i \neq 0$ となる i は有限個である ([3], 6 章定理 2)。

[19] 代数的閉包 K/k の定義は、代数的拡大かつ K が代数的閉体。

$$\sum_i x_i(e_i \otimes_k 1) = \sum_i e_i \otimes_k x_i \mapsto \sum_i e_i \otimes_k \varphi_{\mathfrak{m}}(x_i) = \sum_i \varphi_{\mathfrak{m}}(x_i) e_i$$

が定義できる。

$$a_i b_j \notin \mathfrak{m} \Rightarrow \varphi_{\mathfrak{m}}(a_i)\varphi_{\mathfrak{m}}(b_j) \neq 0 \Rightarrow \varphi_{\mathfrak{m}}(a_i) \neq 0, \varphi_{\mathfrak{m}}(b_j) \neq 0$$

$$\Rightarrow \varphi(a) = \sum_i \varphi_{\mathfrak{m}}(a_i)e_i \neq 0, \varphi(b) \neq 0,\ \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = 0$$

より A に非零零因子が存在してしまい、A の整域性に反する。

(ii) → (i): 標数が 0 のときは $\overline{k} = k_s$ ゆえ (ii) → (i) は成立するので、標数 $p \neq 0$ とする。

k の代数的閉包 $\overline{k}$ は一意的であり、分離閉包 k_s の純非分離拡大体になっている ([4], 系 2.5.3)。

$X \to k$ が finite type なので Exercise 2.3.13(d) より $X_{k_s} \to k_s$ も finite type で、$X_{\overline{k}} = (X_{k_s})_{\overline{k}}$ である。よって $k \Leftarrow k_s,\ X \Leftarrow X_{k_s}, K := \overline{k}$ として、K/k が純非分離代数拡大で X が既約のとき X_K が既約であることを示せばよい。

さらに X が affine integral scheme としてよいのは、(i) → (iii) で示した通りであり、結局 $A_K = A \otimes_k K$ が整域であることを言えばよいことになる。

A_K に非零零因子があったとすると、(i) → (iii) と同様に有限生成 k-代数 (整域)$B \subseteq K$ が存在し、$A_B = A \otimes_k B$ において非零零因子 $xy = 0,\ x \neq 0, y \neq 0$ が存在する。

$B = k[z_1, \cdots, z_n],\ z_i \in K$ とする。このとき $z_i^{q_i} \in k,\ q_i = p^{m_i}$ となる自然数 m_i が存在するので ([4], 系 2.5.3)、$q = \max\{q_1, \cdots, q_n\}$ とすると

$$\chi_q : B \to k,\ b \mapsto b^q$$

が定義できる。これはフロベニウス写像の制限なので単射である。すると、環準同型

$$\mu_q = 1 \otimes_k \chi_q : A_B \to A$$

も定義でき、A が既に述べたように flat k-module なので、やはり単射である。よって、

$$ab = 0,\ a \neq 0, b \neq 0 \in A_K \Rightarrow 0 = \mu_q(ab) = \mu_q(a)\mu_q(b),\ \mu_q(a) \neq 0, \mu_q(b) \neq 0$$

となり、A の整域性に反する。

(b) (a) と同様、(i) → (iii) → (ii) → (i) を示す。ここでも (iii) → (ii) は自明である。

(i) → (iii): 一般に、L/K に対し、X_L : reduced $\Rightarrow$ X_K : reduced である。

($\because$) k-代数 A は flat ゆえ、$K \hookrightarrow L$ のとき $A \otimes_k K \hookrightarrow A \otimes_k L$ が単射なので、$\mathfrak{N}(A \otimes_k L) = 0 \Rightarrow \mathfrak{N}(A \otimes_k K) = 0$ となる。被約性が局所的に定義されていることから

$$X_L : \text{reduced} \Rightarrow X_K : \text{reduced},\ K \subseteq L$$

である。(∵終)

これを用いて (a) と同様にして (i) → (iii) を示す。k を代数的閉体とできること、X を affine とできることは (a) と全く同じである。

$K/k,\ X = \operatorname{Spec} A,\ \mathfrak{N}(A) = 0$ とし、X_K に非零冪零元

$$a^n = 0,\ a = \sum_i a'_i \otimes_k a''_i \neq 0,\ a'_i \in A, a''_i \in K$$

が存在したとする。K において $\{a''_i\}_i$ から生成される有限生成 k-代数 (整域)B を取ることができ、$A \otimes_k B$ においても $a^n = 0,\ a \neq 0$ となって、非零冪零元となる。

(a) の場合同様、ベクトル空間 A の基底を $\{e_i\}_i$ とし、$a = \sum_i a_i(e_i \otimes_k 1),\ a_i \in B$ とすると、$\exists a_i \neq 0,\ a_i \notin \exists \mathfrak{m} \subseteq B$ なので、標準的全射 $\varphi_\mathfrak{m} : B \to B/\mathfrak{m} = k$ に対し $\varphi_\mathfrak{m}(a_i) \neq 0$ である。

$$\varphi = 1 \otimes_k \varphi_\mathfrak{m} : A \otimes_k B \to A,\ \sum_i x_i(e_i \otimes_k 1) = \sum_i \varphi_\mathfrak{m}(x_i)e_i$$

とすると、$a^n = 0 \Rightarrow 0 = \varphi(a)^n$ より $\varphi(a) = \sum_i \varphi_\mathfrak{m}(x_i)e_i$ は A の冪零元となるが、$\varphi_\mathfrak{m}(a_i) \neq 0$ より非零冪零元なので、A は reduced でなくなる。

(ii) → (i): k の代数的閉包 $\overline{k}$ は完全閉包 k_p の分離拡大体である[20]。$X \to \operatorname{Spec} k$ が finite type なので Exercise 2.3.13(d) より $X_{k_p} \to \operatorname{Spec} k_p$ も finite type で、$X_{\overline{k}} = (X_{k_p})_{\overline{k}}$ である。よって、$k \Leftarrow k_p,\ X \Leftarrow X_{k_p}, K := \overline{k}$ として、K/k が分離代数拡大で X が reduced のとき、X_K が reduced であることを示せばよい。

さらに $X = \operatorname{Spec} A$ と affine としてよいのは、(i) → (iii) で示した通りであり、結局 A が reduced のとき $A \otimes_k K$ が reduced であることを言えばよいことになる。

A は整域、さらにその商体としてよいことを示す。前提から A は有限生成 k-代数なのでネーター環であり ([1], Corollary 7.7)、その極小素イデアルは有限個である ([1], Exercise 6.9)。全ての極小素イデアルを $\{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\}$ とすると、標準的全射を $\varphi_i : A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{p}_i$ として

$$A \to \prod_i A/\mathfrak{p}_i,\ a \mapsto (\varphi_1(a), \cdots, \varphi_n(a))$$

が定義できるが、これは単射である。

$$(\because)\ a \in \forall \mathfrak{p}_i \Rightarrow a \in \bigcap_i \mathfrak{p}_i = \bigcap \mathfrak{p} = \mathfrak{N}(A) = 0 \Rightarrow a = 0$$

K/k は flat なので

$$A \otimes_k K \hookrightarrow (\prod_i A/\mathfrak{p}_i) \otimes_k K \overset{\text{dt}}{\approx} \prod_i (A/\mathfrak{p}_i \otimes_k K)$$

が成立する。ここで $(\overset{\text{dt}}{\approx})$ が成立するのは、次の性質 9 による。

[20] k_p の元は k の元の p^n 乗根なので代数的。完全閉包は完全体、完全体の定義 ([4], p. 54) から完全体の代数拡大体は分離拡大。

性質 9. $(\prod_{i\in I} A_i)\otimes_k B \approx \prod_{i\in I}(A_i\otimes_k B),\ |I|<\infty$

(証明)

$$(\prod_i A_i)\times B \to \prod_i (A_i\otimes_k B),\ (\prod_i a_i, b)\mapsto \prod_i (a_i\otimes_k b)$$

が双線形性写像なので、tensor の universal property から、

$$\exists! g : (\prod_i A_i)\otimes_k B \to \prod_i (A_i\otimes_k B),\ (\prod_i a_i)\otimes_k b \mapsto \prod_i (a_i\otimes_k b)$$

が存在する。

次に $A_i \hookrightarrow \prod_i A_i$ から得られる双線形性写像 $A_i\times B\to \prod_i A_i\otimes_k B$ より

$$\exists! h_i : A_i\otimes_k B \to (\prod_i A_i)\otimes_k B,\ a_i\otimes_k b\mapsto (0,\cdots,0,a_i,0,\cdots,0)\otimes_k b$$

が存在し、

$$h:\prod_i (A_i\otimes_k B)\to(\prod_i A_i)\otimes_k B,\ \prod_i (a_i\otimes_k b)\mapsto \sum_i h_i(a_i\otimes_k b) = (\prod_i a_i)\otimes_k b$$

が得られる。

このとき、$hg = \mathrm{id}_{(\prod_i A_i)\otimes_k B},\ gh = \mathrm{id}_{\prod_i (A_i\otimes_k B)}$ なので、$(\prod_i A_i)\otimes_k B \approx \prod_i (A_i\otimes_k B)$ である。(証明終)

以上により $\prod_i (A/\mathfrak{p}_i\otimes_k K)$ が reduced なことを示せば $A\otimes_k K$ も reduced になる。$\prod_i (A/\mathfrak{p}_i\otimes_k K)$ が reduced であることは、全ての $A/\mathfrak{p}_i\otimes_k K$ が reduced と等価なので、$A/\mathfrak{p}_i\otimes_k K$ の reducedness を言えばよいことになる。$A/\mathfrak{p}_i$ は有限生成 k-代数 (よって flat) でかつ整域なので、$A/\mathfrak{p}_i$ を A とすると整域となる。

さらに $A\otimes_k K\hookrightarrow \mathrm{Frac}\,(A)\otimes_k K$ より、$\mathrm{Frac}\,(A)\otimes_k K$ が reduced なことを言えばよく、よって A は体としてよい。

A_K に非零冪零元が存在したとすると、(i) → (iii) と同様に有限生成 k-代数 (整域)$B\subseteq K$ が存在し、$A_B = A\otimes_k B$ において非零冪零元が存在する。すると $A\otimes_k B\hookrightarrow A\otimes_k \mathrm{Frac}\,(B)$ より $A\otimes_k \mathrm{Frac}\,(B)$ にも非零冪零元が存在することになる。

K/k は分離代数拡大なので $L=\mathrm{Frac}\,(B)$ は有限分離代数拡大、よって単純拡大で ([4], 定理 2.5.2)、$L=k(\alpha)=k[X]/(f),\ \alpha\in L$ と書ける。ここで、f は α の最小多項式で分離的である。

$$A\otimes_k L = A\otimes_k k[X]/(f) = A[X]/(f)$$

において、f は $A[X]$ でも分離多項式なので $f=f_1\cdots f_m$ と既約分解すると各々は分離既約多項式である。

$$A[X]/(f) \overset{(\mathrm{crt})}{\hookrightarrow} \prod_i A[X]/(f_i)$$

において、各 $A[X]/(f_i)$ は reduced(整域) なので $A[X]/(f)$、ひいては $A \otimes_k L$ も reduced となり、非零冪零元が存在することに矛盾する。よって A_K は reduced である。

(crt) が成立する理由: 標準的全射を $\varphi : A[X] \twoheadrightarrow A[X]/(f),\ \varphi_i : A[X] \twoheadrightarrow A[X]/(f_i)$ とすると $g \in (f) \leftrightarrow f|g \leftrightarrow f_i|g \leftrightarrow g \in (f_i)$ なので

$$A[X]/(f) \hookrightarrow \prod_i A[X]/(f_i),\ \varphi(g) \mapsto (\varphi_1(g), \cdots, \varphi_m(g))$$

が成り立つ。

(c) F_p を標数 $p > 1$ の素体とする。

$$k = F_p(t),\ K = k[x]/(x^p - t) = F_p(\alpha),\ \alpha = t^{1/p}$$

に対し $X = \operatorname{Spec} K$ は当然に integral scheme である。

$X_K = \operatorname{Spec}(K \otimes_k K)$ が irreducible でも reduced でもないことを示す。K 上で $x^p - t = \prod_j f_j$ と既約分解すると

$$K \otimes_k K = k[x]/(x^p - t) \otimes_k K = K[x]/(x^p - t) = F_p(\alpha)[x]/(x^p - t) = \prod_{j \in J} K[x]/(f_j)$$

において、f_j の一つは $x - \alpha$ ゆえ $|J| > 1$ なので、

$$X_K = \coprod_{j \in J} \operatorname{Spec} K[x]/(f_j)$$

より、X_K は irreducible ではなくなる。

また、

$$\beta = \alpha \otimes_k 1 - 1 \otimes_k \alpha \in K \otimes_k K$$

とすると

$$\beta^p = (\alpha \otimes_k 1 - 1 \otimes_k \alpha)^p = t \otimes_k 1 - 1 \otimes_k t = t - t = 0$$

より β は冪零元である。しかし $\alpha \notin k$ なので β は零ではない。

($\because$) $\beta = 0$ とする。k-ベクトル空間 K の基底を $\{e_i\}_i$ とし ($e_0 = 1$ とおける)、$\alpha = \sum_i b_i e_i \in V,\ b_i \in k$ すると、

$$\alpha \otimes_k 1 - 1 \otimes_k \alpha = \sum_i b_i(e_i \otimes_k e_0) - \sum_j b_j(e_0 \otimes_k e_j)$$

において、$\{e_i \otimes e_j\}_{i,j}$ は $K \otimes_k K$ の基底となるので ([3], 6 章定理 12 系)、$b_i = 0, i \neq 0$、よって $\alpha = b_0 e_0 = b_0 \in k$ となる。(($\because$) 終)

以上により X_K は reduced でない。従って X は integral であるが、geometrically irreducible でも geometrically reduced でもない。

2.3.16

性質 $\mathscr{P}$ を満たさない X の部分閉集合の全体

$$\Sigma = \{Y | \mathscr{P} \text{ does not hold for } Y\}$$

が空集合であることを示す。

もし空集合でないとすると、X は noetherian なので Σ に極小閉集合 $\tilde{Y}$ が存在し、その真閉部分集合 $\forall Z \subsetneq \tilde{Y}$ は $\mathscr{P}$ を満たす。すると、仮定から $\tilde{Y}$ も $\mathscr{P}$ を満たすことになり、矛盾をきたす。よって、$\Sigma = \varnothing$、すなわち X(および $\varnothing$) は $\mathscr{P}$ を満たす。

2.3.17

(a) X は scheme なので Exercise 2.2.9 より既約成分は一意的な generic point を持つ。$\operatorname{sp} X$ は noetherian でもあるので Zariski space である。

(b) Zariski space X の非空極小閉集合を Y とする。$y \in Y$ とすると $\{y\}^- \subseteq Y$ となるが、Y は極小閉集合なので $\{y\}^- = Y$ を得る。$\{y\}^- = Y$ は既約なので[21]、Y は一意的な generic point y_0 を持ち、$y = y_0$ である。よって、$Y = \{y_0\}$ となる。

(c) もし $U \ni x \Rightarrow U \ni y,\ V \ni y \Rightarrow V \ni x$ となる $x, y \in X$ が存在したとする。すると $\{y\}^- \ni x,\ \{x\}^- \ni y \Rightarrow \{x\}^- = \{y\}^-$ となるが、既約閉集合 $\{x\}^-$ の generic point の一意性から $x = y$ である。

(d) $X = \{x\}^-$ とし、その非空開部分集合を U とする。

$$\text{If } x \notin U \Rightarrow x \in U^c \Rightarrow X = \{x\}^- \subseteq U^c \Rightarrow U = \varnothing$$

より $x \in U$ である。

(e) 定義から

$$x_1 > x_0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{x_1\}^- \ni x_0 \Leftrightarrow \{x_1\}^- \supseteq \{x_0\}^-$$

なので、反射律、推移律は成立する。また、generic point の一意性から反対称律も成り立つ。よって “>” は半順序関係である (等号を含んでいる)。

x_1 が極小元とすると

$$\{x_1\}^- \ni x_0 \Rightarrow x_1 > x_0$$

より $x_1 = x_0$ が得られ、x_1 は closed point となる。

x が極大元とし、それを含む既約成分を $Y = \{y\}^-$ とする。すると $\{x\}^- \subseteq \{y\}^- \Leftrightarrow x < y$ より、x が極大なので $x = y$ である。

[21] $\{x\}^- = Y_1 \cup Y_2,\ x \in Y_i \Rightarrow \{x\}^- \subseteq Y_i$

また $Y \ni x_1,\ x_1 > x_0 \ \Rightarrow\ Y \supseteq \{x_1\}^- \ni x_0$ より、閉集合は stable under specialization である。

さらに $U \ni x_0,\ x_1 > x_0$ とすると、

$$\{x_1\}^- \ni x_0 \Leftrightarrow V \ni x_1 \text{ for } \forall V \ni x_0$$

より $U \ni x_1$ となり、開集合は stable under generization である。

(f) $t(X)$ の open set の集合を $\mathcal{U}(t(X))$、X の open set の集合を $\mathcal{U}(X)$ とすると、Proposition 2.6 の証明で示されているように、

$$\mathcal{U}(t(X)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}(X),\ U \mapsto \alpha^{-1}(U)$$

から、$t(X)$ の open set と X の open set は一対一対応している[22]。

よって $\operatorname{sp} X$ が noetherian ならば $\operatorname{sp} t(X)$ も noetherian である。

$t(Y)$ を $t(X)$ の既約閉集合とする。

$$Y = Z_1 \cup Z_2 \ \Rightarrow\ t(Y) = t(Z_1) \cup t(Z_2) \ \Rightarrow\ t(Y) = t(Z_i)$$

$$\Rightarrow\ Y = \alpha^{-1}(t(Y)) = \alpha^{-1}(t(Z_i)) = Z_i$$

より、Y は既約閉集合であり、$t(X)$ の元 (閉点) である。$t(X)$ における閉集合の定義から、点 Y を含む最小閉集合は $t(Y)$ なので、$Y^- = t(Y)$ である。

もし X の既約閉集合 Y, Z が $t(X)$ の generic point とすると

$$Y^- = Z^- \ \Rightarrow\ t(Y) = t(Z) \ \Rightarrow\ Y \subseteq Z, Z \subseteq Y \ \Rightarrow\ Y = Z$$

となり、generic point は一意的である。

$\operatorname{sp} X$ が Zariski space のとき、X の既約閉集合は $Y = \{P\}^-$ となり、このような P は一意的なので $t(X)$ はこのような $\{P\}^-$ からなる。すなわち、連続写像

$$\alpha : X \to t(X),\ P \mapsto \{P\}^-$$

は全単射を与える。すると、前注から $\alpha^{-1}(t(Y)) = Y$ なので、$t(Y) = \alpha(Y)$ より α は閉写像、ひいては同相写像となる。

逆に α が同相写像ならば、$t(X)$ の元である X の既約閉集合 Y に対して $Y = \alpha(P) = \{P\}^-$ となる $P \in X$ が一意的に存在するので、$\operatorname{sp} X$ は Zariski space である。

2.3.18

(a) 本問は [1], Exercise 7.20, (i) に示されている。X は Zariski space とは限らない一般の位相空間において成立する。

X の部分集合の集合として $\mathfrak{F}$ の他に
$\mathfrak{G} :=$ {finite union of locally closed subsets in X}

[22] $\tilde{\alpha} : \mathcal{C}(t(X)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X),\ t(Y) \mapsto \alpha^{-1}(t(Y)) = Y$。なお、等号は $\alpha(Y) \subseteq t(Y) \Rightarrow Y \subseteq \alpha^{-1}(t(Y))$ と $x \in \alpha^{-1}(t(Y)) \Rightarrow \alpha(x) = \{x\}^- \in t(Y) \Rightarrow x \in Y$ から得られる。

$\mathfrak{H} := \{\text{finite disjoint union of locally closed subsets in } X\}$
とする。ここで、disjoint union $A \sqcup B$ は、$A \cap B = \varnothing$ のときの $A \cup B$ と解釈する。

まず $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}$ を示す。開集合、閉集合をそれぞれ O, C のように書くことにすると、$O^c \cup C^c = (O \cap C)^c \in \mathfrak{F}$ となるが、すると

$$\bigcup_{i \in I}(O_i \cap C_i) = (\bigcap_{i \in I}(O_i^c \cup C_i^c))^c \in \mathfrak{F},\ |I| < \infty$$

から、$\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$ である。また、$\mathfrak{G}$ は条件 (1)〜(3) を満たす。実際、(1) は明らかであり、(2) は $\bigcap_j(\bigcup_i L_i^j)$ を加法標準形に直せばわかるように、成立する。ここで $L = O \cap C$ は locally closed set であり、L も L^c も $\mathfrak{G}$ に属す。(3) は $(\bigcup_i L_i)^c = \bigcap_i L_i^c \in \mathfrak{G}$ より成立する。

$\mathfrak{F}$ は条件 (1)〜(3) を満たす極小集合なので $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}$ である。

次に $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ を証明する。$\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}$ は明らかである。$L_1 \cup \cdots \cup L_n \in \mathfrak{H}$ を n の数学的帰納法で示す。

$L = O \cap C \in \mathfrak{H}$ は成立するので、$n-1$ まで成立すると仮定する。

$$L_1 \cup \cdots \cup L_{n-1} \cup L_n = (L_1' \sqcup \cdots \sqcup L_m') \cup L_n = L_n \sqcup (L_1' \cap L_n^c) \sqcup \cdots \sqcup (L_m' \cap L_n^c) \quad (20)$$

において、$L^c = (O \cap C)^c = O^c \sqcup (C^c \cap O)$ より

$$L' \cap L^c = L' \cap (O^c \sqcup (C^c \cap O)) = (L' \cap O^c) \sqcup (L' \cap (C^c \cap O))$$

なので式 (20) は finite disjoint union of locally closed subsets となり、$\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{H}$ を得る。前の結果を合わせて $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$ である。

以上により $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ となる。

(b) [1], Exercise 7.20, (ii) に、次のように示されている。

条件: 既約 X で Constructible Z が稠密である条件は Z が開集合を含むこと

X が Zariski space のときは Z の生成元は全ての開集合に含まれるので (Exercise 2.3.17(d))、生成元を含むことと等価となる。

よって、ここでは上記条件を証明する[23]。

Z が開集合を含むとき、

$$Z \supseteq U \Rightarrow Z^- \supseteq U^- = X$$

より Z は稠密である。

逆に、$Z^- = X$ とする。Z が constructible 部分集合なので $Z = \bigcup_{i \in I} O_i \cap C_i,\ |I| < \infty$ と書ける。

$$Z = \bigcup_i (O_i \cap C_i) \subseteq \bigcup_i C_i \ \Rightarrow\ X = Z^- \subseteq \bigcup_i C_i \ \Rightarrow\ X = \bigcup_i C_i$$

$$Z = \bigcup_i O_i \cap C_i \supseteq \bigcup_i (O \cap C_i) = O \cap \bigcup_i C_i = O \cap X = O$$

[23] この証明に X が noetherian である必要はない。

ここで X は既約なので $O := \bigcap_j O_j \neq \varnothing$ である。

(c) S が閉集合なら (a) より constructible であり、Exercise 2.3.17 から stable under specialization である。

逆に S が constructible で stable under specialization のとき、$S^- = S$ となることを示す。

(a) で示したように

$$S = \bigcup_{i \in I} O_i \cap C_i,\ |I| < \infty$$

とできるが、閉集合 C_i は noetherian なので ([1], 演習 6.5)、既約な閉部分集合の有限和となる ([1], 演習 6.7)。よってそれらの各既約閉部分集合を改めて C_i とすると、

$$Z = \bigcup_{i \in I} O_i \cap C_i,\ |I| < \infty,\ O_i : \text{open}, C_i : \text{irreducible closed}$$

とおける。

$O_i \cap C_i$ は既約 C_i における開集合なので

$$(O_i \cap C_i)^- = C_i = \{\eta_i\}^-$$

であり (X は Zariski space)、$x \in S^-$ とすると

$$S^- = \bigcup_i (O_i \cap C_i)^- = \bigcup_i C_i \ \Rightarrow\ x \in \exists C_i$$

ここで、C_i は irreduible Zariski Space となるので、C_i の開集合 $O_i \cap C_i$ は η_i を含む (Exercise 2.3.17(d))。よって $S \supseteq O_i \cap C_i \ni \eta_i$ となり、S が stable under specialization ゆえ

$$S \supseteq \{\eta_i\}^- = C_i \ni x \ \Rightarrow\ S^- \subseteq S$$

から $S^- = S$ となる。

一般に $S \subseteq X$ とすると

$$[S \ni x \Rightarrow S \supseteq \{x\}^-] \ \Leftrightarrow\ [S^c \not\ni x \Rightarrow S^c \cap \{x\}^- = \varnothing] \tag{21}$$

が成り立つが、左辺は S が stable under specialization を、右辺は S^c が stable under generization を示している。

T が開集合なら T^c は閉集合なので、constructible & stable under specialization である。よって、今示した式 (21) から、T は constructible & stable under generization である。

逆に T が constructible & stable under generization なら T^c は constructible & stable under generization なので、T^c は閉集合となり、よって T は開集合である。

(d) Z が Y の constructible subset のとき $Z = \bigcup_{i \in I} (O_i \cap C_i),\ |I| < \infty$ と書けるが、すると $f^{-1}(Z) = \bigcup_i (f^{-1}(O_i) \cap f^{-1}(C_i))$ は X の constructible subset である。

2.3.19

[1], Exercise 7.23 に載っているが、本問のヒントに従って証明する。

(a) まず X, Y が affine とできることを示す。Y が noetherian scheme なので

$$Y = \bigcup_{i \in I} V_i,\ V_i = \operatorname{Spec} B_i,\ B_i : \text{noetherian ring},\ |I| < \infty$$

であり、f が finite type なので

$$f^{-1}(V_i) = \bigcup_{j \in J_i} U_{ij},\ U_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij},\ A_{ij} : \text{finitely generated } B_i\text{-algebra},\ |J_i| < \infty$$

である。このとき、

$$f|_{U_{ij}} : U_{ij} \to V_i$$

も finite type である。なぜなら

$$f|_{U_{ij}}^{-1}(V_i) = f^{-1}(V_i) \cap U_{ij} = U_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij}$$

において、A_{ij} は有限生成 B_i-代数だからである。

Noetharian scheme の部分集合は noetherian なので ([1], Exercise 6.5)、V_i も noetherian scheme であり、Exercise 2.3.13(g) から U_{ij} も noetherian である。

さて、

$$f(X) = \bigcup_{ij} f(U_{ij}) = \bigcup_{ij} f|_{U_{ij}}(U_{ij})$$

より[24]、$f|_{U_{ij}}(U_{ij})$ が constructible なら $f(X)$ も constructible である。

以上により X, Y は affine としてよい。

次に X, Y が reduced とできることを示す。$X = \operatorname{Spec} A$ とすると、Example 3.2.6 より $X \approx X_{\mathrm{red}} = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ であり、A は noetherian ring なので X_{red} は noetherian affine scheme である。位相空間として $f(X) = f(X_{\mathrm{red}})$ であり、constructible set も位相空間で定義されるので、X は X_{red} としてよい。$Y \approx Y_{\mathrm{red}}$ も同様に Y_{red} としてよい。

Exercise 2.2.3(b) で示された $X_{\mathrm{red}} \to X$ から、$X_{\mathrm{red}} \to X \to Y$ に対して $X_{\mathrm{red}} \to Y_{\mathrm{red}}$ が一意的に存在する (Exercise 2.2.3(c))。従って $X_{\mathrm{red}} \to Y_{\mathrm{red}} \to Y$ が存在する。

すると、準同型 $B \to B/\mathfrak{b} \to A/\mathfrak{a}$ が存在するが、A が有限生成 B-代数なので、$A/\mathfrak{a}$ も有限生成 B-代数、ひいては有限生成 $B/\mathfrak{b}$-代数となる。よって

$$f_{\mathrm{red}} : X_{\mathrm{red}} \to Y_{\mathrm{red}}$$

は finite type である。位相空間においては $f(X) = f_{\mathrm{red}}(X_{\mathrm{red}})$ なので $f_{\mathrm{red}}(X_{\mathrm{red}})$ が constructible なら $f(X)$ も constructible である。

[24] $y \in f(X) \Rightarrow y = f(\exists x), x \in \exists U_{ij} \Rightarrow y \in f(U_{ij})$

以上により $f: X, Y$ において X, Y は reduced、f は finite type としてよい。

さらに X, Y が irreducible とできることを示す。

$f: X = \operatorname{Spec} A \to Y = \operatorname{Spec} B$ に対応する環準同型を $\varphi: B \to A$ とする。A, B は noetherian なので、それぞれ有限個の極小素イデアル $\{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\}$, $\{\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m\}$ を持つ ([1], Exercise 6.9)。

$\varphi^{-1}(\mathfrak{p}_i)$ に含まれる極小素イデアルの一つを $\mathfrak{q}_j$ とすると

$$B/\mathfrak{q}_j \to B/\varphi^{-1}(\mathfrak{p}_i) \to A/\mathfrak{p}_i$$

より、finite type

$$f_i : X_i = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{p}_i \to Y_j = \operatorname{Spec} B/\mathfrak{q}_j$$

が得られる。ここで、X_i, Y_j は各々 X, Y の irreducible closed subscheme であり ($\operatorname{sp} X,\ \operatorname{sp} Y$ の既約成分)、integral noetherian affine scheme となる。

$f(X) = \bigcup_i f(X_i) = \bigcup_i f_i(X_i)$ のとき、Y_j において $f_i(X_i)$ が constructible ならば $f(X)$ も constructible となる。なぜならば、$f_i(X_i) = \bigcup_k O_k \cap C_k$ のとき、Y_j は Y の閉集合なので C_k は Y の閉集合でもあり、$O_k = Y_j \cap U_k,\ U_k$: open at Y より

$$f(X) = \bigcup_i f_i(X_i) = \bigcup_i \bigcup_k O_k \cap C_k = \bigcup_i \bigcup_k U_k \cap (Y_j \cap C_k) \tag{22}$$

となるからである。

従って、$f_i : X_i \to Y_j$ を改めて $f: X \to Y$ とおくことにより、X, Y は integral noetherian affine scheme、f は finite type としてよい。

最後に f が dominant とできることを示す。

X, Y が integral noetherian affine のとき、finite type で dominant な $f' : X \to Y$ に対して $f'(X)$ が constructible なことを示せば十分である。

$(\because)$ 次の 2 系列は対応している。

$$\varphi : B \twoheadrightarrow B/\mathfrak{q} \overset{\varphi^-}{\hookrightarrow} A,\ \mathfrak{q} = \ker \varphi$$

$$f : X \overset{f^-}{\to} f(X)^- \to Y$$

X が既約なので $f(X)$ も既約、$Z := f(X)^- = \operatorname{Spec} B/\mathfrak{q}$ は integral affine noetherian closed subscheme であり ($\ker \varphi$ は A が整域なので prime ideal)、

$$f^- : X \to Z,\ x \mapsto f(x)$$

は dominant で finite type となる。

すると、仮定から $f^-(X)$ は constructible なので

$$f^-(X) = \bigcup_{i \in I} O_i \cap C_i,\ |I| < \infty$$

とかけるが、式 (22) の場合と同様の議論から

$$f(X) = f^-(X) = \bigcup_i O_i \cap C_i = \bigcup_i U_i \cap (Z \cap C_i)$$

とかけるので、$f(X)$ は constructible である。($\because$ 終)
従って f は dominant としてよい。

(b) ヒントに従って証明する ([1], Exercise 5.21)。

$$A \subseteq B \ni b,\ A, B : \text{noetherian integral},\ B : \text{finitely generated } A\text{-algebra}$$

とする。

$B = A[X],\ X$: indeterminate のとき。

$$B \ni b = a_n X^n + \cdots + a_0,\ a_n \neq 0,\ a_i \in A$$

としたとき、$a = a_n$ とおく。$\varphi(a) \neq 0$ となる $\varphi : A \to K,\ K$: algebraically closed field に対し $\varphi(a_n)\alpha^n + \cdots + \varphi(a_0) \neq 0$ となる $\alpha \in K$ をとる。

$$\varphi' : B \to K,\ x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) & ; x \in A \\ \alpha & ; x = X \end{cases}$$

とすると $\varphi'(b) \neq 0$ である。
$B = A[x],\ a'_m x^m + \cdots + a'_0 = 0,\ a'_m \neq 0,\ a'_i \in A$ のとき。
x は $\mathrm{Frac}\, A$ 上代数的なので、B も $\mathrm{Frac}\, A$ 上代数的であり、$\mathrm{Frac}\, B/\mathrm{Frac}\, A$ は代数拡大となる。$0 \neq b \in B \subseteq \mathrm{Frac}\, B$ に対し、$1/b$ の最小多項式を $b_n X^n + \cdots + b_0,\ b_n \neq 0,\ b_i \in A$ としたとき、$a = a'_m b_n \neq 0$ とおく。
$\varphi(a) \neq 0$ となる $\varphi : A \to K$ に対し、商環の普遍的性質 ([1], Proposition 3.1) より、φ を拡張した

$$\varphi_a : A_a \to K$$

が一意的に存在する。
$B_a = A_a[x]$ において、x は A_a 上整なので B_a は A_a 上整である。すると φ_a を拡張した $\varphi' : B_a \to K$ が存在するので ([1], Exercise 5.2)、B に制限すると φ を拡張した

$$\varphi' : B \to K$$

が存在する。ここで $\varphi'(b) = 0$ とすると $b_n + \cdots + b_0 b^n = 0$ から $\varphi'(b_n) = 0$ となり、$0 = \varphi'(a'_m b_n) = \varphi'(a) = \varphi(a)$ となってしまう。よって $\varphi'(b) \neq 0$ である。

$B = A[x_1, \cdots, x_r]$ のとき。r に関する数学的帰納法で示す。
$A' = A[x_1, \cdots, x_{r-1}]$ とし、$b \in B$ とする。A' はネーター環で、整域 B の部分環なので、ネーター整域である。既に示したことから、次を満たす $\exists a' \in A'$ が存在する。

$$\varphi' : A' \to K,\ \varphi'(a') \neq 0 \Rightarrow \exists \varphi" : B \to K,\ \varphi"(b) \neq 0,\ \varphi"|_{A'} = \varphi' \qquad (23)$$

帰納法の仮定から $a' \in A' = A[x_1, \cdots, x_{r-1}]$ において成立しているので、次を満たす $\exists a \in A$ が存在する。

$$\varphi : A \to K,\ \varphi(a) \neq 0 \ \Rightarrow\ \exists \varphi' : A' \to K,\ \varphi'(a') \neq 0,\ \varphi'|_A = \varphi$$

すると、上式 (23) から

$$\varphi" : B \to K,\ \varphi"(b) \neq 0,\ \varphi"|_A = \varphi'|_A = \varphi$$

となる。

(a) より

$$f : X = \operatorname{Spec} A \to Y = \operatorname{Spec} B$$

$$f : \text{dominant},\ A, B : \text{noetherian integral},\ A : \text{finitely generated } B\text{-algebra}$$

とできる。f に対応する $\iota : B \hookrightarrow A$ は単射である。
上記で示したように、$1 \in A$ に対して存在する $\exists b \in B$ を用いて

$$D(b) \subseteq f(X),\ b \in B$$

を示す。$\mathfrak{p} \in D(b) \Leftrightarrow b \notin \mathfrak{p}$ とすると標準的全射を拡張した $\varphi : B \to K = \overline{\operatorname{Frac} B/\mathfrak{p}}$(代数的閉包) は $\varphi(b) \neq 0$ を満たし、$\ker \varphi = \mathfrak{p}$ である。よって

$$\exists \varphi' : A \to K,\ \varphi'(1) \neq 0,\ \varphi'|_B = \varphi$$

であり、$\mathfrak{q} = \ker \varphi' \subseteq A$ は K が体なので prime ideal となる。従って

$$\varphi = \varphi' \iota \ \Rightarrow\ \iota^{-1}(\mathfrak{q}) = \ker \varphi \ \Rightarrow\ f(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p} \ \Rightarrow\ D(b) \subseteq f(X)$$

を得る。

(c) (b) を拡張しておく。

性質 **10.** $f : X \to Y,\ f : \text{dominant \& finite type},\ X, Y : \text{affine noetherian scheme}$ において Y が既約とすると、$f(X)$ は Y の非空開集合を含む。

(証明) $f : X = \operatorname{Spec} A \to Y = \operatorname{Spec} B$ としたとき、A の有限個の極小素イデアル $\{\mathfrak{p}_i\}_i$ に対し、$X_i = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{p}_i$ は integer neotherian closed subscheme となる。位相空間上

$$f(X) = \bigcup_i f(X_i) \ \Rightarrow\ Y = (f(X))^- = \bigcup_i (f(X_i))^- \ \Rightarrow\ Y = (f(X_i))^-$$

なので

$$f^i = f|_{X_i} : X_i \to Y$$

は dominant となる。X_i, Y は integral noetherian subscheme なので、(b) を $f^i : X_i \to Y$ に適用すれば $f(X) \supseteq f^i(X)$ は Y の非空開集合を含む。(証明終)

さて、

$$f : X = \operatorname{Spec} A \to Y = \operatorname{Spec} B$$

$$f : \text{dominant},\ A, B : \text{noetherian integral},\ A : \text{finitely generated } B\text{-algebra}$$

のとき $f(X)$ が constructible となることを noetherian induction を用いて証明する。

Y の任意の閉部分集合を F とする。$f(X) \cap G$: constructible for $G \subsetneq F$ のとき $f(X) \cap F$ も constructible となることを示す。これば示せれば、noetherian induction より $f(X) \cap Y = f(X)$ が constructible となる。F は既約としてよい[25]。

$(f(X) \cap F)^- \neq F$ のとき。
$G := (f(X) \cap F)^- \ \Rightarrow\ G \subsetneq F \ \Rightarrow\ f(X) \cap G$: constructible より (induction 仮定)、

$$f(X) \cap F \subseteq (f(X) \cap F)^- = G,\ f(X) \cap F \subseteq f(X)$$

$$\Rightarrow\ f(X) \cap F \subseteq f(X) \cap G \subseteq f(X) \cap F$$

$$\Rightarrow\ f(X) \cap F = f(X) \cap G : \text{constructible}$$

$(f(X) \cap F)^- = F$ のとき。
$f^{-1}(F)$ は affine closed subscheme である。
$(\because)$ $\iota : F \to Y$ は closed immersion とできるので、$X \times_Y F \to X$ も closed immersion である (Exercise 2.3.11(a))。

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_Y F \arrow[dl, "p"', "\text{closed immersion}"] \arrow[dr, "f'"] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & F \arrow[dl, "\iota", "\text{closed immersion}"'] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

このとき、$f^{-1}(F) = p(X \times_Y F)$ となる。なぜなら、p, ι は closed immersion なので $X' = X \times_Y F$ とすると $F \subseteq Y,\ X' \subseteq X$ とみられ、上図式の可換性から $f' = f|_{X'}$ なので

$$f^{-1}(F) = f'^{-1}(F) = X' = X \times_Y F \tag{24}$$

だからである。($\because$ 終)

$$g := f|_{f^{-1}(F)} : f^{-1}(F) \to F$$

とすると $f(X) \cap F = f(f^{-1}(F)) = g(f^{-1}(F)) \ \Rightarrow\ F = (f(X) \cap F)^- = (g(f^{-1}(F)))^-$ なので g は dominant である。

従って、性質 10 から $g(f^{-1}(F)) = f(X) \cap F \supseteq U \neq \varnothing$ となる Y の開集合が存在する。

$$f(X) \cap F = U \cup (f(X) \cap (F - U))$$

[25] $F = \bigcup_i F_i,\ F_i \subsetneq F \ \Rightarrow\ f(X) \cap F = \bigcup_i (f(X) \cap F_i)$: constructible

において $F-U \subsetneq F$ なので、帰納法の仮定から $f(X) \cap (F-U)$ は constructible である。よって $f(X) \cap F$ は constructible である。

(d) k が代数的閉体のとき、Example 2.3.4 より

$$\mathbb{A}_k^2 = \{(0), \{(x-a, y-b)\}_{(a,b)\in k^2}, \{(h)\}_{h:\text{irreducible}}\}$$

であり、閉集合は次のようになる。

$$V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{p}_1) \cup \cdots \cup V(\mathfrak{p}_n),\ \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$$

$$V((0)) = \mathbb{A}_k^2$$

$$V((h)) = \{(h)\} \cup \{(x-a, y-b) | h(a,b) = 0\}$$

$$V((x-a, y-b)) = (x-a, y-b)$$

ここで、$V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ であり、noetherian ring では ideal は準素分解でき、$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cup \mathfrak{a}_n \Rightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{a}_1} \cap \cdots \cup \sqrt{\mathfrak{a}_n} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cup \mathfrak{p}_n$ なので、$\sqrt{\mathfrak{a}}$ を改めて $\mathfrak{a}$ とおいた。このとき、$\mathbb{A}_k^2$ 以外の閉集合は高々1 次元である。

$$f = \varphi* : \mathbb{A}_k^2 \to \mathbb{A}_k^2,\ \varphi : k[x,y] \to k[s,t],\ x \mapsto s, y \mapsto st$$

は finite type である。

その像 $f(\mathbb{A}_k^2)$ は

$$\varphi^{-1}((0)) = (0)$$

$$\varphi^{-1}((t)) = (0)$$

$$\varphi^{-1}((s)) = (x,y)$$

$$\varphi^{-1}((g)) = (h),\ g \not\sim s,t,\ h : \text{irreducible}$$

$$\varphi^{-1}((s-a, t-b)) = (x-a, y-ab),\ a,b \in k$$

全体からなり ($g \not\sim s$ は $g \neq as, \forall a \in k$ を意味する)、2 次元空間である。

これらの等式の証明は容易であるが、$\varphi^{-1}((g)) = (h),\ g \not\sim s,t,\ h : \text{irreducible}$ のみ示しておく。もし $\varphi^{-1}((g)) = (x-a, y-b)$ となったとすると、

$$(s-a, st-b) = (s-a, at-b) \in (g) \Rightarrow g \sim (s-a),\ g \sim (at-b) \Rightarrow g \sim s, a = b = 0$$

となってしまうので、あり得ない。次に、$\varphi^{-1}((g)) = (h),\ g \not\sim s,t$ とすると、

$$h(s, st) = s^e h'(s,t) \in (g),\ e \geq 0 \Rightarrow h'(s,t) = g(s,t) : \text{irreducible}$$

従って $h(x,y)$ は既約多項式である。

$f(\mathbb{A}_k^2)$ は閉集合とならない。なぜなら $f(\mathbb{A}_k^2)$ は 2 次元空間なので、$f(\mathbb{A}_k^2) = \mathbb{A}_k^2$ しかあり得ないが、

$$f(\mathbb{A}_k^2) \not\ni (x, y-b),\ 0 \neq b \in k$$

だからである。

また、$f(\mathbb{A}_k^2)$ は開集合にもならない。もし開集合だとすると閉集合 $f(\mathbb{A}_k^2)^c \supseteq \{(x, y-b)\}_{b\in k-0}$ は 1 次元空間 $\{(0,b)\}_{b\in k-0}$ を含む。それは有限個の $V((h))$ のみから得られる可能性があるが、その中の一つは無限個の $(0,b)$ に対応した prime ideal(極大) を含むことになる。そのとき、無限個の b に対して $h(0,b) = 0$ となるが、すると $h = xh'$ の形になるので h が可約多項式となってしまう。

2.3.20

(b) 先にこちらを証明する。

Example 3.2.7 より

$$\dim \operatorname{Spec} A = \dim A$$

が成り立つ。ここで、A が noetherian ring ならば prime ideal の height は有限であり ([1], Corollary 11.12)、有限生成 k-代数 (整域) ならば (noetherian ring の 1 種)、$\dim A < \infty$ である ($\operatorname{Frac} A$ の超越次元は有限)。

X が k 上 finite type の integral scheme なので

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i,\ |I| < \infty,\ U^i = \operatorname{Spec} A^i,\ A^i : \text{integral}$$

であり、Exercise 1.1.10(b) より

$$\dim X = \max_i \dim U_i = \max_i \dim A_i$$

となる。よって、$\dim X$ は有限である。

X が integral ゆえ、Exercise 2.3.6 と Theorem 1.8A(a) から、任意の $i \in I$ に対し

$$K(X) = \operatorname{Frac} A^i \Rightarrow \text{tr.d.}_k K(X) = \text{tr.d.}_k \operatorname{Frac} A^i = \dim A^i$$

となり、$\dim A^i$ は i によらず $\dim X$ に等しくなる。

よって $\text{tr.d.}K(X)/k = \dim X$ である。

(a) X の任意の closed point を P とし、$P \in U^i = \operatorname{Spec} A^i$ において P に対応する極大 ideal を $\mathfrak{m}$ とする。(b) で示したことと Theorem 1.8A(b) から

$$\dim X = \dim A^i = \operatorname{height} \mathfrak{m} + \dim A_i/\mathfrak{m} = \dim A^i_{\mathfrak{m}} + \dim k(P) = \dim \mathcal{O}_P$$

となる。

(c) 次に示す性質 11 から、$Y_1, Y_2 \in t(X)$ のとき、$Y_1 = Y_2 \Leftrightarrow Y_1 \cap U = Y_2 \cap U$ となるので、$\operatorname{codim}(Y, X)$ や $\dim X$ を与える既約閉集合系列は U と共通部分をとった系列と 1 対 1 に対応し、

$$\operatorname{codim}(Y, X) = \operatorname{codim}(Y \cap U, U),\ \text{for } U \cap Y \neq \varnothing$$

$$\dim X = \dim U, \text{ for } U \neq \varnothing$$

が得られる。

$U = \operatorname{Spec} A \Rightarrow Z \cap U = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{p}$ とかけるので、

$$\operatorname{codim}(Z, X) = \operatorname{codim}(Z \cap U, U) = \operatorname{codim}(\operatorname{Spec} A/\mathfrak{p}, \operatorname{Spec} A)$$

$$= \operatorname{height} \mathfrak{p} = \dim \operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}} = \dim \mathcal{O}_{P,U} = \dim \mathcal{O}_{P,X} \tag{25}$$

である。ここで、P は $\mathfrak{p}$ に対応した点である。

Exercise 2.3.17(f) から $\alpha : X \xrightarrow{\sim} t(X)$ なので、P と Z は 1 対 1 に対応している。従って

$$\operatorname{codim}(Y, X) = \inf_{Z \subseteq Y} \operatorname{codim}(Z, X) = \inf_{P \in Y} \dim \mathcal{O}_{P,X}$$

となる。

性質 11. *X とその開集合 U に対し、X の既約閉集合と U の既約閉集合は 1 対 1 に対応する:*

$$\varphi : t(U) \xrightarrow{\sim} t(X),\ Z \mapsto Z^{-}$$

(証明) Z は U の既約なので X でも既約であり、すると Z^{-} も既約である (Example 1.1.4)。よって、写像が定義できる。

$Y \in t(X)$ に対し $Y \cap U$ は Y の開集合とみなせるので、既約かつ稠密 (Example 1.1.3)、すなわち $(Y \cap U)^{-} = Y$ である。また $Y \cap U$ は U の閉集合なので $t(U)$ に属し、φ は全射となる。さらに、$Z_1^{-} = Z_2^{-},\ Z_1, Z_2 \in t(U) \Rightarrow Z_1 = Z_1^{-} \cap U = Z_2^{-} \cap U = Z_2$ より単射であり、$\varphi^{-1}(Y) = Y \cap U,\ \varphi(Y \cap U) = Y$ である。(証明終)

(d) Z を X の既約閉集合とすると、$Z \cap U \neq \varnothing$ となる X の open affine $U = \operatorname{Spec} A$ に対して、$Z \cap U$ に対応する A の prime ideal を $\mathfrak{p}$ とすると

$$\operatorname{height} \mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p} = \dim A \ \Rightarrow\ \operatorname{codim}(Z \cap U, U) + \dim(Z \cap U) = \dim U$$

なので (Theorem 1.8A(b))、性質 11 より

$$\operatorname{codim}(Z, X) + \dim Z = \dim X \tag{26}$$

を得る。

codim は整数ゆえ $\operatorname{codim}(Y, X) = \inf_{Z \subseteq Y} \operatorname{codim}(Z, X)$ を与える既約閉集合 Z が存在することから、それを Z_Y とすると、

$$\operatorname{codim}(Z_Y, X) + \dim Z_Y = \dim X \tag{27}$$

である。ここで、$\operatorname{codim}(Z_Y, X) = \operatorname{codim}(Y, X)$ なので、$\dim Z_Y = \dim Y$ を示せば証明が終わる。

$r = \dim Z_Y,\ n = \dim X$ とすると、式 (27) より

$$Z_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_r = Z_Y \subsetneq Z_{r+1} \cdots \subsetneq Z_n,\ Z_r \subseteq Y$$

となる系列が存在し、$\dim Y \geq r$ である。ここで、もし $s := \dim Y > r$ とすると、$Z'_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Z'_s \subseteq Y$ が存在する。すると Z'_s に関する式 (26) から

$$Z'_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Z'_s \subsetneq Z'_{s+1} \subsetneq \cdots \subsetneq Z'_n$$

となる系列が存在することになるが、すると

$$\operatorname{codim}(Z'_s, X) = n - s < n - r = \operatorname{codim}(Z_Y, X) = \operatorname{codim}(Y, X)$$

となり $\operatorname{codim}(Y, X)$ の定義に反する。よって、$\dim Y = s = r = \dim Z_Y$ である。

(e) 性質 11 で示した。

(f) Integral scheme of finite type X に対し、$X' = X \times_k k'$ は k' 上 finite type の scheme である (Exercise 2.3.10(d))。

$U = \operatorname{Spec} A \subseteq X,\ U' = U \times_k k' = \operatorname{Spec} A',\ A' = A \otimes_k k'$ とすると、$A \otimes_k k'$ は noetherian ring なので[26]、X' は noetherian となる。また、(e) より

$$\dim X = \dim U = \dim A$$

である。

X' の既約成分の一つを Z とする。$Z \cap U' \neq \varnothing$ となる U' をとると、性質 11 から $Z \cap U'$ は U' で既約成分である。よって、$Z \cap U' = \operatorname{Spec} A'/\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}$: 極小 prime ideal とかける。すると $A'/\mathfrak{p}$ は整域なので、$Z \cap U'$ は reduced であり、よって Z は integral である。さらに Z は finite type over k' でもある。

Z に関する (e) から

$$\dim Z = \dim Z \cap U' = \dim A'/\mathfrak{p} = \dim A' - \operatorname{height} \mathfrak{p} = \dim A' = \dim U' \quad (28)$$

である。

A は有限生成 k-代数 (整域) であり、k'/k の超越基底を T とすると、体の拡大系列 $k'/k(T)/k$ が得られ、$k'/k(T)$ は代数拡大となる。

$A_T = A \otimes_k k(T)$ は有限生成 $k(T)$ 代数であり、また整域でもある ($A \otimes_k k(T) = (k[T] - 0)^{-1} A[T]$)。

$k'/k(T)$ は代数拡大なので、k' は $k(T)$ 上整、よって $A' = A \otimes_k k'$ は $A_T = A \otimes_k k(T)$ 上整となる ([1], Exercise 5.3)。すると、[1], Corollary 5.9, Theorem 5.11 から両者の krull 次元は一致する:

$$\dim A_T = \dim A'$$

ネーター正規化定理より代数的に独立な A の元集合 $S,\ |S| = \dim A$ が存在して、A は $k[S]$ 上整となる。$k(T)$ は k 代数なので $A \otimes_k k(T)$ は $k[S] \otimes_k k(T)$ 上整であり ([1], Exercise 5.3)、

$$\dim A_T = \dim k[S] \otimes_k k(T)$$

[26] $k[x_1, \cdots, x_n] \to A \to 0$: exact $\Rightarrow$ $k'[x_1, \cdots, x_n] = k[x_1, \cdots, x_n] \otimes_k k' \to A \otimes_k k' \to 0$: exact より、$k'[x_1, \cdots, x_n]$ が noetherian なので $A \otimes_k k'$ は noetherian である ([1], Proposition 7.1)。

となる。

このとき、$k[S]\otimes_k k(T) = k(T)[S]$ は整域となるので ($k[S]\otimes_k k(T)$ は整域 $A\otimes_k k(T)$ の部分環)

$$\operatorname{Frac} k(T)[S] = k(T,S) \Rightarrow \dim k(T)[S] = \mathrm{tr.d.}_k k(T,S) \geq |S| \Rightarrow \dim A_T \geq |S|$$

である。

一方、k' は k 代数なので、A' は $k[S]\otimes_k k'$ 上整であり、

$$\dim A' = \dim k[S]\otimes_k k' = \dim k'[S] \leq |S|$$

となる。$\dim A_T = \dim A'$ だったので、

$$\dim A' = |S| = \dim A$$

以上により

$$\dim Z = \dim A' = \dim A = \dim X$$

が得られる。

2.3.21

離散付値環 R の極大 ideal を (u) とすると、R の任意の元は $au^i, a:$ 単元、の形となる ([1], Proposition 9.2)。$X = \operatorname{Spec} R[x]$ とすると、R は有限生成 k 代数とは限らないので、$R[x]$ も有限生成 k 代数とは限らない。

(a) の反例: $\mathfrak{m} = (ux-1)$ は、$R[x]/\mathfrak{m} = R[u^{-1}]$ が体なので、極大 ideal かつ単項 ideal であり、$\dim \mathcal{O}_\mathfrak{m} = \operatorname{height}\mathfrak{m} = 1$ となる。一方 $\dim X = \dim R[x] = \dim R + 1 = 2$ なので $\dim X \neq \mathcal{O}_\mathfrak{m}$ である。

(d) の反例:　P を $\mathfrak{m}$ に対応する閉点とし、$Y = \{P\}$ とおくと $\operatorname{codim}(Y,X)$ を与える X の既約閉集合の系列は $R[x]$ における $\mathfrak{m}$ に含まれる prime ideal 系列に対応するが、$\mathfrak{m}$ は単項 ideal なので $\operatorname{codim}(Y,X) = 1$ である。よって $\dim Y + \operatorname{codim}(Y,X) = 0+1 \neq \dim X$ である。

(e) の反例: $R[x]_u = R[u^{-1}][x]$ において $R[u^{-1}]$ は体である。$U = \operatorname{Spec} R[x]_u$ は開集合であり、$\dim U = \dim \operatorname{Spec} R[u^{-1}][x] = 1$ となる。一方 $\dim X = 2$ なので $\dim X \neq \dim U$ である。

2.3.22

Exercise 2.3.20 の解答の最初に示したように、$\dim X, \dim Y < \infty$ である。
(a)
一般に $Z = \{\eta\}^-$ のとき

$$\operatorname{codim}(Z,X) = \dim \mathcal{O}_{\eta,X}$$

である。これは式 (25) において、$\eta \in U$ に対応する prime ideal を $\mathfrak{p}$ とすると $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{p} = \{\eta\}^-$ より成立する。

従って、X, Y は affine としてよく、

$$f : X = \operatorname{Spec} A \to Y = \operatorname{Spec} B,\ \varphi : B \hookrightarrow A$$

$$\mathcal{O}_{\eta', Y} = B_\mathfrak{q},\ \mathcal{O}_{\eta, X} = A_\mathfrak{p},\ \eta' = \mathfrak{q} \subseteq B,\ \eta = \mathfrak{p} \subseteq A,\ Z = \{\eta\}^-,\ Y' = \{\eta'\}^-$$

とする[27]。X, Y は finite type over k なので、A, B は有限生成 k 代数、よって noetherian ring である ([1], Corollary 7.7)。

このとき

$$Z \subseteq f^{-1}(Y') \Leftrightarrow \eta \in f^{-1}(\{\eta'\}^-) \Leftrightarrow f(\eta) \in \{\eta'\}^-$$

$$\Leftrightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \supseteq \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \supseteq \varphi(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}^e$$

が成り立つ。ここで $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{q}^e$ を含む極小 prime ideal なので、間に prime ideal はなく

$$\dim A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}^e = 0$$

となる。

$A_\mathfrak{p}$，$B_\mathfrak{q}$ は局所環なので、性質 12 から $\dim A_\mathfrak{p} \le \dim B_\mathfrak{q} + \dim A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}^e$ を得、$\dim A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}^e = 0$ より

$$\operatorname{codim}(Z, X) \le \operatorname{codim}(Y', Y)$$

となる。

性質 **12.** [5], Theorem 15.1(i)

$f : (A, m) \to (B, n)$ を noetherian local ring の morphism とすると、次式が成り立つ。

$$\dim B \le \dim A + \dim B/\mathfrak{m}B$$

(証明) $r = \dim A, s = \dim B/\mathfrak{m}B$ とすると、A のパラメータ系として $(x_1, \cdots, x_r)$、$B/\mathfrak{m}B$ のパラメータ系として $(\tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_s)$ が存在する ([1], Theorem 11.14)。ここで $\tilde{y}_i$ は $y_i \in B$ の $B/\mathfrak{m}B$ への像とする。

パラメータ系の定義から $\sqrt{(x_1, \cdots, x_r)} = \mathfrak{m}$, $\sqrt{(\tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_r)} = \mathfrak{n}/\mathfrak{m}B$ が成り立つ。前者からは、十分大きな整数 a に対し $\mathfrak{m}^a \subseteq \sum_i x_i A$ が得られる ([1], Corollary 7.16)。後者からは、十分大きな整数 b に対し $\mathfrak{n}^b \subseteq \mathfrak{m}B + \sum_i y_i B$ となる。

従って、$\mathfrak{n}^{ab} \subseteq \sum_i x_i B + \sum_i y_i B$ が得られ、これは $(x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_s)$ が B のパラメータ系をなしていることを示している[28]。$\dim B$ はパラメータ系の元の最小数なので、$\dim B \le r + s$ となる。(証明終)

[27] 実際には X の閉集合 $f^{-1}(Y') = \operatorname{Spec} A/\exists\mathfrak{a}$ における議論なので $\mathfrak{p}' \subseteq A' = A/\mathfrak{a}$ であるが、$\mathfrak{p}'$ に対応する A の prime ideal $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{a}$ が存在するので、その $\mathfrak{p}$ を用いる。

[28] 局所環の極大 ideal $\mathfrak{n}$ に対して $\mathfrak{n}^d \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{n} \Rightarrow \mathfrak{n} = \sqrt{\mathfrak{n}^d} \subseteq \sqrt{\mathfrak{q}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n} \Rightarrow \mathfrak{n} = \sqrt{\mathfrak{q}}$

(b)

$A\otimes_B k(y)$ は $k(y)$ 上 noetherian なので (A は有限生成 B 代数ゆえ $A\otimes_B k(y)$ は有限生成 $k(y)$ 代数、[1], Corollary 7.7)、zariski space である。

$y=f(x), x\in X$ に対し、$Z\,(\ni x)$ を $f^{-1}(y)$ における既約成分とすると、$f^{-1}(Y') \overset{Eq.24}{=} X\times_Y Y'$ における閉包 Z^- はそこで既約成分となる。

($\because$) Z' を $f^{-1}(Y')$ において Z^- を含む既約成分とおく。Z, Z' の generic point をそれぞれ η,η' とすると $Z=\{\eta\}^{-X_y}$ と書けるので、$Z=\{\eta\}^-\cap X_y=\{\eta\}^-\cap Z,\ Z'=\{\eta'\}^-$ とかける (Z' は $f^{-1}(Y')$ において既約閉)。よって

$$Z\subseteq Z' \Rightarrow Z=Z'\cap Z \Rightarrow \{\eta\}^-\cap Z=\{\eta'\}^-\cap Z$$

ここで X_y は zariski space であり、Z の generic point の一意性から、$\eta'=\eta$、よって $Z^-=\{\eta\}^-=Z'$ となる。($\because$ 終)

(a) から $\operatorname{codim}(Z^-,X)\le\operatorname{codim}(Y',Y)$ であり、Exercise 2.3.20(d) より

$$\dim Z^-\ge e+\dim Y'$$

を得る。

Exercise 2.3.20(e) から X,Y は affine としてよい。$Z\hookrightarrow Z^-$ による対応によって η が $\mathfrak{p}\,(\subseteq A\otimes_B (B/y)_{\tilde y})\mapsto \mathfrak{q}\,(\subseteq A\otimes_B B/y)$ に写される。A は flat なので $B/y\hookrightarrow (B/y)_{\tilde y}$ より

$$A\otimes_B B/y\hookrightarrow A\otimes_B (B/y)_{\tilde y}$$

さらには

$$(A\otimes_B B/y)/\mathfrak{q}\hookrightarrow (A\otimes_B (B/y)_{\tilde y})/\mathfrak{p}$$

$$\operatorname{Frac}(A\otimes_B B/y)/\mathfrak{q}\hookrightarrow \operatorname{Frac}(A\otimes_B (B/y)_{\tilde y})/\mathfrak{p}$$

$$\text{tr.d.}_k(A\otimes_B B/y)/\mathfrak{q}\le \text{tr.d.}_k(A\otimes_B (B/y)_{\tilde y})/\mathfrak{p}$$

となる。

$$Z^-=\operatorname{Spec}(A\otimes_B B/y)/\mathfrak{q},\ \ Z=\operatorname{Spec}(A\otimes_B (B/y)_{\tilde y})/\mathfrak{p}$$

なので、

$$\begin{aligned}\dim Z&=\text{tr.d.}_{k(y)}\operatorname{Frac}(A\otimes_B(B/y)_{\tilde y})/\mathfrak{p}=\text{tr.d.}_k\operatorname{Frac}(A\otimes_B(B/y)_{\tilde y})/\mathfrak{p}-\text{tr.d.}_k k(y)\\&\ge \text{tr.d.}_k\operatorname{Frac}(A\otimes_B B/y)/\mathfrak{q}-\text{tr.d.}_k\operatorname{Frac}B/y\\&=\dim Z^--\dim Y'\ge e\end{aligned}$$

を得る。

(c)

Y の open affine covering の一つを $T=\operatorname{Spec}B$ とし、$S=\operatorname{Spec}A\subseteq f^{-1}(T)$ となる open affine をとる。

$$g=f|_S: S\to T$$

とすると、S, T は integral scheme of finite type over k であり、g は finite type である。さらに

$$f(X) = f(S^-) \subseteq f(S)^- = g(S)^- \Rightarrow Y = f(X)^- \subseteq g(S)^- \subseteq Y$$

$$\Rightarrow g(S)^{-T} = g(S)^- \cap T = T$$

から g は dominant なので、g に対応する $B \hookrightarrow A$ は単射である。

[1], Exercise 5. 20 より、$B \ni \exists s \neq 0$ と、B 上代数的に独立な $t_1, \cdots, t_d \in A$ が存在し、$B[t_1, \cdots, t_d]_s \hookrightarrow A_s$ は整である。よって

$$B_s \hookrightarrow B_s[t_1, \cdots, t_d] \overset{\text{integral}}{\hookrightarrow} A_s$$

から

$$g_s : U = \operatorname{Spec} A_s \overset{[1],\text{Th.5.10}}{\twoheadrightarrow} \mathbf{A}^d_{B_s} := \operatorname{Spec} B_s[t_1, \cdots, t_d] \xrightarrow{g'} V = \operatorname{Spec} B_s$$

が得られるが、$U,\ V$ は各々S, T の開集合であり (従って X, Y の開集合でもある)、g_s は finite type、$U,\ V$ は integral scheme of finite type over k である。

$B_s[t_1, \cdots, t_d] \hookrightarrow A_s$ が整であり、$t_1, \cdots, t_d$ は A_s においても B_s 上代数的に独立なので

$$\dim A_s = \dim B_s[t_1, \cdots, t_d] = \dim B_s + d$$

U, V は X, Y の開集合ゆえ、$\dim A_s = \dim U = \dim X,\ \dim B_s = \dim V = \dim Y$ より $d = e$ である。

$y = f(x),\ x \in U$ とする。$B_s[t_1, \cdots, t_d] \hookrightarrow A_s$ が整で、$k(y) = \operatorname{Frac} B/\mathfrak{p} = \operatorname{Frac} B_s/\mathfrak{p}_s$ より $k(y)$ は B_s 代数なので、$B_s[t_1, \cdots, t_d] \otimes_{B_s} k(y) \hookrightarrow A_s \otimes_{B_s} k(y)$ は整であり ([1], Exercise 5.3)、よって

$$\dim A_s \otimes_{B_s} k(y) = \dim \operatorname{Spec}(B_s[t_1, \cdots, t_e] \otimes_{B_s} k(y)) = \dim \operatorname{Spec} k(y)[t_1, \cdots, t_e] = e$$

となる。

一方、

$$g : \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B,\ \operatorname{Spec} A_s \to \operatorname{Spec} B_s \Rightarrow g^{-1}(\operatorname{Spec} B_s) = \operatorname{Spec} A_s$$

なので、Theorem 3.3, Step. 7 より

$$A_s \otimes_{B_s} k(y) = A_s \otimes_B k(y) = U_y$$

が成り立ち

$$\dim U_y = e$$

を得る。

(d)
$y = f(x),\ x \in X$ に対して E_h は次のように定義される。

$$E_h := \{x \in X \mid \dim Z \geq h,\ X_{f(x)} \supseteq Z (\ni x) : \text{ irreducible component}\}$$

(1) $E_e = X$ は (b) より明らか。
(2) $U \subseteq X$ を (c) で得られた開集合とする。x を含む X_y の既約成分を Z とすると、もし $Z \cap U_y \neq \varnothing$ だと式 (28) から $\dim Z = \dim U_y = e$ なので[29]、$h > e$ のときは $E_h \subseteq X - U$ である。従って $E_h^- \subseteq U^c = X - U \subsetneq X$ より E_h は dense ではない。
(3) $h = e$ のときは $E_e = X$ より E_h は closed である。
　$h > e$ の場合は (2) より

$$X \supsetneq E_h^- = \bigcup_{i \in I} V^i,\ |I| < \infty,\ V^i:\ \text{irreducible component}$$

と既約成分分解すると、$\dim V^i < \dim X$ である。

$$g^i = f|_{V^i} : V^i \to f(V^i)^-$$

に対し V^i は既約閉、よって integral subscheme となり、$f(V^i)^-$ も同様に integral subscheme [30]、g^i は dominant で finite type である。
　すると帰納法の仮定から

$$F_h^i = \{x \in V^i |\dim Z^i \geq h,\ V_{f(x)}^i \supseteq Z^i (\ni x):\ \text{irreducible component}\}$$

は closed である。

$$E_h = \bigcup_i F_h^i$$

を示す。
　$x \in E_h = \{x \in X | \dim Z \geq h,\ x \in Z \subseteq X_y,\ y = f(x)\}$ とすると、$\forall z \in Z \subseteq f^{-1}(y)$ から Z は z を含む X_y の既約成分でもある。従って、$z \in E_h$ より $Z \subseteq E_h$ となる[31]。Z は E_h^- においても既約なので、E_h^- のある既約成分 V^i に含まれる: $x \in Z \subseteq V^i$。
　このとき、$g = f|_{V^i} : V^i \to f(V^i)^-$ に対し

$$V_y^i = g^{-1}(y) = f|_{V^i}^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap V^i = X_y \cap V^i \ \Rightarrow\ Z \subseteq V_y^i$$

より、Z は V_y^i の既約成分であり、$x \in F_h^i$ となる。従って、$E_h \subseteq \bigcup_i F_h^i$ が得られる。$F_h^i \subseteq E_h$ は明らかなので

$$E_h = \bigcup_i F_h^i$$

[29] 式 (28) において $k' = k(y)$ とすると $X' = X \times_k k(y)$ であり、$X_y = X \times_Y k(y)$ とは異なる。しかし、A は有限生成 B 代数なので、$A \otimes_B k(y)$ は有限生成 $k(y)$ 代数となり、証明は全く同様に成立する。
[30] reduced は局所的なので、integral scheme X の subscheme は reduced である。実際、$\mathfrak{N}(A) = 0 \Rightarrow \mathfrak{N}(A/\mathfrak{p}) = 0$ より $\operatorname{Spec} A : \text{reduced} \Rightarrow \operatorname{Spec} A/\mathfrak{p} : \text{reduced}$ である。
[31] 詳しく述べると、$f^{-1}(y)$ の既約成分分解 $f^{-1}(y) = \bigcup_{i_y} Z_{i_y}^y$ に対し

$$E_h = \coprod_{y \in Y} \bigcup_{\dim Z_{i_y}^y \geq h} Z_{i_y}^y$$

である。disjoint union となるのは $X = \coprod_{y \in Y} f^{-1}(y)$ による。

E_h は閉集合である。

(e)
$h < 0$ のとき。

$$X_y = f^{-1}(y) = \varnothing \Leftrightarrow y \notin f(X) \tag{29}$$

なので、Exercise 2.3.19 より $C_h = Y - f(X) = f(X)^c$ は constructible である。
$h \geq 0$ のとき。

$$C_h = f(E_h) - f(E_{h+1})$$

($\because$) まず式 (29) より $C_h \subseteq f(X)$ である。x を含む $X_{f(x)}$ の既約成分を Z_x とすると

$$y \in C_h \Leftrightarrow \dim X_y = h \Leftrightarrow \max_{x \in f^{-1}(y)} \dim Z_x = h \Leftrightarrow \dim Z_{\exists x_0} = h, f(x_0) = y$$

このとき、$x_0 \in E_h \Rightarrow y = f(x_0) \in f(E_h)$ である。しかし、仮に $y \in f(E_{h+1})$ とすると $y = f(x_1), x_1 \in E_{h+1} \Rightarrow \dim X_y \geq \dim Z_{x_1} \geq h+1 \Rightarrow y \notin C_h$ となってしまうので、$y \notin f(E_{h+1})$ より $y \in f(E_h) - f(E_{h+1})$ である。

逆に $y \in f(E_h) - f(E_{h+1})$ とすると、まず $y = f(x_2), x_2 \in E_h \Rightarrow \dim X_y \geq \dim Z_{x_2} \geq h$ が得られる。ここで、もし $y \in C_r, r \geq h+1$ とすると、$h+1 \leq r = \dim X_y = \max_{x \in f^{-1}(y)} \dim Z_x = \dim Z_{\exists x_3} \Rightarrow x_3 \in E_{h+1}, y = f(x_3) \Rightarrow y \in C_s, s \geq h+1 \Rightarrow y \notin C_h$ となるので、$y \in C_h$ である。($\because$ 終)

$C_h = f(E_h) - f(E_{h+1})$ であり、E_h, E_{h+1} は constructible なので Exercise 2.3.19 より $C_h = f(E_h) - f(E_{h+1})$ は constructible である。

$f(E_e)^- = f(X)^- = Y$ より、$f(E_e)$ は dense であり Exercise 2.3.18(b) から開集合 (当然 dense) を含む。

一方、閉集合 E_{e+1} の既約成分分解を

$$E_{e+1} = \bigcup_{i \in I} V^i,\ |I| < \infty,\ V^i:\ \text{irreducible component}$$

とすると、$g^i : V^i \to f(V^i)^-$ に対し (c) より開集合 $\exists U^i \subseteq V^i$ が存在し、$y \in g^i(U^i)$ に対し $\dim U^i_y = \dim V^i - \dim f(V^i)^-$ となる。ここで、$(g^i)^{-1}(y) = V^i_y$ なので、V^i_y の任意の元 x に対し x を含む V^i_y の既約成分を Z とすると、式 (28) より $\dim U^i_y = \dim Z$ から

$$\dim f(V^i)^- = \dim V^i - \dim Z \leq \dim X - 1 - \dim Z$$

が成り立つ。ここで、$E^-_{e+1} \subsetneq X$ より $\dim V^i \leq \dim X - 1$ を用いた。

$x \in Z \subseteq V^i_y \subseteq V^i \subseteq E_{e+1}$ に対し (d)(3) で示したように、$x \in F^i_{e+1},\ x \in Z \subseteq V^i_y$ となり $\dim Z \geq e+1$ を得る。

$$\dim f(V^i)^- \leq \dim X - 1 - \dim Z \leq \dim Y - 2$$

から $f(V^i)^- \neq Y \Rightarrow (f(V^i)^-)^c \neq \varnothing$ となり、Y が既約なので

$$f(E_{e+1})^- = \bigcup_i f(V^i)^- \Rightarrow (f(E_{e+1})^-)^c = \bigcap_i (f(V^i)^-)^c \neq \varnothing$$

を得る。

$$C_e = f(E_e) \cap f(E_{e+1})^c \supseteq f(E_e) \cap (f(E_{e+1})^-)^c$$

において $f(E_e)$ は非空開集合を含み、$(f(E_{e+1})^-)^c$ は非空な開集合なので、それら開集合の共通部分は非空な開集合 (dense) となる (Y は既約)。

2.3.23

Theorem 3.3 で示されているように、variety Y は代数的閉体 k 上の affine variety としてよく、しかも

$$t(Y) = \operatorname{Spec} A(Y)$$

である。よって

$$t(V \times W) = \operatorname{Spec} A(V \times W) \overset{\text{Exe.2.3.15(b)}}{=} \operatorname{Spec} A(V) \otimes_k A(W)$$

$$= \operatorname{Spec} A(V) \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} A(W) = t(V) \times_{\operatorname{Spec} k} t(W)$$

が成り立つ。

References

[1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald: Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, 1963

[2] R. Vakil: Foundations of Algebraic Geometry, Class 9, https://math.stanford.edu/ vakil/0506-216/216class09.pdf, 2007

[3] 彌永昌吉、小平邦彦: 現代数学概説 I, 岩波, 1961

[4] 永田雅宜: 可換体論, 裳華房, 1967

[5] 松村英之: 可換環論, 共立出版, 2000