2 Schemes

2.2 Schemes

2.2.1

$X = \operatorname{Spec} A,\ Y = \operatorname{Spec} A_f$ とする。Proposition 2.3 (a) より $(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)})$, $(\operatorname{Spec} A_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_f})$ は locally ringed space である $((\mathcal{O}_X|_{D(f)})_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}})$。このとき、morphism

$$(\varphi, \varphi^{\#}) : D(f) \to \operatorname{Spec} A_f$$

が存在することを示す。

まず ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ に対して $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}A_f \subseteq A_f$ を対応させる写像を $\tilde{\varphi}$ とすると、その制限写像として

$$\varphi : D(f) \to \operatorname{Spec} A_f,\ \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^e = \mathfrak{p}A_f$$

が得られる。$f \notin \mathfrak{p}$ より $\mathfrak{p}A_f$ は A_f の prime ideal なので $\varphi(\mathfrak{p}) \in \operatorname{Spec} A_f$ である。このとき、φ は全単射である ([1], Proposition 3.11, (iv))。

A_f の ideal は A の ideal の拡大 ideal に限られるので ([1], Proposition 3.11, (i))、$\operatorname{Spec} A_f$ の閉集合は A のある ideal $\mathfrak{a}$ を用いて $V(\tilde{\varphi}(\mathfrak{a}))$ と書ける。このとき、

$$\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \overset{*}{\Leftrightarrow} \varphi(\mathfrak{p}) \supseteq \varphi(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \varphi(\mathfrak{p}) \in V(\varphi(\mathfrak{a})) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in \varphi^{-1}(V(\tilde{\varphi}(\mathfrak{a})))$$

より $\varphi^{-1}(V(\tilde{\varphi}(\mathfrak{a}))) = V(\mathfrak{a})$ が成立し、φ は全単射なので $V(\tilde{\varphi}(\mathfrak{a})) = \varphi(V(\mathfrak{a}))$ も成立するので、φ は連続かつ閉写像、それゆえ位相同型となる。ここで $\overset{*}{\Leftrightarrow}$ が成立するのは $a \in \mathfrak{p} \Rightarrow a/1 \in \mathfrak{p}A_f = \mathfrak{q}A_f \Rightarrow a/1 = b/f^i,\ b \in \mathfrak{q} \Rightarrow af^j = bf^k \in \mathfrak{q} \Rightarrow a \in \mathfrak{q}$ だからである。

次に

$$\varphi^{\#} : \mathcal{O}_Y \to \varphi_*(\mathcal{O}_X|_{D(f)})$$

が isomorphim となることを示す。

$s \in \mathcal{O}_Y(V)$ に対し、$\mathfrak{p}^e \in V \subseteq Y \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in \varphi^{-1}(V) \subseteq D(f)$ とすると

$$s(\mathfrak{p}^e) = s\varphi(\mathfrak{p}) \in (A_f)_{\mathfrak{p}^e} = A_{\mathfrak{p}}$$

から $s\varphi \in \mathcal{O}_X|_{D(f)}(\varphi^{-1}(V))$ となる。よって

$$\varphi^{\#}(V) : \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X|_{D(f)}(\varphi^{-1}(V)),\ s \mapsto s\varphi$$

が定義できる。

制限写像との可換性は、$s \in \mathcal{O}_Y(V),\ W \subseteq V,\ \mathfrak{p}^e \in W$ に対して

$$\varphi^{\#}(W)(s|_W)(\mathfrak{p}^e) = s|_W(\varphi(\mathfrak{p})) = s\varphi(\mathfrak{p})$$

$$\varphi^{\#}(V)(s)|_W(\mathfrak{p}^e) = \varphi^{\#}(V)(s)(\mathfrak{p}^e) = s\varphi(\mathfrak{p})$$

なので、成立する。従って $\varphi^{\#}$ は morphism である。

逆に $t \in \mathcal{O}_X|_{D(f)}(\varphi^{-1}(V))$, $\mathfrak{p} \in \varphi^{-1}(V) \subseteq D(f)$ とすると $\mathfrak{p}^e \in V$ であり、$t(\mathfrak{p}) = t\varphi^{-1}(\mathfrak{p}^e) \in A_{\mathfrak{p}} = (A_f)_{\mathfrak{p}^e}$ より $t\varphi^{-1} \in \mathcal{O}_Y(V)$ である。よって、

$$\psi : \mathcal{O}_X|_{D(f)}(\varphi^{-1}(V)) \to \mathcal{O}_Y(V),\ t \mapsto t\varphi^{-1}$$

とおくと、先ほどと同様、制限写像と可換なので、ψ は morphism である。このとき、

$$\psi\varphi^{\#} : s \mapsto \psi(s\varphi) = s\varphi\varphi^{-1} = s,\ \varphi^{\#}\psi : t \mapsto \varphi^{\#}(t\varphi^{-1}) = t\varphi^{-1}\varphi = t$$

より、$\varphi^{\#}$ は isomorphism である。このとき、$\varphi^{\#}_{\mathfrak{p}}$ も isomorphism となり、従って local homomorphism である。

以上により

$$(\varphi, \varphi^{\#}) : D(f) \to \operatorname{Spec} A_f$$

は isomorphism である。

2.2.2

Scheme X の元 $\mathfrak{p} \in U$ に対し、$\mathfrak{p} \in V = \operatorname{Spec} A \subseteq X$ となる V が存在する。$\{D(f)\}$ は開基なので $\mathfrak{p} \in \exists D(f) \subseteq V \cap U$ となる f が存在する。

Exercise 2.2.1 で示したように、$D(f)$ と $\operatorname{Spec} A_f$ は isomorphic なので $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ は scheme である。

2.2.3

(a) $s_P^n = 0,\ 0 \neq s_P \in \mathcal{O}_{X,P}$ とすると $s_P = s \in \mathcal{O}_X(V), P \in \exists V$ と表されるので、$s \neq 0$ は $\mathcal{O}_X(V)$ の冪零元である。逆に $s^n = 0, 0 \neq s \in \mathcal{O}_X(U)$ とすると $s_P^n = 0, s_P \neq 0, \exists P \in U$ より s_P は $\mathcal{O}_{X,P}$ の冪零元である。

(b) まず $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)_{\mathrm{red}}$ が presheaf となることは

$$s \in \mathfrak{N}(\mathcal{O}_X(U)) \Rightarrow s^n = 0, \exists n > 0 \Rightarrow \rho_{UV}(s)^n = \rho_{UV}(s^n) = 0 \Rightarrow \rho_{UV}(s) \in \mathfrak{N}(\mathcal{O}_X(V))$$

より、restriction map

$$\rho_{UV}^{\mathrm{red}} : \mathcal{O}_X(U)/\mathfrak{N}(\mathcal{O}_X(U)) \to \mathcal{O}_X(V)/\mathfrak{N}(\mathcal{O}_X(V)),\ \tilde{s} \mapsto \widetilde{\rho_{UV}(s)}$$

が定義できることから明らかである。

$(X, \mathcal{O}_X)$ が affine scheme とし、$X = \operatorname{Spec} A$ とする。$\mathfrak{N} = \cap_{\mathfrak{p}:\,\mathrm{prime}}\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$ なので ([1], Proposition 1.8)、

$$\sigma : A \to A_{\mathrm{red}}$$

に対応する

$$\varphi : \operatorname{Spec} A_{\mathrm{red}} \to \operatorname{Spec} A$$

は全単射である。また、

$$\varphi^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\sigma(\mathfrak{a}))$$

より連続であり (Proposition 2.3(b) の証明中)、全単射ゆえ $V(\mathfrak{a}) = \varphi(V(\sigma(\mathfrak{a})))$ も成立するので位相同型である。

よって、morphism

$$\varphi^{\#} : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \to \varphi_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_{\mathrm{red}}} \tag{1}$$

$$\varphi^{\#}(V) : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(V) \to \varphi_*(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_{\mathrm{red}}})(V) = O_{\operatorname{Spec} A_{\mathrm{red}}}(\varphi^{-1}(V)),\ s \mapsto s\varphi$$

が存在する (Proposition 2.3(b))。

$s \in \mathfrak{N}(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(V)) \Rightarrow s^n = 0, \exists n > 0$ とすると

$$(\varphi^{\#}(V)(s))^n(\tilde{\mathfrak{p}}) = (s\varphi(\tilde{\mathfrak{p}}))^n = (s(\mathfrak{p}))^n = s^n(\mathfrak{p}) = 0$$

より

$$\varphi^{\#}(V)(s) \in \mathfrak{N}(O_{\operatorname{Spec} A_{\mathrm{red}}}(\varphi^{-1}(V)))$$

である。$O_{\operatorname{Spec} A_{\mathrm{red}}, \tilde{\mathfrak{p}}} = (A_{\mathrm{red}})_{\tilde{\mathfrak{p}}} = (A_{\mathfrak{p}})_{\mathrm{red}}$ には非零冪零元は存在しないので ([1], Propotion 1.7)、(a) より $O_{\operatorname{Spec} A_{\mathrm{red}}}$ は reduced であり、$\varphi^{\#}(V)(s) = 0$ となる。

従って、

$$\widetilde{\varphi^{\#}}(V) : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(V)_{\mathrm{red}} \to \varphi_*(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_{\mathrm{red}}})(V)$$

が定義でき、sheaf 化の U.P.(Universal Property) から morphism

$$\tilde{\varphi} : (\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})_{\mathrm{red}} \to \varphi_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_{\mathrm{red}}}$$

を得る。

これが isomorphism であることを示すために stalk をとると、左辺の stalk は

$$(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})_{\mathrm{red}, \tilde{\mathfrak{p}}} = \varinjlim_{\tilde{\mathfrak{p}} \in V} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(V)_{\mathrm{red}} \overset{(*)}{=} (\varinjlim_{\mathfrak{p} \in V} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(V))_{\mathrm{red}} = (\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, \mathfrak{p}})_{\mathrm{red}} = (A_{\mathfrak{p}})_{\mathrm{red}}$$

となる。ここで等号 $\overset{(*)}{=}$ は、完全系列

$$0 \to \mathfrak{N}(B_i) \to B_i \to B_i/\mathfrak{N}(B_i) \to 0$$

の順極限も完全系列となるので ([1], Exercise 2.19)

$$\varinjlim(B_i/\mathfrak{N}(B_i)) = \varinjlim B_i / \varinjlim \mathfrak{N}(B_i) = \varinjlim B_i / \mathfrak{N}(\varinjlim B_i)$$

が得られるからである ([1], Exercise 2.22)。

一方、右辺の stalk は φ が位相同型なので

$$(\varphi_*(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_{\mathrm{red}}}))_{\tilde{\mathfrak{p}}} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_{\mathrm{red}}, \tilde{\mathfrak{p}}} = (A_{\mathrm{red}})_{\tilde{\mathfrak{p}}} = (A_{\mathfrak{p}})_{\mathrm{red}}$$

となり、両者は等しい。よって $\widetilde{\varphi}$ は sheaf isomorphism であり

$$(\varphi, \widetilde{\varphi}) : (\operatorname{Spec} A_{\mathrm{red}}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_{\mathrm{red}}}) \overset{\sim}{\to} (\operatorname{Spec} A, (\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})_{\mathrm{red}}) \tag{2}$$

は scheme isomorphism、$(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})_{\mathrm{red}}$ は affine scheme である。

$(X, \mathcal{O}_X)$ が scheme の場合、$\forall x \in X$ に対し近傍 $x \in U$ が存在し、$U = \operatorname{Spec} A$ とおけるので、既に示したことから $(U, (\mathcal{O}_X|_U)_{\mathrm{red}})$ は affine scheme である。従って、あとは $(\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}}|_U \approx (\mathcal{O}_X|_U)_{\mathrm{red}}$ を示せばよいが、$V \subseteq U$ のとき、右辺は presheaf $\mathcal{O}_X|_U(V)_{\mathrm{red}} = \mathcal{O}_X(V)_{\mathrm{red}}$ の sheaf 化であり、左辺は presheaf $\mathcal{O}_X(V)_{\mathrm{red}}|_U = \mathcal{O}_X(V)_{\mathrm{red}}$ の sheaf 化なので等しい。よって、$(X, (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}})$ は scheme である。

さらに、式 (1) から

$$(\varphi, \varphi^{\#}) : (\operatorname{Spec} A_{\mathrm{red}}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_{\mathrm{red}}}) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$$

が得られるので、式 (2) と合わせると

$$(\operatorname{Spec} A, (\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})_{\mathrm{red}}) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$$

となる。従って

$$X_{\mathrm{red}} = (X, (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}}) \to (X, \mathcal{O}_X) = X$$

が成立する。

(c) Morphism

$$(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y), \ \ X : \mathrm{reduced}$$

に対し

$$(g, g^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, (\mathcal{O}_Y)_{\mathrm{red}})$$

を次のように定める。まず、g は

$$g = f : X \to Y$$

とする。

$$f^{\#}(V) : \mathcal{O}_Y(V) \to f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)), \ V \subseteq Y$$

において、$\mathcal{O}_Y$ の冪零元は $\mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ の冪零元に写るが $\mathcal{O}_X$ は reduced なのでそれは 0 である。すなわち $\mathfrak{N}(\mathcal{O}_Y) \to 0$ となるので、presheaf から sheaf への morphism

$$(\mathcal{O}_Y(V))_{\mathrm{red}} \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) = g_*\mathcal{O}_X(V)$$

が定義できる。よって sheaf 化すれば

$$g^{\#} : (\mathcal{O}_Y)_{\mathrm{red}} \to \ g_*\mathcal{O}_X$$

が得られ、$g^{\#}h^{\#} = f^{\#}$ を満たす。

(b) より得られた morphism を $h = (id_Y, h^{\#}) : (Y, (\mathcal{O}_Y)_{\mathrm{red}}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ とする。

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dotted, "\exists g"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ Y_{\mathrm{red}} \arrow[rr, "h"] & & Y \end{tikzcd}$$

このとき、$(g, g^{\#})$ が一意的であることを示す。

まず $id_Y \circ g = f$ より g は一意的である。

一方、

$$h^{\#} : \mathcal{O}_Y \to (id_Y)_*(\mathcal{O}_Y)_{\mathrm{red}}$$

は、$\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B \subseteq Y$ に対し

$$h^{\#}_{\mathfrak{p}} : \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}} \to \lim_{\mathfrak{p} \in V} \mathcal{O}_Y(V)_{\mathrm{red}} \overset{*}{=} (B_{\mathfrak{p}})_{\mathrm{red}}$$

が全射なので $g^{\#}_{\mathfrak{p}}$ は一意的である。従って、$g^{\#}$ も一意的である。

2.2.4

([2], 2.3 Schemes に補足追加)

$f : X \to \operatorname{Spec} A$ が scheme morphism とする。

$$\varphi := f^{\#}(\operatorname{Spec} A) : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A) = A \to f_*\mathcal{O}_X(\operatorname{Spec} A) = \mathcal{O}_X(X)$$

とおくと $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Rings}}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ なので

$$\alpha : f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Sch}}(X, \operatorname{Spec} A) \mapsto \varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Rings}}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

が定義できる。

(単射性)

ringed space の morphism の合成

$$(h, h^{\#}) : X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z$$

は

$$h = gf$$

$$h^{\#}(V) = f^{\#}(g^{-1}(V)) \circ g^{\#}(V),\ V \subseteq Z \tag{3}$$

で定義される (Stack Project, Definition 6.25.3)。これは図式で表すと

$$\mathcal{O}_Z(V) \overset{g^{\#}(V)}{\longrightarrow} \mathcal{O}_Y(g^{-1}(V)) \overset{f^{\#}(g^{-1}(V))}{\longrightarrow} \mathcal{O}_X(f^{-1}g^{-1}(V)) = h_*\mathcal{O}_X(V)$$

となる。制限写像との可換性、および local 性は f, g のそれらを引き継いでいる。
特に $f \circ \iota_U : U \hookrightarrow X \to Y$ に対しては、ι_U には ρ_{XU} が対応し、

$$(f \circ \iota_U)^{\#}(V) = \rho_{f^{-1}(V), f^{-1}(V) \cap U} f^{\#}(V) \tag{4}$$

となる。
よって global section をとれば

$$h^{\#}(Z) = (gf)^{\#}(Z) = f^{\#}(Y) g^{\#}(Z)$$

である。
従って下式図は可換となる。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Sch}}(X, Y) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Rings}}(A, \mathcal{O}_X(X)) \arrow[d, "\gamma"] \\
\prod_i \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Sch}}(U_i, Y) \arrow[r, "\delta"] & \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Rings}}(A, \mathcal{O}_X(U_i))
\end{tikzcd}$$

ここで、$\gamma : \prod_i \varphi \mapsto \rho_{XU_i} \varphi$ であり、$\beta : f \mapsto \prod_i f \circ \iota_{U_i}$ は単射である。δ は Proposition 2.3 から全単射であるから、α は単射となる。
(全射性)
改めて $\varphi : A \to \mathcal{O}_X(X)$ とする。X は scheme なので $X = \cup_i U_i,\ U_i$: affine scheme とできる。このとき、ring homomorphism

$$\varphi|_{U_i} = \rho_{XU_i} \varphi : A \to \mathcal{O}_X(U_i)$$

に対応する affine 上の scheme morphism を

$$f_i : U_i \to \operatorname{Spec} A$$

とする。これより $f : X \to \operatorname{Spec} A,\ f|_{U_i} = f_i$ を定義するためには $f_i|_W = f_j|_W,\ W = U_i \cap U_j$ が成り立てばよい。
$\{D(g)\}_g$ は開基ゆえ、$W = U_i \cap U_J = \cup_{g \in W} D(g)$ とかけ、似たような図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Sch}}(W, Y) \arrow[r, "\alpha^W"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Rings}}(A, \mathcal{O}_X(W)) \arrow[d] \\
\prod_g \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Sch}}(D(g), Y) \arrow[r] & \prod_g \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Rings}}(A, \mathcal{O}_X(D(g)))
\end{tikzcd}$$

が得られるが、同じ理由から α^W も単射となる。
f_i は $\varphi|_{U_i}$ に対応し、合成は合成に対応するので、α^W により

$$f_i|_W = f_i \iota_W : W \to U_i \to \operatorname{Spec} A,\ \varphi|_{U_i}|_W = \rho_{U_i W} \varphi|_{U_i} : A \to \mathcal{O}_{U_i}(U_i) \to \mathcal{O}_{U_i}(W)$$

は対応している。同様に $f_j|_W$ は $\varphi|_{U_j}|_W$ に対応する。しかるに、

$$\varphi|_{U_i}|_W = \rho_{U_i W}(\varphi|_{U_i}) = \rho_{U_i W}(\rho_{X U_i}\varphi) = \rho_{XW}\varphi = \varphi|_{U_j}|_W$$

であり、α^W は単射なので $f_i|_W = f_j|_W$ を得る。

$f^\#$ の制限写像との可換性は f_i の可換性から示すことができる。$W \subseteq V \subseteq Y$ に対し

$$\rho_{f^{-1}(V)\cap U_i, f^{-1}(W)\cap U_i} f_i^\#(V) = f_i^\#(W)\rho_{VW}$$

が成り立つ。ここで式 (4) から

$$f_i^\#(V) = \rho_{f^{-1}(V), f^{-1}(V)\cap U_i} f^\#(V)$$

が成立するので (W も同様)、整理すると

$$\rho_{f^{-1}(V), f^{-1}(W)\cap U_i} f^\#(V) = \rho_{f^{-1}(W), f^{-1}(W)\cap U_i} f^\#(W)\rho_{VW}$$

となる。左辺は

$$\rho_{f^{-1}(W), f^{-1}(W)\cap U_i}\rho_{f^{-1}(V), f^{-1}(W)} f^\#(V) = \rho_{f^{-1}(V), f^{-1}(W)} f^\#(V)|_{f^{-1}(W)\cap U_i}$$

であり、右辺は $f^\#(W)\rho_{VW}|_{f^{-1}(W)\cap U_i}$ で、これらが $f^{-1}(W)$ をカバーする $f^{-1}(W)\cap U_i$ で等しいので

$$\rho_{f^{-1}(V), f^{-1}(W)} f^\#(V) = f^\#(W)\rho_{VW}$$

が成り立ち、制限写像と可換となる。

また、$f_x^\# : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,A, f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ は local である。実際、$x \in U_i$ とすると

$$f_x^\# : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,A, f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{U_i,x}$$

となるが、これは local homomorphism $(f_i^\#)_x$ に等しい。

2.2.5

Ring homomorphism

$$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X(X),\ n \mapsto n \cdot 1$$

が存在するが、これは一意的である。Exercise 2.2.4 より、これに対応する

$$f : X \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$$

が一意的に存在する。

2.2.6

Zero ring 0 に prime ideal はないので $\operatorname{Spec} 0 = \varnothing$ であり、$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} 0} = \mathcal{O}_{\varnothing} = 0$ なので、

$$(f, f^{\#}) = (\varnothing, 0) : (\operatorname{Spec} 0, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} 0}) = (\varnothing, 0) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

は morphism である。

2.2.7

Scheme morphism

$$f : \operatorname{Spec} K \to X$$

があったとする。$\operatorname{Spec} K = \{(0)\}$ なので $x = f((0)) \in X$ とすると $U \subseteq X$ に対し

$$f^{\#}(U) : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}(f^{-1}(U))$$

$$f^{\#}_{(0)} : \mathcal{O}_{X, f((0))} = \mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_{(0),(0)} = K$$

となるが、$f^{\#}_{(0)}$ は local homomorphism なので K の極大 ideal (0) に対し

$$(f^{\#}_{(0)})^{-1}((0)) = \ker f^{\#}_{(0)} = \mathfrak{m}_x$$

である。よって

$$\mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \approx f^{\#}_{(0)}(\mathcal{O}_x) \subseteq K$$

が得られる。

逆に

$$k(x) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \hookrightarrow K,\ \exists x \in X$$

のとき、scheme morphism $(f, f^{\#}) : \operatorname{Spec} K \to X$ が存在することを示す。まず、

$$f : \operatorname{Spec} K = \{(0)\} \to X,\ (0) \mapsto x$$

とすると、f は自明に連続である。
次に $f^{\#} : \mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}$ を定義する。$U \subseteq X$ に対し、

$$\mathcal{O}_{(0)}(f^{-1}(U)) = \begin{cases} \mathcal{O}_{(0)}(0) = K; & x \in U \\ \mathcal{O}_{(0)}(\varnothing) = 0; & x \notin U \end{cases}$$

なので

$$f^{\#}(U) = \begin{cases} \iota\varphi\mu_x; & x \in U \\ 0; & x \notin U \end{cases}$$

とすると、

$$f^{\#}(U) : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{(0)}(f^{-1}(U))$$

を満たす。ここで、$x \in U$ のとき

$$\mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\mu_x} \mathcal{O}_x \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \overset{\iota}{\hookrightarrow} K$$

である。

$f^{\#}$ は restriction map と可換なので sheaf morphism である。

$(\because) f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}$ の restriction map は

$$\rho'_{UV} = \begin{cases} K; & x \in V \\ 0; & x \notin V \end{cases}$$

で与えられる。$V \subseteq U$ のとき、$x \notin V$ なら $\mathcal{O}_{(0)}(f^{-1}(V)) = 0$ より下図は可換となり、$x \in V$ なら $\mathcal{O}_{(0)}(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_{(0)}(f^{-1}(V)) = K$ よりやはり下図は可換である。よって $f^{\#}$ は morphism である。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \arrow[r, "f^{\#}(U)"] \arrow[d, "\rho_{UV}"'] & \mathcal{O}_{(0)}(f^{-1}(U)) \arrow[d, "\rho'_{UV}"] \\
\mathcal{O}_X(V) \arrow[r, "f^{\#}(V)"] & \mathcal{O}_{(0)}(f^{-1}(V))
\end{tikzcd}$$

さらに

$$f^{\#}_{(0)} : \mathcal{O}_x \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \overset{\iota}{\hookrightarrow} K$$

より $f^{\#}_{(0)}(\mathfrak{m}_x) = 0 \Rightarrow \ker f^{\#}_{(0)} \supseteq \mathfrak{m}_x$ となるが、$\mathfrak{m}_x$ は極大なので $f^{\#}_{(0)} = \iota\varphi = 0$ でない限り $(f^{\#}_{(0)})^{-1}((0)) = \ker f^{\#}_{(0)} = \mathfrak{m}_x$ である。よって、この場合は $f^{\#}_{(0)}$ は local homomorphism であり

$$(f, f^{\#}) : \operatorname{Spec} K \to X$$

は scheme morphism となる。

$f^{\#}_{(0)} = \iota\varphi = 0$ の場合、$\mathcal{O}_x = 0$ より ($\mathcal{O}_x \neq 0$ とすると必ず極大 ideal が存在し ([1], Theorem 1.3)、$\varphi \neq 0 \Rightarrow \iota\varphi \neq 0$)、$f^{\#}_{(0)}$ は local となり $f : \operatorname{Spec} K \to X$ は morphism である。

2.2.8

k 上の scheme $X, A = k[\epsilon]/\epsilon^2$ の間の k-morphism を

$$\varphi : \operatorname{Spec} A \to X$$

とし、$x := \varphi((\epsilon)) \in X$ とおく。$\alpha : X \to \operatorname{Spec} k$ とするとその k-morphism 性から

$$\alpha\varphi = \iota^* \tag{5}$$

となる。

$$\varphi^{\#}_{(\epsilon)} : \mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A,(\epsilon)} = A$$

は local homomorphism なので $(\varphi^{\#}_{(\epsilon)})^{-1}((\epsilon)) = \mathfrak{m}_x$ であり、従って

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \hookrightarrow A/(\epsilon),\ \tilde{a} \mapsto \widetilde{\varphi^{\#}_{(\epsilon)}(a)}$$

が定義できて、$\tilde{\varphi}\psi = \sigma\varphi^{\#}_{(\epsilon)}$ を満たす (σ, ψ は標準的全射、下図式参照)。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, bend right, "\sigma"'] & \mathcal{O}_x \arrow[l, "\varphi^{\#}_{(\epsilon)}"'] \arrow[d, "\psi"] \\
A/(\epsilon) = k \arrow[u, "\iota"'] \arrow[ur, "\alpha^{\#}_x"] \arrow[r, bend right, "\tilde{\alpha} := \psi\alpha^{\#}_x"'] & \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \arrow[l, "\tilde{\varphi}"']
\end{tikzcd}$$

この図式において可換関係

$$\tilde{\alpha} = \psi\alpha^{\#}_x, \iota \overset{(5)}{=} \varphi^{\#}_{(\epsilon)}\alpha^{\#}_x, \tilde{\varphi}\psi = \sigma\varphi^{\#}_{(\epsilon)}, \sigma\iota \overset{**}{=} \mathrm{id}_k$$

があるので、$\tilde{\varphi}\tilde{\alpha} = \mathrm{id}_k$ が成り立つ ((**) は ι が埋込だから)。$\tilde{\varphi}$ は単射なので $\tilde{\alpha}\tilde{\varphi} = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x}$ も成り立ち[1]、よって

$$k(x) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \approx k$$

となる。

次に T_x の元を与える。$\varphi^{\#}_{(\epsilon)}(\mathfrak{m}_x) \subseteq (\epsilon)$ より $a \in \mathfrak{m}_x$ に対し、$\varphi^{\#}_{(\epsilon)}(a) = b\epsilon, b \in k$ とかけるので、

$$\gamma : \mathfrak{m}_x \to k, a \mapsto \varphi^{\#}_{(\epsilon)}(a)/\epsilon = b$$

が定義できる。さらに $a_1, a_2 \in \mathfrak{m}_x$ に対して $\varphi^{\#}_{(\epsilon)}(a_1a_2) = b_1b_2\epsilon^2 = 0$ より $\gamma(\mathfrak{m}_x^2) = 0$ を満たすので、

$$\tilde{\gamma} : \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to k,\ \tilde{a} \mapsto \gamma(a)$$

も定義できる。

[1] $z = \tilde{\alpha}\tilde{\varphi}(y) \Rightarrow \tilde{\varphi}(z) = \tilde{\varphi}\tilde{\alpha}\tilde{\varphi}(y) = \tilde{\varphi}(y) \Rightarrow z = y$

$\tilde{\gamma}$ は $k(x)=k$ 上のベクトル写像である。なぜなら φ が k-morphism ゆえ、$c \in k$ に対して $\varphi^{\#}_{(\epsilon)}\alpha^{\#}_x(c)=\iota(c)=c$ であるが、$\alpha^{\#}_x$ は埋込なので $\varphi^{\#}_{(\epsilon)}(c)=c$ となるから

$$\tilde{\gamma}(c\cdot\tilde{a})=\tilde{\gamma}(\widetilde{c\cdot a})=\varphi^{\#}_{(\epsilon)}(ca)/\epsilon=\varphi^{\#}_{(\epsilon)}(c))\varphi^{\#}_{(\epsilon)}(a)/\epsilon=c\tilde{\gamma}(\tilde{a})$$

が成立するからである。

従って、

$$\tilde{\gamma}\in \mathrm{Hom}_{k(x)}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2,k)=T_x$$

が得られる。

逆に $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x\approx k, \exists\beta:\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2\to k$ が与えられたとき、

$$(f,f^{\#}):\mathrm{Spec}\,A\to X$$

を定義する。

まず f は

$$f:\mathrm{Spec}\,A\to X,(\epsilon)\mapsto x$$

で与えられる。$f^{\#}$ については

$$f^{\#}(V):\mathcal{O}_X(V)\to\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,A}(f^{-1}(V))=\begin{cases}A; & x\in V\\ 0; & x\notin V\end{cases}$$

を満たさなければならない。

$(x\notin V)$ のとき

$$f^{\#}(V)=0$$

$(x\in V)$ のとき

$$f^{\#}(V)=\delta\mu_V:\mathcal{O}_X(V)\overset{\mu_V}{\to}\mathcal{O}_x\overset{\delta}{\to}A$$

ここで δ は β を用いて次のように定義する。

$$\tilde{\beta}:\mathfrak{m}_x\to k,a\mapsto\beta(\tilde{a}),\tilde{a}\in\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$$

$$\delta:\mathcal{O}_x\to A,b+c\mapsto b+\tilde{\beta}(c)\epsilon,b\in k,c\in\mathfrak{m}_x$$

ここで $\mathcal{O}_x$ の元 d が属す同値類の代表元を $\overline{d}$ とすると $d=\overline{d}+c,\ \exists c\in\mathfrak{m}_x$ とかけ、$\overline{d}$ は $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ の元、つまり k の元と対応している[2]。このようにみなしたとき、$\mathcal{O}_x$ の元 $b+c$ の表現は一意的であり、δ、さらには $f^{\#}(V)$ を定義できる。なお作り方からわかるように δ は k-morphism であり、$\mathcal{O}_x\supseteq k$ より $\alpha^{\#}_x$ は埋込である。

$f^{\#}(V)$ は明らかに制限写像と可換である。

[2]正確には $\delta(d)=\psi(d)+\tilde{\beta}(c)\epsilon$ である。

$f^{\#}_{(\epsilon)}$ の local 性は

$$f^{\#}_{(\epsilon)} = \delta : \mathcal{O}_x \to A$$

において、$\delta^{-1}((\epsilon)) \subseteq \mathfrak{m}_x$ であり、逆に $\delta(\mathfrak{m}_x) \subseteq (\epsilon) \Rightarrow \delta^{-1}((\epsilon)) \supseteq \mathfrak{m}_x$ から成り立つ。

最後に $f^{\#}$ の k-morphism は

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(X) \arrow[r, "\rho_{XV}"] & \mathcal{O}_X(V) \arrow[r, "\mu_V"] \arrow[rr, bend left, "f^{\#}(V)"] & \mathcal{O}_x \arrow[r, "\delta"] & A \\
& & k \arrow[u, "\alpha_x^{\#}"] \arrow[ur] \arrow[ull, "\alpha^{\#}((0))"] &
\end{tikzcd}$$

における α の制限写像との可換性 $\mu_V(\rho_{XV}\alpha^{\#}((0))) = \alpha_x^{\#}$ から μ_V が k-morphism となり、δ も k-morphism だったので、その合成として f は k-morphism となる。

2.2.9

$X \supseteq Z \neq \varnothing$ を X の既約閉集合とする。X は scheme なので $Z \cap U \neq \varnothing$ となる affine 開集合 $U = \operatorname{Spec} A$ が取れる。Example 1.1.3 より $Z \cap U$ は既約であり、U において閉集合である。従ってそれは A の prime ideal $\mathfrak{p}$ を用いて $Z \cap U = V(\mathfrak{p})$ とかける[3] 。

X において $\mathfrak{p}$ を ζ と記すと $V(\mathfrak{p}) = \widetilde{\{\zeta\}}$($U$ における閉包) より $U \cap Z = \widetilde{\{\zeta\}}$ となるが、Example 1.1.3 から $\overline{U \cap Z} = Z$ なので

$$Z = \overline{U \cap Z} = \overline{\widetilde{\{\zeta\}}} = \overline{\{\zeta\}}$$

を得る[4] 。

次に $\overline{\{\zeta_1\}} = \overline{\{\zeta_2\}}$ とする。

$\zeta_1 \in \overline{\{\zeta_2\}}$ より ζ_1 を含む開集合は ζ_2 を含む[5] 。逆に ζ_2 を含む開集合は ζ_1 を含む。よって、X の open affine は ζ_1, ζ_2 の両方を含むか、どちらも含まないかいずれかである。

そのような ζ_1, ζ_2 を含む affine 開集合 $W = \operatorname{Spec} A$ に対し、W における閉包をとると

$$\widetilde{\{\zeta_1\}} = \overline{\{\zeta_1\}} \cap W = \overline{\{\zeta_2\}} \cap W \ni \zeta_2 \Rightarrow \widetilde{\{\zeta_1\}} = V(\mathfrak{p}_1) \ni \mathfrak{p}_2$$

---

[3] $V(\mathfrak{a}) = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$: irreducible $\overset{[1]\text{Exe.1.19}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{N}(A/\mathfrak{a})$: prime ideal $\Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{q} = \exists \mathfrak{p}$: prime ideal $\Leftrightarrow V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{p})$

[4] $Y \subseteq U \subseteq X \Rightarrow \overline{\tilde{Y}} = \overline{Y}$ $(\because)$ $\tilde{Y} \supseteq Y \Rightarrow \overline{\tilde{Y}} \supseteq \overline{Y},\ \tilde{Y} \subseteq \overline{Y} \Rightarrow \overline{\tilde{Y}} \subseteq \overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$

[5] もし含まないとすると

$$\zeta_1 \in V \not\ni \zeta_2 \Rightarrow \zeta_1 \notin V^c \ni \zeta_2 \Rightarrow \zeta_1 \notin V^c \cap \overline{\{\zeta_2\}} \subsetneq \overline{\{\zeta_2\}} \ni \zeta_1$$

から、ζ_2 を含む $\overline{\{\zeta_2\}}$ より真に小さい閉集合が存在することになり、$\overline{\{\zeta_2\}}$ の定義に反する。

を満たすので、$\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$ である。ここで、$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ は $W = \operatorname{Spec} A$ において ζ_1, ζ_2 に対応する prime ideal である。逆向きの不等式も成立するので $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$ となり、$\zeta_1 = \zeta_2$ である。

2.2.10

$\mathbb{R}[x]$ は pid なので

$$X := \operatorname{Spec} \mathbb{R}[x] = \{(0)\} \cup \{x + a | a \in \mathbb{R}\} \cup \{x^2 + ax + b | a^2 - 4b < 0, a, b \in \mathbb{R}\}$$

である。

$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{R}[x]_{\mathfrak{p}}, k(\mathfrak{p})$ も求めると、

- $\mathfrak{p} = (0)$

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{R}[x]_{(0)} = \mathbb{R}(x)$$
$$k(\mathfrak{p}) = \mathbb{R}(x)/(0) = \mathbb{R}(x)$$

- $\mathfrak{p} = (x + a)$

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{R}[x]_{(x+a)}$$
$$k(\mathfrak{p}) = \mathbb{R}[x]_{(x+a)}/(x + a) = \mathbb{R}$$

- $\mathfrak{p} = (x^2 + ax + b)$

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{R}[x]_{(x^2+ax+b)}$$
$$k(\mathfrak{p}) = \mathbb{R}[x]_{(x^2+ax+b)}/(x^2 + ax + b) \approx \mathbb{R}[x]_{(x^2+1)}/(x^2 + 1) = \mathbb{C}$$

2.2.11

$k = \mathbb{F}_p$ のとき、$k[x]$ は pid なのでその prime ideal は既約多項式で生成される。従って、$\mathfrak{p} = (f),\ \deg f = n$ とすると、

$$k(x) = k[x]_{\mathfrak{p}}/\tilde{\mathfrak{p}} \approx \mathbb{F}_{p^n}$$

となる。

$\mathbb{F}_{p^n}$ を与える (f) の個数は p 上の n 次既約多項式の個数 $N(n)$ のことである。$\mathbb{F}_p$ 上では

$$x^{p^m} - x = \prod_{\deg f | m, f:\ \text{monic irreducible polynomial}} f(x)$$

が成り立つ。これは、$d = \deg f$ が m を割り切れば $f|(x^{p^n} - x)|(x^{p^m} - x)$ であり、逆に $f|(x^{p^m} - x)$ ならば f の根の位数 $p^n - 1$ が $p^m - 1$ を割り切り、よって $n|m$ だからである[6]。従って次数を比較すれば

$$p^m = \sum_{d|m} dN(d)$$

[6] $p^n - 1 | p^m - 1$ の場合、$m = qn + r, 0 \leq r < n$ とすると $p^m - 1 = (p^{nq} - 1)p^r + p^r - 1$ から $p^n - 1 | p^r - 1 \Rightarrow r = 0$

が得られる。Moebius 関数 μ [7] を用いると

$$\sum_{d|n}\mu(d)p^{\frac{n}{d}} = \sum_{d|n}\mu(d)\sum_{c|\frac{n}{d}}cN(c) = \sum_{c|n}\sum_{d|\frac{n}{c}}\mu(d)cN(c) = \sum_{c|n}cN(c)\sum_{d|\frac{n}{c}}\mu(d) = nN(n)$$

となるので、

$$N(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)p^{\frac{n}{d}}$$

が成立する。

2.2.12

Disjoint union $\coprod_i X_i$ において、$x_j = \varphi_{ij}(x_i)$ のとき $x_i \sim x_j$ とすると $\sim$ は同値関係を与えるので

$$\psi_i : X_i \to X = \coprod_i X_i/\sim,\ a_i \mapsto \tilde{a}_i$$

が定義できる。

このとき

$$\mathcal{O}_X(V) = \{< s_i >_{i\in I} | s_i \in \mathcal{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(V)),\ \varphi_{ij}(s_i|_{\psi_i^{-1}(V)\cap U_{ij}}) = s_j|_{\psi_j^{-1}(V)\cap U_{ji}}\}$$
$$\rho_{VW} = \prod \rho^i_{\psi_i^{-1}(V)\psi_i^{-1}(W)} \tag{6}$$

は sheaf となることを示す。

$V \supseteq W$ のとき $\varphi_{ij}(s_i|_{\psi_i^{-1}(W)\cap U_{ij}}) \in \mathcal{O}_X(W)$ となるので、ρ_{VW} は制限写像になっており、sheaf 条件 (a), (b-0)$\sim$(b-2) は成り立つ。

(b-3) $V = \bigcup_\lambda V_\lambda$ のとき、$s|_{V_\lambda} =< s_i|_{\psi_i^{-1}(V_\lambda)} >= 0$ とする。$s_i \in \mathcal{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(V))$ であるが、$\psi_i^{-1}(V) = \bigcup_\lambda \psi_i^{-1}(V_\lambda)$ なので、X_i の sheaf 性から $s_i = 0$ となる。

(b-4) $V = \bigcup_\lambda V_\lambda$ に対して、$s^\lambda =< s_i^\lambda >\in \mathcal{O}_X(V_\lambda)$ が存在し

$$s^\lambda|_{V_\lambda\cap V_{\lambda'}} = s^{\lambda'}|_{V_\lambda\cap V_{\lambda'}} \Leftrightarrow s_i^\lambda|_{\psi_i^{-1}(V_\lambda)\cap\psi_i^{-1}(V_{\lambda'})} = s_i^{\lambda'}|_{\psi_i^{-1}(V_\lambda)\cap\psi_i^{-1}(V_{\lambda'})}$$

とする。X_i の sheaf 性から $s_i \in \mathcal{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(V))$ が存在して $s_i|_{\psi_i^{-1}(V_\lambda)} = s_i^\lambda$ を満たす。このとき $s =< s_i >_{i\in I}$ とすると

$$s|_{V_\lambda} =< s_i|_{\psi_i^{-1}(V_\lambda)} >=< s_i^\lambda >= s^\lambda$$

---

[7] Moebius 関数は

$$\mu(n) = \begin{cases} 1; & n = 1 \\ 0; & n \text{ has square factors} \\ (-1)^k; & n \text{ is a product of } k \text{ distinct factors} \end{cases}$$

で与えられる。

$n = p_1^{e_1}\cdots p_k^{e_k} > 1$ の場合、$\sum_{d|n}\mu(d) = 1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \cdots = (1-1)^k = 0$ で、$n = 1$ の場合 $\sum_{d|n}\mu(d) = 1$ である。

を満たすが、更に $s \in \mathcal{O}_X(V)$ すなわち $\varphi_{ij}(s_i|_{\psi_i^{-1}(V)\cap U_{ij}}) = s_j|_{\psi_j^{-1}(V)\cap U_{ji}}$ となることを示す。$\psi_i^{-1}(V) = \bigcup_\lambda \psi_i^{-1}(V_\lambda)$ なので、$\psi_j^{-1}(V_\lambda) \cap U_{ji}$ に制限して成立すればよい。

$$\varphi_{ij}(s_i|_{\psi_i^{-1}(V)\cap U_{ij}})|_{\psi_j^{-1}(V_\lambda)\cap U_{ji}} = \varphi_{ij}((s_i|_{\psi_i^{-1}(V)\cap U_{ij}})|_{\psi_i^{-1}(V_\lambda)\cap U_{ij}})$$
$$= \varphi_{ij}(s_i|_{\psi_i^{-1}(V_\lambda)\cap U_{ij}}) = \varphi_{ij}(s_i^\lambda|_{\psi_i^{-1}(V_\lambda)\cap U_{ij}}) = s_j^\lambda|_{\psi_j^{-1}(V_\lambda)\cap U_{ji}}$$
$$= s_j|_{\psi_j^{-1}(V_\lambda)\cap U_{ji}} = (s_j|_{\psi_j^{-1}(V)\cap U_{ji}})|_{\psi_j^{-1}(V_\lambda)\cap U_{ji}}$$

より、成り立つ。従って $\mathcal{O}_X$ は sheaf である。

(1) $\psi_i : X_i \to X$ は $X_i \xrightarrow{\iota_i} \coprod_i X_i \xrightarrow{\varphi} \coprod_i X_i/\sim$ の合成なので、商位相の定義から連続かつ開写像である。また、$\psi_i(x) = \psi_i(y),\ x, y \in X_i$ とすると $x \sim y \Rightarrow y = \varphi_{ij}(x) \in U_{ji}$ となるが、今 disjoint union を扱っているので、$i = j$ でなければならない。よって、$y = \varphi_{ii}(x) = x$ となり、ψ_i は単射である。従って、$\psi_i : X_i \to \psi_i(X_i)$ は位相同型である。

式 (6) から

$$\psi_i^\#(V) : \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_{X_i}(\psi_i^{-1}(V)),\ s =< s_i > \mapsto s_i$$

は制限写像と可換なので、ringed space の isomorphism となる (位相同型は local である)。

(2) X が $\psi_i(X_i)$ でカバーされるのは明らかである。

(1), (2) から X は $\psi_i(X_i)$ でカバーされ、$\psi_i : X_i \to \psi_i(X_i)$ は isomorphism、X_i は scheme なので、X は scheme である。その結果、(2) の $\psi_i : X_i \to \psi_i(X_i)$ は open subscheme への scheme isomorphism となる。

(3) $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j)$ の証明

($\subseteq$): $\tilde{a} \in \psi_i(U_{ij})$ とすると $\tilde{a} = \psi_i(a), a \in U_{ij} \subseteq X_i$ となるが、$b := \varphi_{ij}(a) \in U_{ji} \subseteq X_j \Rightarrow b \sim a \Rightarrow \psi_i(X_i) \ni \tilde{a} = \tilde{b} \in \psi_j(X_j)$

($\supseteq$): $a \in \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j) \Rightarrow a = \psi_i(b) = \psi_j(c) \Rightarrow a = \tilde{b} = \tilde{c} \Rightarrow b \sim c \Rightarrow b = \varphi_{ji}(c), b \in U_{ij} \Rightarrow a = \tilde{b} = \psi_i(b) \in \psi(U_{ij})$

(4) $\psi_i = \psi_j\varphi_{ij}$ on U_{ij} の証明

$b = \varphi_{ij}(a) \Rightarrow b \sim a \Rightarrow \tilde{b} = \tilde{a} \Rightarrow \psi_i(a) = \psi_j(b) = \psi_j\varphi_{ij}(a) \Rightarrow \psi_i = \psi_j\varphi_{ij}$

2.2.13

(a) ネーター空間の部分集合はネーター空間であり、ネーター空間は quasi-compact であることを示す。これらが証明されればネーター空間の開部分空間は quasi-compact である。

ネーター空間 X の部分集合 Y の閉集合降鎖列を

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots, \ Y_i = Y \cap V_i$$

とする。$V_1 \supseteq V_1 \cap V_2 \supseteq \cdots$ は X の閉集合降鎖列なので $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_N = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{N+1} = \cdots$ となる N が存在する。このとき、

$$Y_N = Y \cap V_N = Y \cap V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_N = Y \cap V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{N+1} = Y_{N+1} = \cdots$$

より Y はネーター空間である。

ネーター空間が $X = \bigcup_i U_i$ と表されているとする。

$$\Sigma := \{\mathrm{union\ of\ finite\ U_i}\} \neq \varnothing$$

とおくと、極大条件から Σ には極大元 V が存在する。

$$X \neq V \Rightarrow \exists x \in X - V \Rightarrow x \in \exists U_i \Rightarrow x \notin V \subsetneq U_i \cup V \ni x$$

これは V の極大性に反する。よって $V = X$ である。

逆に位相空間 X の任意の開部分空間が quasi-compact とする。X の開集合昇鎖列 $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$ に対し、$U = \bigcup_i U_i$ とおく。このとき、仮定から

$$U = U_{i_1} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}, \ \exists n > 0$$

とかける。$\max\{i_1, i_2, \cdots, i_n\} = N$ とおくと、$U = U_N$ なので

$$U = U_N \subseteq U_{N+1} \subseteq \cdots \subseteq U \to U_N = U_{N+1} = \cdots$$

より X はネーター空間である。

(b) $X = \operatorname{Spec} A, \ X = \bigcup_i U_i$ とする。$U_i^c = V(\exists \mathfrak{a}_i)$ なので

$$\varnothing = \bigcap_i V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_i \mathfrak{a}_i) \Rightarrow \sum_i \mathfrak{a}_i = (1)$$

$$\Rightarrow c_{i_1} f_{i_1} + c_{i_2} f_{i_2} + \cdots + c_{i_n} f_{i_n} = 1, \ f_{i_j} \in \mathfrak{a}_{i_j}, \ \exists n > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \le j \le n} \mathfrak{a}_{i_j} = (1) \Rightarrow \varnothing = V(\sum_{1 \le j \le n} \mathfrak{a}_{i_j}) = \bigcap_{1 \le j \le n} V(\mathfrak{a}_{i_j}) = \bigcap_{1 \le j \le n} U_{i_j}^c$$

$$\Rightarrow X = \bigcup_{1 \le j \le n} U_{i_j}$$

となる[8]。よって X は quasi-compact である。

しかし、ネーター空間になるとは限らない。例えば $A = k[x_1, x_2, \cdots]$ とすると

$$V(x_1) \supsetneq V(x_1, x_2) \supsetneq \cdots$$

[8] $\mathfrak{a} := \sum_i \mathfrak{a}_i \neq A$ とすると $\mathfrak{a}$ を含む極大 ideal すなわち prime ideal が存在するので ([1], Corollary 1.4)、$V(\mathfrak{a}) \neq \varnothing$ となってしまう。

は閉集合降鎖列だが停留しないので $\operatorname{Spec} A$ はネーター空間ではない。

(c) $\operatorname{Spec} A$ の閉集合降鎖列を

$$V(\mathfrak{a}_1) \supseteq V(\mathfrak{a}_2) \supseteq \cdots \tag{7}$$

とする。ここで、$\mathfrak{a}_i$ は根基としてよい ([1], Exercise 1.15(i))。Lemma 2.1(c) から

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots \tag{8}$$

が得られる。A はネーター環ゆえ系列 (8) は停留し、系列 (7) も停留するので $\operatorname{Spec} A$ はネーター空間である。

(d) $A = k[x_1, x_2, \cdots]/(x_1^2, x_2^2, \cdots])$ とすると、

$$\tilde{x}_i \in \mathfrak{N}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p}:\text{prime}} \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p} \supseteq (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots)$$

しかるに $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots)$ は極大 ideal なので、$\mathfrak{p} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots)$ である。よって $\operatorname{Spec} A$ は 1 点からなり、ネーター空間である。しかるに、A には停留しない昇鎖列 $(\tilde{x}_1) \subsetneq (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \subsetneq \cdots$ が存在するのでネーター環ではない。

2.2.14

(a) $S = \{0\}$ のときは自明なので、$S \neq \{0\}$ とする。S_+ の元が nilpotent とすると、$S_+ \subseteq \mathfrak{N}(S) = \bigcap_{\mathfrak{p}:\text{prime}} \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p} \supseteq S_+ \Rightarrow \operatorname{Proj} S = \varnothing$ となる。

$\operatorname{Proj} S = \varnothing$ とする。Prime ideal $\mathfrak{p}$ に対し、$\mathfrak{q} = \oplus_d(\mathfrak{p} \cap S_d)$ は斉次 prime ideal である。$\operatorname{Proj} S = \varnothing$ なので斉次 prime ideal $\mathfrak{q}$ は S_+ を含む。よって

$$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \supseteq S_+ \Rightarrow \mathfrak{N}(S) = \bigcap_{\mathfrak{p}:\text{prime}} \mathfrak{p} \supseteq S_+$$

(b) $\varphi : S \to T$ に対して

$$U^c = \{\mathfrak{p} | \mathfrak{p} \supseteq \varphi(S_+)\} \cap \operatorname{Proj} T = V((\varphi(S_+)))$$

なので、U は開集合である。

$\mathfrak{p} \supseteq \varphi(S_+) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \supseteq S_+$ より $\mathfrak{p} \not\supseteq \varphi(S_+)$ に対して $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \not\supseteq S_+$ が成立するため、

$$f : U \to \operatorname{Proj} S,\ \mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$$

を定義できる。

f の連続性は

$$f^{-1}(V^S(\mathfrak{a})) = V^T(\varphi(\mathfrak{a})) \cap U \tag{9}$$

による。これは

$$\mathfrak{q} \in f^{-1}(V^S(\mathfrak{a})) \leftrightarrow f(\mathfrak{q}) \in V^S(\mathfrak{a}) \leftrightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq \mathfrak{a}, \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \not\supseteq S_+$$

$$\leftrightarrow \mathfrak{q} \supseteq \varphi(\mathfrak{a}), \mathfrak{q} \not\supseteq \varphi(S_+) \leftrightarrow \mathfrak{q} \in V^T(\varphi(\mathfrak{a})) \cap U$$

から得られる。

Proposition 2.5 より $\operatorname{Proj} S,\ \operatorname{Proj} T$ は scheme であり、U も scheme である。

$f^{\#}$ は $\varphi_{\mathfrak{p}} : S_{(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))} = S_{(f(\mathfrak{p}))} \to T_{(\mathfrak{p})}$ を用いて

$$f^{\#}(V) : \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}(V) \to \mathcal{O}_U(f^{-1}(V)),\ s \mapsto t,\ t(\mathfrak{p}) = \varphi_{\mathfrak{p}} s f(\mathfrak{p}),\ \mathfrak{p} \in f^{-1}(V)$$

で与えられる。これより $f^{\#}_{\mathfrak{p}} = \varphi_{\mathfrak{p}}$ となるので $f^{\#}_{\mathfrak{p}}$ は local morphism である。

以上により $(f, f^{\#}) : U \to \operatorname{Proj} S$ は morphism である。

(c) $\mathfrak{p} \supseteq \varphi(S_+),\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} T$ とする。$t \in T_+$ のとき、十分大きな r に対して

$$t^r \in \oplus_{d \geq d_0} T_d = \oplus_{d \geq d_0} \varphi_d(S_d) \subseteq \varphi(S_+) \subseteq \mathfrak{p}$$

であるが、$\mathfrak{p}$ は prime ideal ゆえ $t \in \mathfrak{p}$ となり、$T_+ \subseteq \mathfrak{p}$ を得る。よって対偶から $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} T$ ならば $\mathfrak{p} \in U$、従って $U = \operatorname{Proj} T$ が成立する。(b) より scheme morphism

$$f : \operatorname{Proj} T \to \operatorname{Proj} S$$

が定義できる。

(f の単射性)

$f(\mathfrak{p}_1) = f(\mathfrak{p}_2) \Rightarrow \mathfrak{q} := \varphi^{-1}(\mathfrak{p}_1) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}_2) \in \operatorname{Proj} S \Rightarrow (\mathfrak{p}_1)_d = (\mathfrak{p}_2)_d, d \geq d_0$ なので

$$a \in \mathfrak{p}_1, s \in S_+ - \mathfrak{p}_2 \Rightarrow s^{d_0} a \in \mathfrak{p}_1, \deg(s^{d_0} a) \geq d_0 \Rightarrow s^{d_0} a \in \mathfrak{p}_2 \Rightarrow a \in \mathfrak{p}_2 \Rightarrow \mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$$

となり、逆向きの包含関係も成り立つので単射である。

(f の全射性)

Proposition 2.5(b) より $\operatorname{Proj} S$ は $D_+(f),\ f \in S_+$ でカバーできる。そのような一つの f に対し、homomorphism

$$\varphi_f : S_{(f)} \to T_{(\varphi(f))},\ a/f^i \mapsto \varphi(a)/\varphi(f^i),\ \deg a = \deg f^i$$

は isomorphism である。なぜなら、適宜 a/f^i の分母子に f^j をかけることにより、$\deg a \geq d_0$ とできるからである。

Proposition 2.3 より、φ_f に対応する scheme morphism は

$$f|_{\operatorname{Spec} T_{(\varphi(f))}} : \operatorname{Spec} T_{(\varphi(f))} \to \operatorname{Spec} S_{(f)}$$

であるが、φ_f が isomorphism なので、$f|_{\operatorname{Spec} T_{(\varphi(f))}}$ も scheme isomorphism である。この式は Proposition 2.5(b) を用いると、

$$f|_{D_+(\varphi(f))} : D_+(\varphi(f)) \xrightarrow{\sim} D_+(f) \tag{10}$$

となる。f は単射なので、$\operatorname{Proj} S$ は $D_+(f),\ f \in S_+$ でカバーできるので、$D_+(\varphi(f))$ は $\operatorname{Proj} T$ をカバーする。このとき、$f|_{D_+(\varphi(f))}$ が isomorphism なので、位相空間として $f : \operatorname{Proj} T \to \operatorname{Proj} S$ は isomorphism である。Sheaf morphism としても、$f^{\#}_{\mathfrak{p}}$ が isomorphism なので (式 (10) より局所的に isomorphic)、isomorphism であり、従って local でもある。

以上により、$f : \operatorname{Proj} T \to \operatorname{Proj} S$ は isomorphism である。

(d) Exercise 1.2.4(b) より位相空間として $t(V) \approx \operatorname{Proj} S$ である。

Projective variety V は affine variety に同型な $V_i = V \cap U_i$ でカバーできる。$V_i = Z(A_i)$ とすると、$V = \bigcup_i V_i$ のとき

$$t(V) = \bigcup_i t(V_i^c)^c,\ t(V_i^c)^c \xrightarrow{\sim} t(V_i),\ Z \mapsto Z \cap V_i$$

$$\operatorname{Proj} S = \bigcup_i X_i, X_i \approx \operatorname{Spec} A_i$$

$$\mathcal{O}_{t(V)}|_{t(V_i)} = \mathcal{O}_{t(V_i)}$$

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}|_{\operatorname{Spec} A_i} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_i}$$

である[9]。Proposition 2.6 証明の中にあるように、

$$(t(V_i), \mathcal{O}_{t(V_i)}(= \alpha_* \mathcal{O}_{V_i})) \approx (\operatorname{Spec} A_i, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_i})$$

なので、sheaf 性からこれらを貼り合わせることができ、

$$(t(V), \mathcal{O}_{t(V)}) \approx (\operatorname{Proj} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S})$$

を得る。

2.2.15

本問を証明して Proposition 2.6 が完成する。(a) V が一般の variety のとき、$V = \bigcup_i V_i,\ V_i$: affine とできる。このとき、$t(V) \approx \bigcup_i t(V_i)$ より (Exercise 2.2.14(d) の脚注)、$P \in t(V_i)$ となる i が存在するので、その V_i を改めて V とおく。

V の座標環を $A = k[\boldsymbol{x}]/I(V)$ とする。$P \in t(V)$ が閉点とすると、対応する $\operatorname{Spec} A$ の点は極大 ideal であり、k が代数的閉体なので $\mathfrak{m}_P = (x_0 - a_0, \cdots, x_n - a_n)$ の形となる。従ってその剰余体は

$$A_{\mathfrak{m}_P}/\mathfrak{m}_P \approx k$$

[9] $t(V)$ において $\psi : \tilde{U} = t(U^c)^c \to t(U),\ Z \mapsto Z \cap U$ は位相同型になる。Well-define: Z が既約閉なら $Z \cap U$ は U で既約閉 (Example 1.1.3)。全射性: $Y \in t(U) \Rightarrow Y = \overline{Y} \cap U \Rightarrow \overline{Y} \in t(U^c)^c$, $\overline{Y}$: 既約閉 (Example 1.1.4)。単射性: $Z \cap U = Z' \cap U \Rightarrow Z = \overline{Z \cap U} = \overline{Z' \cap U} = Z'$。連続性/閉写像性: $t(U^c)^c \supseteq t(W) \ni Z \overset{\psi}{\mapsto} Z \cap U \in t(W \cap U)$, $Y = \overline{Y} \cap U \overset{\psi^{-1}}{\mapsto} \overline{Y}$。このとき $t(V)$ が scheme となることは Proposition 2.6 の証明で示されている通り。

を満たす。

逆に、$P \in t(V)$ に対応する $\operatorname{Spec} A$ の点を $\mathfrak{p}$、その剰余体が $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} = k$ を満たすとする。A が k 上 scheme なので $i : k \hookrightarrow A/\mathfrak{p}$ である。

$$\text{trans.deg}_k \text{Frac}(A/\mathfrak{p}) = \text{trans.deg}_k \text{Frac}(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = \text{trans.deg}_k k = 0$$

よって、$A/\mathfrak{p}$ の超越次数は 0 であり、k 上代数的である。従って、k が代数的閉体であることから $j : A/\mathfrak{p} \hookrightarrow k$ となる。

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, bend left, "i"] & A/\mathfrak{p} \arrow[l, bend left, "j"] \end{tikzcd}$$

において、i, j も k-morphism なので、Exercise 2.2.8 の脚注で示した一意性から $ji = id_k$ である。一方 j は単射なので $ij = id_{A/\mathfrak{p}}$ となり、$A/\mathfrak{p} \approx k$ が得られ、$\mathfrak{p}$ は極大 ideal、P は閉点となる。

(b) $P \in X$ の近傍と $f(P) \in Y$ の近傍を affine となるように取れるので[10]、k 上 scheme morphism f は $f : \operatorname{Spec} A \to \text{Spec}B$ としてよい。$P \in X$ に対応する prime ideal を $\mathfrak{p}$ とする。このとき、Proposition 2.3 より $\varphi : B \to A$ となる φ が存在し、$f(P) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ である。

$\rho : A \to A/\mathfrak{p}$ を標準的全射とすると

$$\tilde{\varphi} := \rho\varphi : B \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\rho} A/\mathfrak{p}$$

に関し、$\ker \tilde{\varphi} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ が成立する。よって $A/\mathfrak{p} \supseteq \tilde{\varphi}(B) \approx B/\ker \tilde{\varphi} = B/\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ より

$$\sigma : k \overset{i}{\hookrightarrow} B/\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \overset{j}{\hookrightarrow} A/\mathfrak{p} = k \tag{11}$$

が成り立つ。最後の等号は (a) で示したように $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} = k \Rightarrow A/\mathfrak{p} = k$ による。よって $B/\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \approx k$ であり、$f(P)$ に対応する prime ideal は $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ なので、$f(P)$ に対応する剰余体は k となる。

(c) Proposition 2.6 の記法を用いる。

最初に V, W が affine variety の場合に証明する。まず、写像

$$t : \text{Hom}_{\mathfrak{Var}}(V, W) \to \text{Hom}_{\mathfrak{Sch}}(t(V), t(W))$$

が定義できることを示す。

$f : V \to W$ を variety の morphism とする。Proposition I.3.5 より

$$f' : A(W) \to A(V)$$

が存在する。

[10] $f(P) \in Y$ に affine 近傍 V が存在する。開集合 $f^{-1}(V) \ni P$ の近傍として $D(f)$ がとれ、これは affine なので $P \in D(f) \subseteq f^{-1}(V) \Rightarrow f : D(f) \to V$ とできる。

このとき、

$$(t(f), t(f)^{\#}) : (t(V), \alpha_*^V \mathcal{O}_V) \to (t(W), \alpha_*^W \mathcal{O}_W)$$

が定義できる。ここで、

$$t(f) : t(V) \to t(W),\ Y \mapsto \overline{f(Y)}$$

$$t(f)^{\#} : \alpha_*^W \mathcal{O}_W \to t(f)_* \alpha_*^V \mathcal{O}_V$$

である。$A(W) \to A(V)$ が存在し、かつ Proposition 2.6 に示されているように、$(\operatorname{Spec} A(V), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A(V)}) \approx (t(V), \alpha_* \mathcal{O}_V)$ なので $t(f)^{\#}$ は存在する。従って、$t(f)$ は scheme morphism である。

なお、ついでながら

$$t(f)^{\#}(t(W)) : \alpha_*^W \mathcal{O}_W(t(W)) = \mathcal{O}_W(W) \approx A(W) \to t(f)_* \alpha_*^V \mathcal{O}_V(t(W)) = \mathcal{O}_V(V) \approx A(V)$$

より (Theorem 3.2(a))

$$t(f)^{\#}(t(W)) = f',\ t(f) = f'^* \tag{12}$$

である。ここで、Proposition I.3.5 により f' に対応する Spec 上 homomorphism を f'^* とし、$\operatorname{Spec} A(V) \approx t(V)$ から $t(V)$ における homomorphim とみている。

(単射性)

$t(f) = t(g),\ f, g : V \to W$ とする。

$$t(f)(P) = t(g)(P) \Rightarrow \overline{f(P)} = \overline{g(P)},\ P \in V$$

P に対応する ideal は極大なので (a), (b) より $f(P)$ は閉点であり、$f(P) = g(P)$ すなわち $f = g$ を得る。

(全射性)

$\tilde{h} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Sch}}(t(V), t(W))$ は

$$(\tilde{h}, \tilde{h}^{\#}) : (t(V), \alpha_*^V \mathcal{O}_V) \to (t(W), \alpha_*^W \mathcal{O}_W)$$

のことであり

$$h' := \tilde{h}^{\#}(t(W)) : \alpha_*^W \mathcal{O}_W(t(W)) = \mathcal{O}_W(W) \approx A(W) \to \tilde{h}_* \alpha_*^V \mathcal{O}_V(t(W)) = \mathcal{O}_V(V) \approx A(V)$$

は ring homomorphism である。よってこれに対応する $h : V \to W$ は variety morphism である (Proposition I.3.5)。

また、Propostion 2.3 より得られる scheme morphism を

$$h'^* : \operatorname{Spec} A(V) \to \operatorname{Spec} A(W)$$

とすると、

$$(\operatorname{Spec} A(V), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A(V)}) \approx (t(V), \alpha_* \mathcal{O}_V)$$

なので、$\tilde{h} = h'^*$ であり、式 (12) より $t(h) = \tilde{h}$ である。

V, W が一般の variety とする。

$V = \bigcup_i V_i, W = \bigcup_i W_i,\ V_i = V \cap U_i, W_i = W \cap U_i$ において、V_i, W_i の対で証明できた (U_i は Proposition I.2.2 参照)。すると $t(V_i \cap W_i) = t(V_i) \cap t(W_i)$ より貼り合わせることができる。なぜなら、$f_i = f|_{V_i}$ とすると、$t(f_i|_{V_i \cap V_j}) : t(V_i \cap V_j) \to t(W_i \cap W_j), Z \mapsto \overline{f(Z)},\ Z \subseteq V_i \cap V_j$ となるので、$t(f_i|_{V_i \cap V_j}) = t(f_j|_{V_i \cap V_j})$ だからである。

2.2.16

Scheme X に対し $f \in \mathcal{O}_X(X),\ X_f = \{x \in X | f_x \notin \mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_x\}$ とする。

(a) $U = \operatorname{Spec} B \subseteq X,\ \overline{f} = f|_U \in \mathcal{O}_{X|_U}(U) = B$ のとき

$$x (= \mathfrak{p} \subseteq B) \in U \cap X_f \Leftrightarrow \overline{f}_x = (f|_U)_x = f_x \notin \mathfrak{m}_x \approx \mathfrak{p}_\mathfrak{p} \subseteq B_\mathfrak{p}$$

となる。このとき、$\overline{f}_\mathfrak{p} \notin \mathfrak{p}_\mathfrak{p} \Leftrightarrow \overline{f} \notin \mathfrak{p}$ である。実際、

$$\overline{f} \in \mathfrak{p} \Rightarrow \overline{f}_\mathfrak{p} \in \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$$

であり、逆に

$$\overline{f_\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p}_\mathfrak{p} \subseteq B_\mathfrak{p} \Rightarrow \overline{f_\mathfrak{p}} = \overline{f}/1 \in \mathfrak{p}_\mathfrak{p} \Rightarrow \overline{f}/1 = a/s, a \in \mathfrak{p}, s \notin \mathfrak{p} \Rightarrow \overline{f}st = at \in \mathfrak{p}, t \notin \mathfrak{p} \Rightarrow \overline{f} \in \mathfrak{p}$$

である[11]。

よって

$$x \in U \cap X_f \Leftrightarrow x \in D(\overline{f})$$

となる。

$$X_f = \bigcup_U (U \cap X_f) = \bigcup_U D(\overline{f}) = \bigcup_U D(f|_U)$$

より X_f は開集合である。

(b)

$$X = \bigcup_i U_i,\ U_i = \operatorname{Spec} B^i,\ X_{if} := U_i \cap X_f = D(f_i),\ f_i = f|_{U_i}$$

において

$$a|_{X_f} = 0,\ a \in \mathcal{O}_X(X)$$

[11] Proposition 2.2(a) より

$$\mathcal{O}_x \xrightarrow{\sim} B_\mathfrak{p},\ f_x = \overline{f}_x \mapsto \overline{f}_\mathfrak{p} = \overline{f}/1$$

とする。ここで、covering は有限である。$a|_{U_i} \in \mathcal{O}_X(U_i) = B^i$ であるが、その $B^i \to B^i_{f_i}$ による像は $a|_{U_i}/1$ である。一方、

$$0 = (a|_{U_i})|_{X_{if}} = a|_{X_{if}} \in \mathcal{O}(D(f_i)) = B^i_{f_i}$$

より

$$a|_{X_{if}} = a|_{U_i}/1 = 0/1 \Rightarrow a|_{U_i} f_i^{n_i} = 0 \Rightarrow (af^{n_i})|_{U_i} = 0$$

よって $\mathcal{O}_X$ の sheaf 性から $af^n = 0,\ n = \max_i n_i$ となる。

(c) 有限な affine covering を $X = \bigcup_i U_i,\ U_i = \operatorname{Spec} B^i$ とし、$X_{if} = U_i \cap X_f$ とおく。$b \in \mathcal{O}_{X_f}(X_f)$ に対し $b|_{X_{if}} \in \mathcal{O}_{X_f}(X_f \cap U_i) = \mathcal{O}(D(f_i)) = B^i_{f_i}$ より、$b|_{X_{if}} = b'_i/f_i^{n_i},\ b'_i \in B^i (= \mathcal{O}_X(U_i))$ とかける。ここで $n = \max_i n_i$ とすると、

$$b|_{X_{if}} = b'_i f_i^{n-n_i}/f_i^n = b_i/f_i^n,\ b_i \in B^i$$

となる。

$U_{ij} = U_i \cap U_j,\ X_{ijf} = U_i \cap U_j \cap X_f$ とすると

$$(b|_{X_{if}})|_{X_{ijf}} = (b|_{X_{jf}})|_{X_{ijf}} \Rightarrow ((b_i - b_j)/f^n)|_{X_{ijf}} = 0$$

$$\Rightarrow ((b_i - b_j)f^{m_{ij}})|_{X_{ijf}} = 0 \Rightarrow ((b_i - b_j)f^m)|_{X_{ijf}} = 0,\ m = \max_{i,j} m_{ij}$$

ここで、U_{ij} は quasi-compact であり、$X_{ijf} = \{x \in U_{ij} | f_x \notin \mathfrak{m}_x\}$ より、U_{ij} に (b) を適用可能となるので

$$((b_i - b_j)f^m)|_{U_{ij}} f|_{U_{ij}}^{n_{ij}} = 0 \Rightarrow (b_i f^N)|_{U_{ij}} = (b_i f^N)|_{U_{ij}}$$

$$\Rightarrow s|_{U_i} = b_i f_i^m \in B^i,\ \exists s \in \mathcal{O}(X)$$

$$\Rightarrow B^i_{f_i} \ni s|_{U_i \cap X_f} \overset{\$}{=} b_i f_i^m/1 = (b_i/f_i^n) f_i^{m+n} = b|_{X_{if}} f_i^{n+m}$$

ここで $\overset{\$}{=}$ は $f|_{X_{if}} = f_i/1$ による。$B^i_{f_i} = \mathcal{O}_{X_f}(X_f \cap U_i)$ より、その sheaf 性から

$$s|_{X_f} = b(f|_{X_f})^{n+m}$$

を得る。

(d) $f \in A = \mathcal{O}_X(X),\ f_i = f|_{U_i} \in B^i$ とすると $1/f_i \in B^i_{f_i} = \mathcal{O}_X(X_f \cap U_i)$ である。このとき、$f_i|_{U_{ij}} = f_j|_{U_{ij}}$ なので

$$(1/f_i)|_{X_{ijf}} = 1/(f_i|_{U_{ij}})|_{X_{ijf}} = 1/(f_j|_{U_{ij}})|_{X_{ijf}} = (1/f_j)|_{X_{ijf}}$$

であり、$\mathcal{O}_X(X_f)$ の sheaf 性から

$$\exists t \in \mathcal{O}_X(X_f),\ t|_{X_{if}} = 1/f_i$$

となる。

従って、ring homomorphism

$$\varphi : A_f \to \mathcal{O}_{X_f}(X_f),\ a/f^n \mapsto a|_{X_f} t^n \tag{13}$$

が定義できる。

(単射性) $\mathcal{O}_X(X_f)$ において $a|_{X_f} t^n = 0$ とする。X_{if} に制限すると $B^i_{f_i}$ で $a|_{X_f \cap U_i}/f_i^n = 0$ となり、従って B^i において $a|_{X_f \cap U_i} f_i^m = 0$ となる。$\mathcal{O}_X$ の sheaf 性から $a|_{X_f}(f|_{X_f})^M = 0$ が得られるので、(b) より A で $af^L = 0$ となる。これは A_f において $a/1 = 0$ を意味し、よって $a/f^n = 0$ である。

(全射性) (c) より $b \in \mathcal{O}_X(X_f)$ に対して $f|^N_{X_f} b = s|_{X_f}$ となる $s \in A$ が存在する。よって

$$\varphi(s/f^N) = s|_{X_f} t^N = (f|_{X_f})^N b t^N = b$$

から[12] φ は全射である。

以上により、φ は ring isomorphism である。

2.2.17

(a) $f : X \to Y,\ Y = \bigcup_i U_i$ に対し $V_i = f^{-1}(U_i)$ とすると $X = \bigcup_i V_i$ である。前提から

$$f|_{V_i} : V_i \to U_i$$

は isomorphism なので、f は全単射である。

開集合 $W \subseteq X$ に対し

$$f(W) = \bigcup_i f_i(W_i),\ W_i = W \cap V_i$$

が成り立つので[13] f は開写像であり、従って、f は homeomorphism となる。

$D(f)$ が開基なので、$Q \in Y$ に対し $Q \in \exists D(f) \subseteq U_i$ とできる。$P = f^{-1}(Q) \Rightarrow f_i(P) = Q$ なので

$$f^{\#}_P : \mathcal{O}_{Y,Q} \to (f_*\mathcal{O}_X)_Q = \mathcal{O}_{X,P} \tag{14}$$

は、$f^{\#}_{i,P}$ に等しい。$f^{\#}_i$ は isomorphism なので、式 (14)、すなわち $f^{\#}_P$ も isomorphim となり、f は scheme isomorphism である。

(b) X が affine scheme ならば、$f = 1 \in A$ とすると

$$(f) = A,\ X_f = \{x | 1_x \notin \mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_x\} = X$$

より X_f は affine である。

[12] $((f|_{X_f})^N t^N)|_{X_{if}} = (f_i/1)^N \cdot 1/f_i^N = 1$

[13] $(\supseteq)$ は明らか、$b = f(a), a \in \exists W_i \Rightarrow b \in f(W_i) = f_i(W_i)$

逆を示す。

$$a^{(1)}f^{(1)}+\cdots+a^{(r)}f^{(r)}=1$$

とすると

$$X^c_{f^{(1)}}\cap\cdots\cap X^c_{f^{(r)}}=\{x|f^{(1)}_x,\cdots,f^{(r)}_x\in\mathfrak{m}_x\}\subseteq\{x|a^{(1)}_x f^{(1)}_x+\cdots+a^{(r)}_x f^{(r)}_x=1\in\mathfrak{m}_x\}=\varnothing$$

より

$$X=X_{f^{(1)}}\cup\cdots\cup X_{f^{(r)}}$$

すなわち、X は X_{f_i} でカバーされる[14]。

前提から X_{f_i} は affine なので、$X_{f_i}\cap U=D(\overline{f}_i)$ において $U=X_{f_i}$ とでき、$X_{f_i}=D(\overline{f}_i)$ となる。よって $X_{f_i}\cap X_{f_j}=D(\overline{f}_i)\cap D(\overline{f}_i)=D(\overline{f}_i\overline{f}_j)$ より、[1], Exercise 1.17, (vii) から $X_{f_i}\cap X_{f_j}$ は quasi-compact となる。すると、Exercise 2.2.16(d) が使えて

$$A=\mathcal{O}_X(X)\overset{\delta}{\to}A_f=\mathcal{O}_X(X)_f\overset{\sigma}{\to}\mathcal{O}_X(X_f),\ a\mapsto a/1\mapsto a|_{X_f}t^0=a|_{X_f}\tag{15}$$

σ は ring isomorphism、$\rho_{XX_f}=\sigma\delta$ である。

Proposition 2.3 より式 (15) に対応して

$$\rho^*_{XX_f}:X_f\overset{\sigma^*}{\to}\mathrm{Spec}\,A_f\approx D(f)\subseteq\mathrm{Spec}\,A\tag{16}$$

が成立する。Proposition 2.3 から σ^* は isomorphism である。

一方、Exercise 2.2.4 から $\varphi:X\to\mathrm{Spec}\,A$ が存在するが、その全射性証明で示したように φ は $\rho^*_{XX_f}$ を貼り合わせたものであり、$\varphi|_{X_f}=\rho^*_{XX_f}$ である。このとき式 (16) より

$$\mathrm{Im}\varphi|_{X_f}=D(f)\approx\mathrm{Spec}\,A_f$$

と見なせるので

$$\varphi|_{X_f}:X_f\overset{\sim}{\to}\mathrm{Spec}\,A_f\tag{17}$$

となる。

$\varphi^{-1}(\mathrm{Spec}\,A_{f_i})=X_{f_i}$ を示す。$\supseteq$ は明らかである。$x\in\varphi^{-1}(\mathrm{Spec}\,A_{f_i})=\varphi^{-1}(D(f_i))$、すなわち $\varphi(x)\in D(f_i)$ において、もし $x\notin X_{f_i}$ とすると、$x\in\exists X_{f_j}\Rightarrow\varphi(x)\in D(f_i)\cap D(f_j)$ となる。一方

$$X_{f_i}\cap X_{f_j}=X_{f_if_j}\approx D(f_if_j)=D(f_i)\cap D(f_j)$$

なので、f_if_j に関する式 (17) より、$\exists x'\in X_{f_i}\cap X_{f_j},\ \varphi(x')=\varphi(x)$ となるが、$x\notin X_{f_i}$ より $x'\neq x$ である。これは f_j に関する式 (17) に反する。よって、$x\in X_{f_i}$ である。

$\mathrm{Spec}\,A$ は $D(f_i)\approx\mathrm{Spec}\,A_{f_i}$ でカバーされ、$\varphi^{-1}(\mathrm{Spec}\,A_{f_i})=X_{f_i}$ なので、(a) より

$$\varphi:X\to\mathrm{Spec}\,A$$

は isomorphism である。

[14] このカバー式が成立さえすれば ($a^{(1)}f^{(1)}+\cdots+a^{(r)}f^{(r)}=1$ は必要なく)、以下の議論は成り立ち、X は affine となる。

2.2.18

(a)

$$f \in \mathfrak{N}(A) = \bigcap \mathfrak{p} \Leftrightarrow f \in \forall \mathfrak{p} \Leftrightarrow D(f) = \varnothing$$

(b) $\varphi : A \to B,\ f : Y = \operatorname{Spec} B \to X = \operatorname{Spec} A,\ f^{\#} : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ において $f^{\#}$ が単射とする。このとき $f^{\#}(V),\ \forall V \subseteq X$ も単射なので $\varphi = f^{\#}(X)$ は単射である。

逆に $\varphi : A \to B$ が単射とする。このとき $\forall g \in A$ に対し

$$\varphi_g : A_g \to B_{\varphi(g)},\ a/g^n \mapsto \varphi(a)/\varphi(g)^n$$

は、φ が単射ゆえ

$$a/g^n = 0 \Leftrightarrow ag^i = 0 \Leftrightarrow \varphi(a)\varphi(g)^i = 0 \Leftrightarrow \varphi(a)/1 = 0 \Leftrightarrow \varphi(a)/\varphi(g)^n = 0$$

が成り立つので、well-define かつ単射である。すると

$$f^{\#}(D(g)) : \mathcal{O}_X(D(g)) \approx A_g \to f_*\mathcal{O}_Y(D(g)) = \mathcal{O}_Y(f^{-1}(D(g)) = \mathcal{O}_Y(D(\varphi(g))) \approx B_{\varphi(g)}$$

は φ_g に等しいので (Proposition 2.3(b) の証明中) 、単射となる。

$D(g)$ は開基なので、$\forall \mathfrak{p} \in X$ に対し

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \to (f_*\mathcal{O}_Y)_{\mathfrak{p}}$$

も単射となり ([1], Exercise 2.19)、Exercise 1.2(b) から $f^{\#}$ も単射となる。

$\varphi : A \to B$ が単射のとき $\overline{f(Y)} = X$ となることを示す。このためには X の任意の開集合に $f(Y)$ の元が存在すればよい。$D(g), g \in X$ は開基なので開集合は $D(g) \neq \varnothing$ とできる。

もし $D(g)$ に $f(Y)$ の元がなかったとする。

$$g \in f(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}), \forall \mathfrak{q} \in Y \Rightarrow g \in \bigcap_{\mathfrak{q} \in Y} \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1} \bigcap_{\mathfrak{q} \in Y} \mathfrak{q} = \varphi^{-1}(\mathfrak{N}(B))$$

$$\Rightarrow \varphi(g) \in \mathfrak{N}(B) \overset{\varphi:injective}{\Longrightarrow} g \in \mathfrak{N}(A) \overset{(a)}{\Rightarrow} D(g) = \varnothing$$

これは $D(g) \neq \varnothing$ に反する。

(c) $\varphi : A \to B$ は全射とする。

すると $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ は単射である。実際、$f(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{q}),\ \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \subseteq B$ のとき

$$y \in \mathfrak{p} \Rightarrow y = \varphi(x), \exists x \in A \Rightarrow x \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \Rightarrow y = \varphi(x) \in \mathfrak{q}$$

である。

f は閉写像である。なぜなら $A/\ker\varphi \approx \mathrm{Im}\varphi = B$ より A の $\ker\varphi$ を含む prime ideal と B の prime ideal は一対一に対応し、さらにその一般化として A の

$\varphi^{-1}(\mathfrak{b})$ を含む prime ideal と B の $\mathfrak{b}$ を含む prime ideal は一対一に対応する[15]。よって

$$f(V(\mathfrak{b})) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$$

となり、$f(Y)$ は閉集合である。以上から $f : Y \to \mathrm{Im}\varphi$ は homeomorphism となる。

(b) で示した

$$\varphi_g : A_g \to B_{\varphi(g)},\ a/g^n \mapsto \varphi(a)/\varphi(g)^n$$

は φ が全射ならやはり全射である。よって φ_g に等しい

$$f^{\#}(D(g)) : \mathcal{O}_X(D(g)) \to f_*\mathcal{O}_Y(D(g))$$

は全射である。$\{D(g)\}$ が開基なので、

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \to (f_*\mathcal{O}_Y)_{\mathfrak{p}}$$

も全射となる。従って

$$f^{\#} : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$$

は全射である。

(d) $A' = A/\ker\varphi,\ X' = \mathrm{Spec}\,(A/\ker\varphi)$ とし、

$$\varphi : A \xrightarrow{\pi} A/\ker\varphi \approx \mathrm{Im}\varphi \xrightarrow{i} B$$

$$f : Y \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{h} X,\ g = i^*, h = \pi^*$$

$$f^{\#} : \mathcal{O}_X \xrightarrow{h^{\#}} h_*\mathcal{O}_{X'} \xrightarrow{h_*g^{\#}} h_*g_*\mathcal{O}_Y$$

とする。このとき、g が scheme isomorphism であることを示せばよい。なぜなら Proposition 2.2.3 より $\mathrm{Im}\varphi = B$ が得られるので、φ は全射になるからである。

まず $f = hg,\ h$ が各々像 (閉集合) への位相同型写像なので $g = h^{-1}|_{\mathrm{Im}f} \circ f$ も像 (閉集合) への位相同型写像である[16]。i が単射ゆえ (b) より $g^{\#}$ も単射で、$X' = \overline{g(Y)} = g(Y)$ から、g は $Y \to X'$ として位相同型写像である。

$g^{\#}$ は単射なので、$g^{\#}$ が全射であることを示せば Exercise 2.1.5 より isomorphism となる。

前提から $f^{\#} = h_*g^{\#} \circ h^{\#}$ は全射なので $h_*g^{\#}$ も全射である。

$$h_*g^{\#} : h_*\mathcal{O}_{X'} \to h_*g_*\mathcal{O}_Y = f_*\mathcal{O}_Y$$

において、$\mathfrak{p} \supseteq \ker\varphi$ で stalk を取ると、$\mathfrak{p} = f(\exists\mathfrak{q})$ より

$$(h_*g^{\#})_{\mathfrak{q}} : (h_*\mathcal{O}_{X'})_{\mathfrak{p}} \to (h_*g_*\mathcal{O}_Y)_{\mathfrak{p}} = (f_*\mathcal{O}_Y)_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}}$$

[15] $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{b})$ と $B/\mathfrak{b}$ に適用する。

[16] $\mathrm{Im}g = h^{-1}|_{\mathrm{Im}f}(\mathrm{Im}f) = h^{-1}(\mathrm{Im}f)$

が全射となる。この式は、

$$\mathcal{O}_{X'}(h^{-1}(V)) \to g_*\mathcal{O}_Y(h^{-1}(V))$$

を $\mathfrak{p} \in V \subseteq X$ で stalk を取ったものに等しい。

ここで h は像への位相同型写像で、$\mathfrak{p} \supseteq \ker\varphi$ はその像に含まれる。よって、$\mathfrak{p}' = h^{-1}(\mathfrak{p})$ 近傍では $h^{-1}(V)$ は V と同型であり、上式は X' において $\mathfrak{p}' = h^{-1}(\mathfrak{p})$ で stalk を取ったものに等しい。ここで、A の prime ideal $\mathfrak{p} \supseteq \ker\varphi$ と $A' = A/\ker\varphi$ の prime ideal $\mathfrak{p}' = h^{-1}(\mathfrak{p})$ は一対一に対応している。よって

$$(\mathcal{O}_{X'})_{\mathfrak{p}'} \to (g_*\mathcal{O}_Y)_{\mathfrak{p}'},\ \mathfrak{p}' \in X'$$

が全射となり、従って

$$g^{\#} : \mathcal{O}_{X'} \to g_*\mathcal{O}_Y$$

は全射である。

2.2.19

(a)

(i)→(ii)

$\operatorname{Spec} A = U_1 \coprod U_2$ とする。$e_1, e_2 \in \mathcal{O}_X(X) = A$ を次のように定める。

$$e_1|_{U_1} = 1, e_1|_{U_2} = 0,\ e_2|_{U_1} = 0, e_2|_{U_2} = 1$$

すると、

$$(e_1+e_2)|_{U_1} = (e_1+e_2)|_{U_2} = 1 \Rightarrow e_1 + e_2 = 1$$

である。他も同様にして、

$$e_1e_2 = 0, e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2$$

を示すことができる。

(ii)→(iii)

$e_1 + e_2 = 1$ より $A = Ae_1 + Ae_2$ となるが、$Ae_1 \cap Ae_2 = (0)$ である。実際、

$$a \in Ae_1, Ae_2 \Rightarrow a = be_1 = ce_2 \Rightarrow a = be_1 = be_1^2 = be_1e_1 = ce_2e_1 = 0$$

よって、

$$A = Ae_1 \oplus Ae_2 \approx Ae_1 \times Ae_2$$

ここで、Ae_i は単位元 e_i をもつ ring である。

(iii)→(i)

$A = A_1 \times A_2$ のとき、射影を $\pi_i : A \to A_i$ とし、$\mathfrak{a}_i = \ker\pi_i$ とおくと、

$$\mathfrak{a}_1 = (0, A_2) \neq A, \mathfrak{a}_2 = (A_1, 0) \neq A,\ \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 = (0,0),\ \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = A$$

なので、

$$\operatorname{Spec} A = V((0)) = V(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) = V(\mathfrak{a}_1) \cup V(\mathfrak{a}_2)$$

$$V(\mathfrak{a}_1) \cap V(\mathfrak{a}_2) = V(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) = V(A) = \varnothing$$

である。ここで、$\mathfrak{a}_i \neq A$ より $V(\mathfrak{a}_i) \neq \varnothing$ である。

References

[1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald: Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, 1963

[2] Qing Liu: Algebraic Geometry and Arithmetic Curves, Oxford, 2002