2 Schemes

2.1 Sheaves

2.1.1

A の constant sheaf を $\mathscr{A}$、constant presheaf を $\mathscr{B}$ とする。Proposition-Definition 1.2 の universal property より $\mathscr{B}^+ = \mathscr{A}$ を示す。それには、Sheaf $\mathscr{G}$ と

$$\varphi : \mathscr{B} \to \mathscr{G}$$

が与えられたとき、$\psi\theta = \varphi$ を満たす morphism $\psi : \mathscr{A} \to \mathscr{G}$ が一意的に存在することを示せばよい。

定義から $X \supseteq \forall U \neq \varnothing$ に対して $\mathscr{B}(U) = A$ である。U の連結成分分解を $U = \cup_{i \in I} U_i$ とする。Example 1.0.3 から $\mathscr{A}(U) = A^I$ である。

$$\theta(U) : \mathscr{B}(U) = A \to \mathscr{A}(U),\ a \mapsto (a_i)_{i \in I},\ a_i = a$$

$$\psi(U) : \mathscr{A}(U) \to \mathscr{G}(U),\ \boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in I} \mapsto s,\ s|_{U_i} = \varphi(U_i)(a_i)$$

とおく。ここで、$\mathscr{G}$ は sheaf なので $s|_{U_i} = \varphi(U_i)(a_i)$ を満たす $s \in \mathscr{G}(U)$ は存在する。

U を U_i とすれば、$\theta(U_i)(a_i) = a_i$, $\psi(U_i)(a_i) = \varphi(U_i)(a_i)$ となるので、$\psi(U)(\boldsymbol{a})|_{U_i} = \varphi(U_i)(a_i) = \psi(U_i)(\boldsymbol{a}|_{U_i})$ より ψ は morphism となる。

このとき $\psi\theta(a)|_{U_i} = \varphi(U_i)(a) = \varphi(U)(a)|_{U_i}$ と $\mathscr{G}$ の sheaf 性から

$$\psi\theta = \varphi$$

が得られる。

このような ψ は一意的である。実際、$\psi\theta = \varphi$ と $\theta(U_i)(a_i) = a_i$ から

$$\psi(U)(\boldsymbol{a})|_{U_i} = \psi(U_i)(\boldsymbol{a}|_{U_i}) = \psi(U_i)(a_i) = \psi(U_i)\theta(U_i)(a_i) = \varphi(a_i)$$

となり、$\psi(U)(\boldsymbol{a})$ は φ のみで決まるので、ψ は一意的である。

2.1.2

(a) Morphism $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ とし、$s_P \in \mathscr{F}_P$ とする。
このとき

$$(\ker\varphi)_P \ni s_P \Rightarrow (\ker\varphi)(\exists U) \ni s \Rightarrow \varphi(U)(s) = 0 \Rightarrow (\varphi(U)(s))_P = 0 \Rightarrow \varphi_P(s_P) = 0$$

一方

$$\varphi_P(s_P) = 0 \Rightarrow (\varphi(\exists U)(s))_P = 0 \Rightarrow (\varphi(U)(s))|_{\exists V_P} = 0|_{V_P} = 0 \Rightarrow \varphi(V_P)(s|_{V_P}) = 0$$

$$\Rightarrow s|_{V_P} \in \ker\varphi(V_P) \Rightarrow s|_{V_P} \in (\ker\varphi)(V_P) \Rightarrow s_P \in (\ker\varphi)_P$$

従って

$$(\ker\varphi)_P = \ker(\varphi_P)$$

が成り立つ[1]。

次に、

$$(\mathrm{im}\ \varphi)_P = (\mathrm{im}\ \varphi)^-_P \ni s_P \Rightarrow (\mathrm{im}\ \varphi)^-(U) \ni s \Rightarrow \varphi(U)(\exists t) = s$$

$$\Rightarrow \varphi_P(t_P) = (\varphi(\exists V)(t|_V))_P = ((\varphi(U)(t))|_V)_P = (\varphi(U)(t))_P = s_p \Rightarrow s_P \in \mathrm{im}\,\varphi_P$$

逆に、

$$s_P \in \mathrm{im}\,\varphi_P \Rightarrow s_P = \varphi_P(\exists t_P) = (\varphi(\exists U)(t))_P \Rightarrow s|_{\exists W} = (\varphi(U)(t))|_W = \varphi(W)(t|_W)$$

$$\Rightarrow s|_W \in \mathrm{im}\ \varphi(W) \Rightarrow s_P \in (\mathrm{im}\varphi)_P$$

よって

$$(\mathrm{im}\ \varphi)_P = \mathrm{im}\ \varphi_P$$

が成り立つ。なお $(\mathrm{im}\ \varphi)^-$ は presheaf: $U \mapsto \mathrm{im}\ \varphi(U)$ を表している。

(b) 任意の $P \in X$ に対し、(a) より $\ker\varphi_P = (\ker\varphi)_P$ であり、Proposition 1.1 から $(\ker\varphi)_P = 0_P = 0 \Leftrightarrow \ker\varphi = 0$ なので、

$$\ker\varphi_P = 0 \Leftrightarrow \ker\varphi = 0$$

である。

同様に、(a) より $(\mathrm{im}\ \varphi)_P = \mathrm{im}\ \varphi_P$ であり、Proposition 1.1 から $(\mathrm{im}\ \varphi)_P = \mathscr{G}_P \Leftrightarrow \mathrm{im}\ \varphi = \mathscr{G}$ なので

$$\mathrm{im}\ \varphi_P = \mathscr{G}_P \Leftrightarrow \mathrm{im}\ \varphi = \mathscr{G}$$

である。

(c) 任意の $P \in X$ に対し、Proposition 1.1 と (a) より

$$\mathrm{im}\ \varphi^{i-1} = \ker\varphi^i \Leftrightarrow (\mathrm{im}\ \varphi^{i-1})_P = (\ker\varphi^i)_P \Leftrightarrow \mathrm{im}\ \varphi_P^{i-1} = \ker\varphi_P^i$$

が成立する。

2.1.3

(a) $(\Rightarrow)$ $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ が全射とし、$U \subseteq X,\ s \in \mathscr{G}(U)$ とする。

Exercise 1.2(b) より $P \in U$ に対し、φ_P は全射である。よって、$s_P = \varphi_P(t_P)$ となる $t_P \in \mathscr{F}_P$ が存在する。

このとき $\varphi_P(t_P) = (\varphi(V)(t))_P = s_P,\ \exists t \in \mathscr{F}(V)$ から、$\varphi(V)(t)|_W = s|_W,\ \exists W \subseteq U \cap V \subseteq X$ となり $\varphi(W)(t|_W) = s|_W$ が得られる。

[1] これは $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ が presheaf でも成立する。

$P \in W$ なので P の代わりに i で添字づければ、$U = \cup_{P\in W} W = \cup_i W_i,\ t_i = t|_{W_i} \in \mathscr{F}(W_i)$ として

$$\varphi(W_i)(t_i) = s|_{W_i}$$

が成り立つ。

($\Leftarrow$) $\varphi_P,\ P \in U$ の全射性を示す。

$s_P \in \mathscr{G}_P,\ s \in \mathscr{G}(V),\ V \subseteq U$ とする。前提条件から $V = \cup_i V_i,\ \varphi(t_i) = s|_{V_i},\ t_i \in \mathscr{F}(V_i)$ が成り立つので、$P \in V_i$ とすれば、

$$\varphi_P(t_{iP}) = \varphi(t_i)_P = (s|_{V_i})_P = s_P$$

であり、φ_P は全射である。

(b) $X = \mathbb{C} - 0,\ \mathscr{F}(U) : U$ 上の正則関数環とし、$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ を

$$\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \ni f(z) \mapsto \exp(f(z))$$

とする。

$\varphi(X)$ は全射にならないことを例で示す。

$g(z) = z \in \mathscr{F}(X)$ に対して $g(z) = \varphi(X)(f(z)) = \exp(f(z))$ とすると

$$\exp(f(z)) = z \Rightarrow f(z) = \log|z| + i(\mathrm{Arg}\ z + 2n\pi),\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

となる。ここで、Arg は主値を表し、$-\pi < \mathrm{Arg} \leq \pi$ である。多価関数は関数ではないので、多価関数にならないように $f(z)$ を制限すると連続関数にならない。例えば $f(z) = |z| + i\mathrm{Arg}\ z$ とすると、$z = -1$ で不連続になる。

従って、$g(z) = z \in \mathscr{F}(X)$ に対する $f(z) \in \mathscr{F}(X)$ は存在しないので、$\varphi(X)$ は全射ではない。

$\mathscr{F}_P$ の元は P で正則な関数、すなわち P の近傍で正則な関数であり、φ_P はそれらの germ を写す準同型写像である。上記の例の場合、$P \in U$ の近傍 V_P においては、不連続にならないように $\tilde{f}(z) = \log g(z)$ を作ることが可能である。$\tilde{f}(z)$ は P において正則であり、P 近傍 V_P において $\varphi_P(\tilde{f}(z)) = \exp(\tilde{f}(z)) = g(z)$ となるので、φ_P は全射である。

2.1.4

(a) まず、

$$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G} \text{ injective} \Rightarrow \varphi_P : \mathscr{F}_P \to \mathscr{G}_P \text{ injective}$$

である。なぜなら $(\ker\varphi)_P = \lim_{P\in U} \ker\varphi(U) = \lim_{P\in U} 0 = 0$ であり、また Exercise 1.2(a)(解答の注) で示したように、$(\ker\varphi)_P = \ker\varphi_P$ だからである。

Proposition-Definition 1.2 から $\theta'\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}^+$ に対し ($\theta' : \mathscr{G} \to \mathscr{G}^+$)、

$$\exists! \varphi^+ : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}^+,\ \varphi^+\theta = \theta'\varphi \tag{1}$$

なので、Exercise 1.2(b) より

$$\varphi^+ : \text{injective} \Leftrightarrow \varphi_P^+ : \text{injective}$$

である。

次に示すように、$\varphi_P^+ = \varphi_P$ が成り立つので、

$$\varphi : \text{injective} \Rightarrow \varphi^+ : \text{injective}$$

が得られる。

[$\varphi_P^+ = \varphi_P$ の証明]

$\theta : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$ に対し

$$\exists! \theta_P : \mathscr{F}_P \to \mathscr{F}_P^+,\ \theta_P \mu_U = \mu_U^+ \theta(U)$$

が存在するが ([1], Exercise 2.18、μ_U はそこの μ_i に相当、以下 ν も同様)、Proposition-Definition 1.2 の証明の最後に示されているように、θ_P は同型なので、id とみなして $\mathscr{F}_P^+ = \mathscr{F}_P$ とすると

$$\mu_U = \mu_U^+ \theta(U) \tag{2}$$

が得られる。同様にして

$$\nu_U = \nu_U^+ \theta'(U) \tag{3}$$

である。

一方、$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ に対し

$$\exists! \varphi_P : \mathscr{F}_P \to \mathscr{G}_P,\ \nu_U \varphi(U) = \varphi_P \mu_U \tag{4}$$

が存在する ([1], Exercise 2.18)。

さらに $\mathscr{F}_P^+ = \mathscr{F}_P, \mathscr{G}_P^+ = \mathscr{G}_P$ より、同様に

$$\exists! \varphi_P^+ : \mathscr{F}_P^+ \to \mathscr{G}_P^+,\ \nu_U^+ \varphi^+(U) = \varphi_P^+ \mu_U^+ \tag{5}$$

が存在する。

式 (5) に右から $\theta(U)$ をかけると

$$\nu_U^+ \varphi^+(U) \theta(U) = \varphi_P^+ \mu_U^+ \theta(U) \overset{(i)}{\Rightarrow} \nu_U^+ \theta'(U) \varphi(U) = \varphi_P^+ \mu_U \overset{(ii)}{\Rightarrow} \nu_U \varphi(U) = \varphi_P^+ \mu_U$$

となるので、式 (4) における φ_P の一意性から $\varphi_P^+ = \varphi_P$ が得られる。ここで、(i) には式 (1) と式 (2) を、(ii) には式 (3) を用いた。

(b) Inclusion $\iota(U) : \mathrm{im}\ \varphi(U) \to \mathscr{G}(U)$ は単射なので ι は presheaf から sheaf への単射である。よって、(a) より $\iota^+ : \mathrm{im}\ \varphi \to \mathscr{G}$ も単射である。従って、$\mathrm{im}\ \varphi$ は sheaf $\mathscr{G}$ の subsheaf とみなせる[2]。

[2]Morphism $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ に対して $\varphi(V) \rho_{UV}(s) = \rho'_{UV} \varphi(U)(s)$ が成立するが、φ が単射の場合 inclusion とみなすと $\rho_{UV}(s) = \rho'_{UV}(s)$ となるので、$\mathscr{F}$ は $\mathscr{G}$ の subsheaf である。

2.1.5

Morphism φ に対して

$$\varphi : \text{isomorphism} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \varphi_P : \text{isomorphism} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \varphi_P : \text{group bijection} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \varphi : \text{bijection}$$

が成立する。ここで、(1) は Proposition 1.1、(2) は φ_P が環準同型であることから、(3) は Exercise 1.2(b) による。

2.1.6

(a) $\mathscr{F}'$ が $\mathscr{F}$ の subsheaf なら $\mathscr{F}'_P$ は $\mathscr{F}_P$ の部分環なので、系列

$$0 \to \mathscr{F}'_P \to \mathscr{F}_P \to \mathscr{F}_P/\mathscr{F}'_P \to 0$$

は exact である。よって Exercise 1.2(c) から

$$0 \to \mathscr{F}' \overset{\iota}{\to} \mathscr{F} \overset{\varphi}{\to} \mathscr{F}/\mathscr{F}' \to 0$$

も exact である。従って、$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{F}/\mathscr{F}'$ は全射であり、$\ker\varphi = \mathrm{im}\ \iota \approx \mathscr{F}'$ である。

(b) 系列

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}\text{"} \to 0$$

が exact なので、 $\mathscr{F}' \to \mathscr{F}$ は単射であり、 $\mathscr{F}'$ は $\mathscr{F}$ の subsheaf である。

Exercise 1.2(c) より

$$0 \to \mathscr{F}'_P \overset{i_P}{\to} \mathscr{F}_P \overset{\varphi_P}{\to} \mathscr{F}\text{"}_P \to 0$$

も exact である。

従って、$\mathscr{F}\text{"}_P \approx \mathscr{F}_P/\ker\varphi_P \approx \mathscr{F}_P/\mathrm{im}\ i_P \approx \mathscr{F}_P/\mathscr{F}'_P = (\mathscr{F}/\mathscr{F}')_P$ となる。よって、Proposition 1.1 より

$$\mathscr{F}\text{"} \approx \mathscr{F}/\mathscr{F}'$$

が得られる。

2.1.7

(a) Morphism $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ に対して準同型 $\varphi_P : \mathscr{F}_P \to \mathscr{G}_P$ が得られる。

準同型定理から

$$\mathrm{im}\varphi_P \approx \mathscr{F}_P/\ker\varphi_P = (\mathscr{F}/\ker\varphi)_P$$

Proposition 1.1 より

$$\mathrm{im}\varphi \approx \mathscr{F}/\ker\varphi$$

(b) Presheaf $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$ に対して

$$0 \to \mathscr{F}'(U) \to \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)/\mathscr{F}'(U) \to 0$$

は群として exact なので、[1], Exercise 2.19 より

$$0 \to \mathscr{F}'_P \to \mathscr{F}_P \to \lim_{P \in U} \mathscr{F}(U)/\mathscr{F}'(U) \to 0$$

は exact である。よって、

$$\lim_{P \in U} \mathscr{F}(U)/\mathscr{F}'(U) = \mathscr{F}_P/\mathscr{F}'_P = \mathscr{F}^+_P/\mathscr{F}'^+_P = (\mathscr{F}^+/\mathscr{F}'^+)_P$$

である。

これを用いると

$$(\mathrm{coker}\varphi)_P = \lim_{P \in U} \mathscr{G}(U)/\mathrm{im}\varphi(U) = (\mathscr{G}/\mathrm{im}\varphi)_P$$

よって、

$$\mathrm{coker}\varphi = \mathscr{G}/\mathrm{im}\varphi$$

が得られる。

2.1.8

Sheaf 系列

$$0 \to \mathscr{F}' \xrightarrow{i} \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{F}"$$

が完全ならば、任意の開集合 $U \subseteq X$ に対して

$$0 \to \mathscr{F}'(U) \xrightarrow{i(U)} \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\varphi(U)} \mathscr{F}"(U)$$

も完全なことを示す。

Caution 1.2.1 より $i(U)$ は単射なので、あとは $\mathrm{im}\ i(U) = \ker\varphi(U)$ 言えばよい。

Exercise 1.2(c) から

$$0 \to \mathscr{F}'_P \xrightarrow{i_P} \mathscr{F}_P \xrightarrow{\varphi_P} \mathscr{F}"_P$$

は exact である。これから

$$s \in \mathrm{im}\, i(U) \Rightarrow s_P \in (\mathrm{im}\, i)_P = \mathrm{im}\, i_P = \ker\varphi_P = (\ker\varphi)_P \Rightarrow s|_V \in \ker\varphi(V), P \in \exists V \subseteq U$$

となり、$0 = \varphi(V)(s|_V) = (\varphi(U)(s))|_V$ が成立する。$\mathscr{F}"$ の sheaf 性から $\varphi(U)(s) = 0 \Rightarrow s \in \ker\varphi(U)$ が得られる。

逆を示す。

$$s \in \ker\varphi(U) \Rightarrow s_P \in (\ker\varphi)_P = \ker\varphi_P = \mathrm{im}\ i_P \Rightarrow s_P = i_P(\exists t_P)$$

より、

$$i(V_P)(t^P) = s|_{V_P},\ \exists t^P \in \mathscr{F}'(\exists V_P)$$

が得られるが、これらを貼り合わせて $t \in \mathscr{F}'(U)$ を求める。
　$Q \in U$ に対して同様に $t^Q \in V^Q$ とし $V = V^P \cap V^Q$ とおくと

$$i(V)(t^P|_V) = (i(V_P)(t^P))|_V = (s|_{V^P})|_V = s|_V = (s|_{V^Q})|_V = i(V)(t^Q|_V)$$

であり、$i(V)$ は単射なので、$t^P|_V = t^Q|_V$ を得る。$U = \cup_{P\in U} V_P$ より、$\mathscr{F}'$ の sheaf 性から $\exists t \in \mathscr{F}'(U),\ t|_{V_P} = t^P$ が存在する。

$$(i(U)(t))|_{V_P} = i(V_P)(t|_{V_P}) = i(V_P)(t^P) = s|_{V_P}$$

となるので、貼り合わせの一意性から $i(U)(t) = s$ が得られる。従って $s \in \mathrm{im}\ i(U)$ から $\mathrm{im}\ i(U) \supseteq \ker\varphi(U)$ となる。

2.1.9

　$\mathscr{F}_\lambda, \lambda \in \Lambda, |\Lambda| < \infty$ が sheaf ならば、

$$\oplus_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}_\lambda : U \mapsto \oplus_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}_\lambda(U),\ \rho_{UV}(\{s_\lambda\}) = (\{\rho^\lambda_{UV}(s_\lambda)\})$$

も sheaf となる (証明は容易なので省略)。
　この $\oplus_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}_\lambda$ は次の universal property を満たすことから category of sheaf の direct sum となる:
　X 上の sheaf $\mathscr{H}$ と morphism $\varphi_\lambda : \mathscr{F}_\lambda \mapsto \mathscr{H},\ \forall\lambda \in \Lambda$ に対して、$\varphi_\lambda = \varphi \circ \iota_\lambda$ を満たす morphism

$$\varphi : \oplus_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}_\lambda \to \mathscr{H},\ \varphi(U)(\{s_\lambda\}) = \sum_\lambda \varphi_\lambda(U)(s_\lambda),\ s_\lambda \in \mathscr{F}_\lambda(U)$$

が存在し、一意的である。ただし、ι_λ は埋込で

$$\iota_\lambda : \mathscr{F}_\lambda \mapsto \oplus_\lambda\mathscr{F}_\lambda,\ \iota_\lambda(U)(s_\lambda) = (0, \cdots, 0, s_\lambda, 0, \cdots, 0)$$

であり、morphism である。

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}_\lambda \arrow[rr, "\varphi_\lambda"] \arrow[dr, "\iota_\lambda"'] & & \mathscr{H} \\
& \oplus_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}_\lambda \arrow[ur, dotted, "\exists!\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

φ は $\rho'_{UV}\varphi(U) = \varphi(V)\rho_{UV}$ を満たすので morphism である (ρ' は $\mathscr{H}$ の restriction map)。また、$\varphi_\lambda = \varphi \circ \iota_\lambda$ を満たす φ の一意性は、

$$\varphi(U)(\{s_\lambda\}) = \varphi(U)\sum_\lambda(0,\cdots,0,s_\lambda,0,\cdots,0) = \sum_\lambda \varphi(U)(\iota_\lambda(U)(s_\lambda) = \sum_\lambda \varphi_\lambda(s_\lambda)$$

より φ_λ のみに依存することによる[3]。

同様に、$\mathscr{F}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda$ が sheaf ならば直積 (Λ の濃度に制限はない)

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}_\lambda : U \mapsto \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}_\lambda(U),\ \rho_{UV}(s) = \prod_{\lambda\in\Lambda}\rho^\lambda_{UV}(s^\lambda)$$

も sheaf となる。

$\prod_\lambda \mathscr{F}_\lambda$ が category of sheaf の direct product となることも、次の universal property を満たすことから明らかである:

X 上の sheaf $\mathscr{H}$ と morphism $\varphi_\lambda : \mathscr{H} \mapsto \mathscr{F}_\lambda$ に対して、$\varphi_\lambda = \pi_\lambda\varphi$ を満たす morphism

$$\varphi : \mathscr{H} \to \prod_\lambda \mathscr{F}_\lambda,\ \varphi(U)(s) = (\{\varphi_\lambda(s)\}),\ s \in \mathscr{H}(U)$$

が一意的に存在する。ただし、$\pi_\lambda : \prod_\lambda \mathscr{F}_\lambda \to \mathscr{F}_\lambda$ は射影である。

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H} \arrow[rr, "\varphi_\lambda"] \arrow[dr, dotted, "\exists!\varphi"'] & & \mathscr{F}_\lambda \\
& \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}_\lambda \arrow[ur, "\pi_\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

2.1.10

Abelian group の順系には順極限が存在する ([1], Exercise 2.14)。

$\mathscr{F} : U \mapsto \varinjlim \mathscr{F}_i(U)$ が presheaf であることを示す。

(a) $\mathscr{F}_i(U)$ が abelian group なので $\mathscr{F}(U) = \varinjlim \mathscr{F}_i(U)$ も abelian group である。

(b) $V \subseteq U$ のとき

$$\rho^i_{UV} : \mathscr{F}_i(U) \to \mathscr{F}_i(V),\ \rho^j_{UV}\mu_{ij}(U) = \mu_{ij}(V)\rho^i_{UV} \tag{6}$$

である。ここで、μ_{ij} は direct system における morphism なので ([1], Exercise 2.14)、restriction map と compatible であり式 (6) が成立する。

このとき、[1], Exercise 2.18 より

$$\exists!\rho_{UV} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V),\ \rho_{UV}\mu_i(U) = \mu_i(V)\rho^i_{UV} \tag{7}$$

[3] $|\Lambda| = \infty$ のときは、直和の元 $\oplus_\lambda x_\lambda$ には、有限個を除いて x_λ が 0 という条件があるため、$\oplus_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}_\lambda$ は presheaf であっても、sheaf 条件 (b)-(4) を満たさず、sheaf にはならない。

となる restriction map が一意に存在する。また、この式 (7) は μ_i が morphism であることも示している。

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{F}_i(U) \arrow[rrr, "\rho^i_{UV}"] \arrow[dd, "\mu_{ij}(U)"'] \arrow[dr, "\mu_i(U)"] & & & \mathscr{F}_i(V) \arrow[dd, "\mu_{ij}(V)"] \arrow[dl, "\mu_i(V)"'] \\
& \mathscr{F}(U) \arrow[r, dotted, "\exists!\rho_{UV}"] & \mathscr{F}(V) & \\
\mathscr{F}_j(U) \arrow[rrr, "\rho^j_{UV}"'] \arrow[ur, "\mu_j(U)"'] & & & \mathscr{F}_j(V) \arrow[ul, "\mu_j(V)"]
\end{tikzcd}
$$

(b-0) $\mathscr{F}(\varnothing) = \varinjlim \mathscr{F}_i(\varnothing) = 0$
(b-1) $\rho_{UU} = \mathrm{id}$ は一意性から明らかである。
(b-2) $W \subseteq V \subseteq U$ のとき

$$\rho_{UV}\mu_i(U) = \mu_i(V)\rho^i_{UV},\ \rho_{VW}\mu_i(V) = \mu_i(W)\rho^i_{VW}$$

$$\Rightarrow \rho_{VW}\rho_{UV}\mu_i(U) = \rho_{VW}\mu_i(V)\rho^i_{UV} = \mu_i(W)\rho^i_{VW}\rho^i_{UV} = \mu_i(W)\rho^i_{UW}$$

となるので、$\rho_{UW}\mu_i(U) = \mu_i(W)\rho^i_{UW}$ を満たす ρ_{UW} の一意性より $\rho_{UW} = \rho_{VW}\rho_{UV}$ である ([1], Exercise 2.18)。

Presheaf $\mathscr{F} : U \mapsto \varinjlim \mathscr{F}_i(U)$ の sheafification を $\mathscr{F}^+ = \varinjlim \mathscr{F}_i$ とし、これが category of sheaf における direct limit の universal property を満たすこと、すなわち下図 (9) の外回りが可換となるような ψ が一意的に存在することを示す。

Sheaf $\mathscr{G}$ と $\alpha_i = \alpha_j\mu_{ij}$ を満たす morphism $\alpha_i : \mathscr{F}_i \to \mathscr{G}$ が与えられたとする。このとき、

$$\alpha_i = \varphi\mu_i \tag{8}$$

となる $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ が一意的に存在する ([1], Exercise 2.16)。この φ は次に示すように $\rho'_{UV}\varphi(U) = \varphi(V)\rho_{UV}$ を満たすので morphism である。ここで ρ'_{UV} は $\mathscr{G}$ の restriction map である。

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{F}_i(U) \arrow[d, "\mu_i(U)"'] \arrow[dr, "\alpha_i(U)"] & \\
\mathscr{F}(U) \arrow[r, dotted, "\exists!\varphi(U)"] \arrow[d, "\theta(U)"'] & \mathscr{G}(U) \\
\mathscr{F}^+(U) \arrow[ur, dotted, "\exists!\psi(U)"'] &
\end{tikzcd}
\tag{9}
$$

[$\because$] α_i が morphism であることと式 (7)、(8) とから得られる

$$\rho'_{UV}\alpha_i(U) = \alpha_i(V)\rho^i_{UV},\ \rho_{UV}\mu_i(U) = \mu_i(V)\rho^i_{UV}$$

$$\alpha_i(U) = \varphi(U)\mu_i(U),\ \alpha_i(V) = \varphi(V)\mu_i(V)$$

より

$$\rho'_{UV}\varphi(U)\mu_i(U) = \rho'_{UV}\alpha_i(U) = \alpha_i(V)\rho^i_{UV} = \varphi(V)\mu_i(V)\rho^i_{UV} = \varphi(V)\rho_{UV}\mu_i(U)$$

となるが、$\mathscr{F}(U) = \varinjlim \mathscr{F}_i(U)$ の任意の元は $s = \mu_i(U)(s_i),\ s_i \in \mathscr{F}_i(U),\ \exists i$ とかけるので ([1], Exercise 2.15)、

$$\rho'_{UV}\varphi(U)(s) = \rho'_{UV}\varphi(U)\mu_i(U)(s_i)) = \varphi(V)\rho_{UV}\mu_i(U)(s_i) = \varphi(V)\rho_{UV}(s)$$

より $\rho'_{UV}\varphi(U) = \varphi(V)\rho_{UV}$ である。([∵] 終)

すると Proposition-definition 1.2 からこの φ に対して

$$\varphi = \psi\theta \tag{10}$$

となる morphism $\psi : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$ が一意的に存在する ($\theta : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$ は Proposition-definition 1.2 で定義されている)。

ここで $\sigma_i = \theta\mu_i : \mathscr{F}_i \to \mathscr{F}^+$ とすると $\sigma_i = \sigma_j\mu_{ij}$ が成立する。このとき、

$$\psi\sigma_i = \psi\theta\mu_i = \varphi\mu_i = \alpha_i$$

となるが、このような ψ は一意的である。なぜなら、もし $\alpha_i = \psi'\sigma_i = (\psi'\theta)\mu_i$ とすると、式 (8) における φ の一意性から $\varphi = \psi'\theta$ となる。すると今度は式 (10) における ψ の一意性から $\psi' = \psi$ となる。

よって、$\psi : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$ が一意的に存在し、α_i は $\mathscr{F}_i \xrightarrow{\sigma_i} \mathscr{F}^+ \xrightarrow{\psi} \mathscr{G}$ の composition で与えられる。

2.1.11

$\mathscr{F} : U \mapsto \varinjlim \mathscr{F}_i(U)$ が presheaf となるのは前問 Exercise 1.10 による。X が noetarian space のときには、sheaf となることを示す。

(b-3) $U = \cup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ とする。$\mu_i,\ \mu_{ij}$ を [1], Excercise 2.14 における準同型写像とする。μ_{ij} を morphism とすると、Exercise 1.10 で示したように、μ_i も morphism となる。

$$s = \mu_i(U)(s^i),\ \exists s^i \in \mathscr{F}_i(U)$$

と書けるので、任意の λ に対して

$$0 = s|_{V_\lambda} = (\mu_i(U)(s^i))|_{V_\lambda} = \mu_i(V_\lambda)(s^i|_{V_\lambda})$$

より、

$$\mu_{ij_\lambda}(V_\lambda)(s^i|_{V_\lambda}) = 0$$

となる $j_\lambda(\geq i)$ が存在する ([1], Exercise 2.15)。

X は noetarian なので擬コンパクトだから、Λ のある有限部分集合 Λ' に対して $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} V_\lambda$ とできる ([1], Exercise 6.6(ii))。
$j = \max_{\lambda \in \Lambda'} j_\lambda$ とすると、

$$\mu_{j_\lambda j}(V_\lambda)\mu_{ij_\lambda}(V_\lambda)(s^i|_{V_\lambda}) = 0 \Rightarrow \mu_{ij}(V_\lambda)(s^i|_{V_\lambda}) = 0 \Rightarrow (\mu_{ij}(U)(s^i))|_{V_\lambda} = 0$$

となる。$\mathscr{F}_j$ の sheaf 性から $\mu_{ij}(U)(s^i) = 0$ が得られ

$$s = \mu_i(U)(s^i) = \mu_j(U)\mu_{ij}(U)(s^i) = 0$$

が成り立つ。

(b-4) $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ において、

$$s_\lambda \in \mathscr{F}(V_\lambda),\ s_\lambda|_W = s_{\lambda'}|_W,\ W = V_\lambda \cap V_{\lambda'}$$

とする。このとき、

$$s_\lambda = \mu_{i_\lambda}(V_\lambda)(s_\lambda^{i_\lambda}),\ s_\lambda^{i_\lambda} \in \mathscr{F}_{i_\lambda}(V_\lambda)$$

と書ける。ここで、(b-3) と同様、Λ のある有限部分集合 Λ' に対して $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} V_\lambda$ とできる。
$i := \max_{\lambda \in \Lambda'} i_\lambda$ とすると、

$$s_\lambda = \mu_i(V_\lambda)\mu_{i_\lambda i}(V_\lambda)(s_\lambda^{i_\lambda})$$

なので、$s_\lambda^i := \mu_{i_\lambda i}(V_\lambda)(s_\lambda^{i_\lambda}) \in \mathscr{F}_i(V_\lambda)$ とおくと、

$$s_\lambda = \mu_i(V_\lambda)(s_\lambda^i)$$

となる。
さて、ここで、

$$s_\lambda^j|_W = s_{\lambda'}^j|_W \text{ for } s_\lambda^j := \mu_{ij}(V_\lambda)(s_\lambda^i),\ s_{\lambda'}^j := \mu_{ij}(V_{\lambda'})(s_{\lambda'}^i),\ \exists j \geq i \tag{11}$$

を示す。

$$s_\lambda|_W = s_{\lambda'}|_W \Rightarrow \mu_i(V_\lambda)(s_\lambda^i)|_W = \mu_i(V_{\lambda'})(s_{\lambda'}^i)|_W$$

$$\Rightarrow \mu_i(W)(s_\lambda^i|_W) = \mu_i(W)(s_{\lambda'}^i|_W) \overset{(*)}{\Rightarrow} \mu_{ij}(W)(s_\lambda^i|_W) = \mu_{ij}(W)(s_{\lambda'}^i|_W),\ \exists j \geq i$$

$$\Rightarrow (\mu_{ij}(V_\lambda)(s_\lambda^i))|_W = (\mu_{ij}(V_{\lambda'})(s_{\lambda'}^i))|_W \Rightarrow s_\lambda^j|_W = s_{\lambda'}^j|_W$$

ここで式変形 (*) は [1], Exercise 2.15 による。$\mathscr{F}_j$ の sheaf 性から

$$\exists s^j \in \mathscr{F}_j(U),\ s^j|_{V_\lambda} = s_\lambda^j,\ \forall\lambda$$

が得られ、よって $s := \mu_j(U)(s^j) \in \mathscr{F}(U)$ とおけば

$$s|_{V_\lambda} = (\mu_j(U)(s^j))|_{V_\lambda} = \mu_j(V_\lambda)(s^j|_{V_\lambda}) = \mu_j(V_\lambda)(s_\lambda^j)$$

$$\overset{(11)}{=} \mu_j(V_\lambda)\mu_{ij}(V_\lambda)(s^i_\lambda) = \mu_i(V_\lambda)(s^i_\lambda) = s_\lambda,\ \lambda \in \Lambda'$$

が成り立つ。

最後に、$\delta \in \Lambda - \Lambda'$ に対しても $s|_{V_\delta} = s_\delta$ となることを示す。
$W_\lambda = V_\lambda \cap V_\delta$ とおくと、前提より $s_\lambda|_{W_\lambda} = s_\delta|_{W_\lambda}$ が成り立っている。$V_\delta = V_\delta \cap (\bigcup_{\lambda\in\Lambda'} V_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} W_\lambda$ は V_δ の covering となっており、

$$(s|_{V_\delta})|_{W_\lambda} = s|_{W_\lambda} = (s|_{V_\lambda})|_{W_\lambda} = s_\lambda|_{W_\lambda} = s_\delta|_{W_\lambda}$$

から、既に示した (b-3) を用いて

$$s|_{V_\delta} = s_\delta,\ \delta \in \Lambda - \Lambda'$$

を得る。

以上により $\mathscr{F}(U) = \varinjlim \mathscr{F}_i(U)$ は sheaf である。

特に $U = X$ とすれば、

$$\varinjlim \Gamma(X, \mathscr{F}_i) = \varinjlim \mathscr{F}_i(X) = \mathscr{F}(X) = \Gamma(X, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \varinjlim \mathscr{F}_i)$$

が成立する。

2.1.12

Sheaf の逆系を $(\mathscr{F}_i,\ \varphi_{ij})_{i,j\in I}$ とし、$\varphi_{ij} : \mathscr{F}_j \to \mathscr{F}_i$ とする。ここで φ_{ij} は morphism である。

$\mathscr{F}_i$ に対する逆極限 $\mathscr{F} = \varprojlim \mathscr{F}_i$ および morphism $\varphi_i : \mathscr{F} \to \mathscr{F}_i$ が存在し、次の性質を満たすことを示す: sheaf $\mathscr{G}$ と morphism $\psi_i : \mathscr{G} \to \mathscr{F}_i$ に対し、$\psi_i = \varphi_i\psi$ を満たす ψ が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}_i & & \mathscr{G} \arrow[ll, "\psi_i"'] \arrow[dl, dotted, "\exists!\psi"] \\
& \mathscr{F} \arrow[ul, "\varphi_i"] &
\end{tikzcd} \tag{12}$$

Abelian group の逆系の逆極限は整合的系列で構成でき、universal property を満たす (例えば [2], 例題 24, p.123)。そこで、閉集合 $U \subseteq X$ に対し、逆極限を整合的系列で構成し、

$$(\mathscr{F}(U),\ \varphi_i(U))_{i\in I},\ \mathscr{F}(U) = \varprojlim \mathscr{F}_i(U)$$

$$\varphi_i(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_i(U),\ s = (\{s_i\}) \mapsto s_i$$

$$\varphi_i(U) = \varphi_{ij}(U)\varphi_j(U)$$

とすると下図式 (14) は可換であり、

$$\psi_i(U) = \varphi_i(U)\exists!\psi(U) \tag{13}$$

が成り立つ。

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{F}_i(U) & & \mathscr{G}(U) \arrow[ll, "\psi_i(U)"'] \arrow[dl, dotted, "\exists!\psi(U)"] \\
& \mathscr{F}(U) \arrow[ul, "\varphi_i(U)"] &
\end{tikzcd}
\tag{14}
$$

このとき、$\mathscr{F}$ が sheaf となることを示す。

(a) $s = (\{s_i\}), t = (\{t_i\}) \in \mathscr{F}(U),\ \varphi_{ij}(s_j) = s_i, \varphi_{ij}(t_j) = t_i$ とすると、φ_{ij} が準同型なので $\varphi_{ij}(s_j + t_j) = s_i + t_i$ が成立するから $\mathscr{F}(U)$ は abelian group である。

(b) $V \subseteq U$ とする。$\varprojlim \mathscr{F}_i(V)$ の universal property から次式を満たす一意的な ρ_{UV} が得られる。この式は φ_i が morphism であることも示している。

$$
\exists! \rho_{UV} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V),\ \rho^j_{UV}\varphi_j(U) = \varphi_j(V)\rho_{UV} \tag{15}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{F}_i(U) \arrow[rrr, "\rho^i_{UV}"] & & & \mathscr{F}_i(V) \\
& \mathscr{F}(U) \arrow[ul, "\varphi_i(U)"'] \arrow[dl, "\varphi_j(U)"] \arrow[r, dotted, "\exists!\rho_{UV}"] & \mathscr{F}(V) \arrow[ur, "\varphi_i(V)"] \arrow[dr, "\varphi_j(V)"'] & \\
\mathscr{F}_j(U) \arrow[uu, "\varphi_{ij}(U)"] \arrow[rrr, "\rho^j_{UV}"'] & & & \mathscr{F}_j(V) \arrow[uu, "\varphi_{ij}(V)"']
\end{tikzcd}
$$

(b-0) $\mathscr{F}(\varnothing) = \varprojlim \mathscr{F}_i(\varnothing) = \varprojlim 0 = 0$

(b-1) ρ_{UV} の一意性から $\rho_{UU} = id_{\mathscr{F}(U)}$ である。

(b-2) 式 (15) を適用すると

$$
\varphi_i(W)\rho_{VW}\rho_{UV} = \rho^i_{VW}\varphi_i(V)\rho_{UV} = \rho^i_{VW}\rho^i_{UV}\varphi_i(U) = \rho^i_{UW}\varphi_i(U)
$$

となる。$\rho^i_{UW}\varphi_i(U) = \varphi_i(W)\rho_{UW}$ を満たす ρ_{UW} は一意的なので

$$
\rho_{UW} = \rho_{VW}\rho_{UV}
$$

である。

(b-3) $U = \bigcup_\lambda V_\lambda,\ s = (\{s_i\}) \in \mathscr{F}(U),\ s|_{V_\lambda} = 0$ とする。このとき、

$$
(\varphi_i(U)(s))|_{V_\lambda} = \varphi_i(V_\lambda)(s|_{V_\lambda}) = 0
$$

$\mathscr{F}_i$ の sheaf 性より $\varphi_i(U)(s) = s_i = 0,\ \forall i,$ なので $s = 0$ である。

(b-4) $U=\bigcup_{\lambda} V_\lambda,\ s_\lambda \in \mathscr{F}(V_\lambda),\ s_\lambda|_W = s_{\lambda'}|_W,\ W = V_\lambda \cap V_{\lambda'}$ とする。このとき、任意の i に対し

$$\varphi_i(W)(s_\lambda|_W) = \varphi_i(W)(s_{\lambda'}|_W) \Rightarrow (\varphi_i(V_\lambda)(s_\lambda))|_W = (\varphi_i(V_{\lambda'})(s_{\lambda'}))|_W$$

なので、$\mathscr{F}_i$ の sheaf 性より

$$s^i|_{V_\lambda} = \varphi_i(V_\lambda)(s_\lambda),\ \exists s^i \in \mathscr{F}_i(U) \tag{16}$$

が成り立つ。

さらに

$$s^i|_{V_\lambda} = \varphi_i(V_\lambda)(s_\lambda) = \varphi_{ij}(V_\lambda)\varphi_j(V_\lambda)(s_\lambda) = \varphi_{ij}(V_\lambda)(s^j|_{V_\lambda}) = (\varphi_{ij}(U)(s^j))|_{V_\lambda}$$

が成立するので、やはり $\mathscr{F}_i$ の sheaf 性より $s^i = \varphi_{ij}(U)(s^j)$ となり、整合的系列となる。よって

$$s := (\{s^i\}) \in \lim_{\leftarrow} \mathscr{F}_i(U)$$

である。

$$\varphi_i(V_\lambda)(s|_{V_\lambda}) = (\varphi_i(U)(s))|_{V_\lambda} = s^i|_{V_\lambda} \overset{(12)}{=} \varphi_i(V_\lambda)(s_\lambda)$$

なので、$s|_{V_\lambda} = s_\lambda$ が成り立つ。

ψ が morphism となることは、morphism ψ_i についての restriction map との可換性から得られる:

$$\rho^{\mathscr{F}_i}_{UV}\psi_i(U) = \psi_i(V)\rho^{\mathscr{G}}_{UV} \overset{(13)}{\Rightarrow} \rho^{\mathscr{F}_i}_{UV}\varphi_i(U)\psi(U) = \varphi_i(V)\psi(V)\rho^{\mathscr{G}}_{UV}$$

$$\Rightarrow \varphi_i(V)\rho^{\mathscr{F}}_{UV}\psi(U) = \varphi_i(V)\psi(V)\rho^{\mathscr{G}}_{UV} \Rightarrow \rho^{\mathscr{F}}_{UV}\psi(U) = \psi(V)\rho^{\mathscr{G}}_{UV}$$

以上により $\mathscr{F} = \lim\limits_{\leftarrow} \mathscr{F}_i$ は sheaf であることが示された。

任意の開集合 $U \subseteq X$ に対する図式 (14) が可換で $\psi(U)$ が一意的なので、図式 (12) も可換で ψ は一意的である。従って sheaf $\mathscr{F} : U \mapsto \lim\limits_{\leftarrow} \mathscr{F}_i(U)$ も universal property を満たす。

2.1.13

任意の開集合 $U \subseteq X$ と任意の section $s \in \mathscr{F}(U)$ に対して

$$\overline{s} : U \to \text{Spé}(\mathscr{F}) = \bigcup_{P\in X} \mathscr{F}_P,\ P \mapsto s_P$$

が連続となる最強位相を Spé($\mathscr{F}$) に導入する。

このとき、$\{\overline{s}(U)\}_{s\in\mathscr{F}(U), U\subseteq X}$ は Spé($\mathscr{F}$) の開基である。
($\because$) $\overline{s}(U)$ が開集合であること: $Q \in \overline{s}^{-1}(\overline{s}(U)) \Rightarrow \overline{s}(Q) \in \overline{s}(U) \Rightarrow s_Q = s_P,\ P \in$

U より、s_P, s_Q は germ として等しいので、P の近傍は Q を含み $Q \in U$ となる。$\overline{s}^{-1}(\overline{s}(U)) \supseteq U$ は自明なので

$$\overline{s}^{-1}(\overline{s}(U)) = U \tag{17}$$

が得られ、$\overline{s}(U)$ は開集合である。

Spé($\mathscr{F}$) の開集合は $V = \bigcup_s \overline{s}(\overline{s}^{-1}(V))$ となることを示す。ここで、s は全ての section、すなわち、各 $U \subseteq X$ に対する $\forall s \in \mathscr{F}(U)$ をわたる。$V \supseteq \overline{s}(\overline{s}^{-1}(V))$ より $V \supseteq \bigcup_s \overline{s}(\overline{s}^{-1}(V))$ である。一方、 Spé($\mathscr{F}$) の元は s_P の形をしているので、V の任意の元は $\exists P \in X,\ \exists s \in \mathscr{F}(U_P),\ \exists U_P \ni P$ に対して $s_P = \overline{s}(P) \in V$ となる。よって $P \in \overline{s}^{-1}(V) \Rightarrow \overline{s}(P) = s_P \in \overline{s}(\overline{s}^{-1}(V))$ より $V \subseteq \bigcup_s \overline{s}(\overline{s}^{-1}(V))$ が得られる。($\because$ 終)

まず $\mathscr{F}^+(U) \ni \alpha : U \to$Spé($\mathscr{F}$) が連続となることを示す。$\forall P \in U$ に対し、$\alpha(P) = s_P \in$Spé($\mathscr{F}$) の近傍を V とする。Proposition-definition 1.2 の条件 (2) から、$\alpha|_{U^P} = \overline{s}|_{U^P}$ となる開集合 $P \in U^P \subseteq U$ が存在する。

このとき、既に示したように $\overline{s}(U^P)$ は開集合なので、

$$P \in W := \overline{s}^{-1}(V \cap \overline{s}(U^P)) \subseteq \overline{s}^{-1}(\overline{s}(U^P)) \overset{(17)}{=} U^P$$

であり、$\alpha|_{U^P} = \overline{s}|_{U^P}$ から

$$\alpha(W) = \overline{s}(W) \subseteq \overline{s}(\overline{s}^{-1}(V)) \subseteq V$$

が成り立つ。よって、$\alpha(P)$ 近傍 V に対して、P 近傍 W が存在し、$\alpha(W) \subseteq V$ が成り立つので、α は P で連続である。α は $\forall P \in U$ で連続となるので、α は U で連続である。

次に連続な section $\beta : U \to$Spé($\mathscr{F}$) が $\mathscr{F}^+(U)$ に属すことを示す。section なので $\beta(P) \in \mathscr{F}_P$ であり ($\beta(P) = t_Q \Rightarrow \pi\beta(P) = \mathrm{id}(P) = P,\ \pi(t_Q) = Q$)、Proposition-definition 1.2 の条件 (1) を満たす。

$P \in U$ に対し $\beta(P) = \exists s_P \in \overline{s}(V),\ P \in \exists V \subseteq U$ で、$\overline{s}(V)$ は開集合なので、β の $P \in U$ における連続性から $\beta(W) \subseteq \overline{s}(V),\ P \in \exists W$ となる開集合 W が存在する。

このとき

$$Q \in W \Rightarrow \beta(Q) \in \beta(W) \subseteq \overline{s}(V) \Rightarrow \beta(Q) = \overline{s}(\exists R) = s_R \in \mathscr{F}_R,\ R \in V$$

となる。ここで、Spé($\mathscr{F}$) の section は $\pi\beta = \mathrm{id}$ と定義されているので、これを使えば上式は

$$Q = \pi\beta(Q) = \pi(S_R) = R \Rightarrow \beta(Q) = s_Q$$

となって Proposition-definition 1.2 の条件 (2) を満たす。

しかし、section の定義として実は $\pi\beta = \mathrm{id}$ でなく、$\beta(P) \in \mathscr{F}_P$(Proposition-Definition 1.2 の条件 (1)) で十分である[4]。

[4]密着空間では $P \neq Q$ であっても germ は $s_P = < U_P, s > = < V_Q, s > = s_Q$ より等しくなるので、π: Spé($\mathscr{F}$)$\to X,\ s_P \mapsto P$ は写像にならない。写像 π が定義できるためには Spé($\mathscr{F}$)$= \bigcup_P < p, \mathscr{F}_P >$ とし、その意味で disjoint union によって Spé($\mathscr{F}$)$= \bigsqcup_P \mathscr{F}_P$ とするならばわからないでもない。しかしこうすると $\overline{s}$ の定義がややこしくなる。いずれにしても Spé($\mathscr{F}$)$= \{\bigcup_P \mathscr{F}_P\}$ としている限り無理がある。それよりも Proposition-Definition 1.2 の条件 (1) の方がスッキリする。

$\pi\beta = \mathrm{id}$ を使わず、$\beta(P) \in \mathscr{F}_P$ のみ使う証明

$$\beta(Q) \in \mathscr{F}_Q \Rightarrow \beta(Q) = \exists t_Q^Q$$

より $s_R = t_Q^Q$ が得られる (s は Q に依存しないが、t^Q は依存する)。このとき、$s_R = t_Q^Q$ に対応する germ から $< V^R, s > = < V^Q, t^Q > \Rightarrow s|_{V'} = t^Q|_{V'},\ V' = V^R \cap V^Q$ となる。従って、$W \cap V'$ において $\overline{t^Q} = \overline{s}$ なので、$\forall Q \in W \cap V'$ に対して $\beta(Q) = \overline{t^Q}(Q) = \overline{s}(Q) = s_Q$ となり、Proposition-definition 1.2 の条件 (2) を満たす。

2.1.14

$s \in \mathscr{F}(U)$ に対し、$W = U - \mathrm{Supp}\ s = \{P \in U | s_P = 0\}$ が開集合であることを示す。

$\forall P \in W$ に対し、$s_P = < V_P, s >$ とかけるので、

$$< V_P, s > = 0 \Rightarrow s|_{V_P} = 0 \Rightarrow (s|_{V_P})_Q = s_Q = 0, \forall Q \in V_P$$

より $V_P \subseteq W$ であり、$P \in V_P \subseteq W$ から W は開集合、従って Supp s は閉集合である。

Supp$\mathscr{F}$ が閉集合にならない例に後述 Exercise 1.19(b) の $j_!\mathscr{F}$ がある。

2.1.15

X 上の sheaf を $\mathscr{F}$、U を X の開集合とするとき

$$\mathscr{F}|_U(V) = (i_U^{-1}\mathscr{F})(V) = \lim_{W \supseteq i_U(V)} \mathscr{F}(W) = \mathscr{F}(V),\ \forall V \subseteq U$$

となる。ここで $i_U : U \hookrightarrow X$ は inclusion である。Restriction map は

$$\rho^U|_{VW} = \rho_{VW} \text{ for } W \subseteq V$$

で与えられるが、このとき $\mathscr{F}|_U$ は U 上の sheaf となる。

$\mathscr{H} : U \mapsto \mathrm{Hom}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$ が sheaf であることを示す。ここで、$\mathrm{Hom}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$ は sheaf $\mathscr{F}|_U$ から sheaf $\mathscr{G}|_U$ への morphism(restriction map と compatible) の集合である。

(a) $\varphi, \psi \in \mathscr{H}(U) = \mathrm{Hom}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$ のとき、$\varphi(V), \psi(V) : \mathscr{F}|_U(V) = \mathscr{F}(V) \to \mathscr{G}|_U(V) = \mathscr{G}(V)$ なので、和を

$$(\varphi(V) + \psi(V))(s) = \varphi(V)(s) + \psi(V)(s) :$$

で定義すれば abelian group となる。従って、$\varphi+\psi$ が定義できる。また、φ, ψ は restriction map と compatible なので、$\varphi+\psi$ も同様であり、$\varphi+\psi \in \mathrm{Hom}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$ となる。

(b) $W \subseteq V$ とする。$\rho^{\mathscr{H}}_{VW}$ を

$$\rho^{\mathscr{H}}_{VW} : \mathscr{H}(V) \to \mathscr{H}(W),\ \varphi^V \mapsto \varphi^V|_W$$

で定義する。ここで、$\varphi^V|_W \in \mathscr{H}(W)$ は $\varphi^V|_W(T) = \varphi^V(T),\ \forall T \subseteq W$ で定義され morphism である (φ^V が morphism なので $\varphi^V|_W$ も morphism となる)。

(b-0) 開集合 $\varnothing$ に対しては

$$\mathscr{H}(\varnothing) = \mathrm{Hom}(\mathscr{F}|_\varnothing, \mathscr{G}|_\varnothing) = \mathrm{Hom}(\mathscr{F}(\varnothing), \mathscr{G}(\varnothing)) = \mathrm{Hom}(0,0) = 0$$

(b-1) $V = W$ の場合

$$\rho^{\mathscr{H}}_{VV}(\varphi^V) = \varphi^V|_V = \varphi^V \text{ より } \rho^{\mathscr{H}}_{VV} = \mathrm{id}_{\mathscr{H}(V)}$$

(b-2) $T \subseteq W \subseteq V$ の場合

$$\rho^{\mathscr{H}}_{WT}\rho^{\mathscr{H}}_{VW}(\varphi^V) = \rho^{\mathscr{H}}_{WT}(\varphi^V|_W) = (\varphi^V|_W)|_T = \varphi^V|_T = \rho^{\mathscr{H}}_{VT}(\varphi^V)$$

$$\Rightarrow \rho^{\mathscr{H}}_{WT}\rho^{\mathscr{H}}_{VW} = \rho^{\mathscr{H}}_{VT}$$

(b-3) $U = \bigcup_i U_i$ とし、$\varphi^U \in \mathscr{H}(U) = \mathrm{Hom}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$ に対して $\varphi^U|_{U_i} = 0,\ \forall i$ と仮定する。

$$\varphi^U = 0 \Leftrightarrow \varphi^U(V) = 0,\ \forall V \subseteq U \Leftrightarrow \varphi^U(V)(s) = 0,\ \forall s \in \mathscr{F}(V),\ \forall V \subseteq U \quad (18)$$

を用いて $\varphi^U = 0$ を示す。

$\forall V \subseteq U$ に対して、$V = \bigcup_i V_i,\ V_i = V \cap U_i,\ s \in \mathscr{F}(V)$ とすると $\varphi^U(V)(s) \in \mathscr{G}(V)$ である。

$$\varphi^U|_{U_i} = 0 \Rightarrow \varphi^U|_{U_i}(V_i) = \varphi^U(V_i) = 0 \Rightarrow \varphi^U(V_i)(s|_{V_i}) = \varphi^U(V)(s)|_{V_i} = 0$$

となるが、$\mathscr{G}|_U$ が sheaf なので、$\varphi^U(V)(s) = 0$ である。よって式 (18) より $\varphi^U = 0$ が得られる。

(b-4) $U = \bigcup_i U_i$ とし、

$$\varphi^{U_i} \in \mathscr{H}(U_i),\ \varphi^{U_i}|_{U_i \cap U_j} = \varphi^{U_j}|_{U_i \cap U_j} \quad (19)$$

と仮定する。

$\forall V \subseteq U,\ V = \bigcup_i V_i,\ V_i = V \cap U_i,\ s^V \in \mathscr{F}(V)$ とおくと、$\varphi^{U_i}(V_i)(s^V|_{V_i}) \in \mathscr{G}(V_i)$ となり、

$$(\varphi^{U_i}(V_i)(s^V|_{V_i}))|_{V_i \cap V_j} = \varphi^{U_i}(V_i \cap V_j)(s^V|_{V_i \cap V_j})$$

$$\overset{(19)}{=} \varphi^{U_j}(V_i \cap V_j)(s^V|_{V_i \cap V_j}) = (\varphi^{U_j}(V_j)(s^V|_{V_j}))|_{V_i \cap V_j}$$

より、$\mathscr{G}|_U$ の sheaf 性から $t^V|_{V_i} = \varphi^{U_i}(V_i)(s^V|_{V_i})$ を満たす $t^V \in \mathscr{G}(V)$ が存在する。そこで、準同型 $\varphi(V)$ を

$$\varphi(V) : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{G}(V),\ s^V \mapsto t^V$$

と定義する。t^V の定義から

$$(\varphi(V)(s^V))|_{V_i} = \varphi^{U_i}(V_i)(s^V|_{V_i}) \tag{20}$$

である。

$\varphi \in \mathscr{H}(U)$ を示すためには restriction map との compatibility:

$$\rho^{\mathscr{G}}_{VW}\varphi(V) = \varphi(W)\rho^{\mathscr{F}}_{VW},\ W \subseteq V\ (\subseteq U)$$

を証明する必要があるが、それには $\mathscr{G}|_U$ の sheaf 性から

$$(\rho^{\mathscr{G}}_{VW}\varphi(V)(s^V))|_{W_i} = (\varphi(W)\rho^{\mathscr{F}}_{VW}(s^V))|_{W_i},\ W = \bigcup_i W_i, W_i = W \cap U_i$$

を示せばよい。$W_i = W \cap U_i \subseteq V \cap U_i = V_i$ より、

$$\begin{aligned}(\rho^{\mathscr{G}}_{VW}\varphi(V)(s^V))|_{W_i} &= (\varphi(V)(s^V))|_{W_i} = ((\varphi(V)(s^V))|_{V_i})|_{W_i} \overset{(20)}{=} (\varphi^{U_i}(V_i)(s^V|_{V_i}))|_{W_i} \\ &= \varphi^{U_i}(W_i)(s^V|_{W_i})\end{aligned}$$

$$(\varphi(W)\rho_{VW}(s^V))|_{W_i} = (\varphi(W)(s^V|_W))|_{W_i} \overset{(20')}{=} \varphi^{U_i}(W_i)((s^V|_W)|_{W_i}) = \varphi^{U_i}(W_i)(s^V|_{W_i})$$

ここで、式 (20') は W に関する式 (20) の意味であり、$s^W := s^V|_W$ である。よって両者は等しい。

式 (20) において、$V \subseteq U_i$ とすると、$V_i = V$ となるので、

$$\varphi(V)(s^V) = \varphi^{U_i}(V)(s^V) \Rightarrow \varphi(V) = \varphi^{U_i}(V) \Rightarrow \varphi|_{U_i} = \varphi^{U_i}$$

である。

2.1.16

(a) 既約空間では開集合は連結なので、Exercise 1.1 に記述されているように constant presheaf は sheaf であり、$\mathscr{A}(U) = A$ となる。Constant presheaf の定義から restriction map は identity、すなわち全射である。

(b) Exercise 1.8 より

$$0 \to \mathscr{F}'(U) \overset{i(U)}{\to} \mathscr{F}(U) \overset{\varphi(U)}{\to} \mathscr{F}"(U),\ \forall U \subseteq X \tag{21}$$

は完全なので、$\varphi(U)$ が全射であることを示せばよい。$\mathscr{F} \overset{\varphi}{\to} \mathscr{F}"$ が全射なので、$\forall s \in \mathscr{F}"(U)$ に対し U の covering $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ が存在し、

$$\varphi(U_i)(t_i) = s|_{U_i},\ \exists t_i \in \mathscr{F}(U_i),\ \forall i \in I$$

を満たす (Exercise 1.3(a))。このとき、Zorn の補題を用いて $\varphi(U)(t) = s$ となる $t \in \mathscr{F}(U)$ が存在することを示す。

$$\Sigma = \{(J, t_J) | J \subseteq I,\ t_J \in \mathscr{F}(U_J),\ \varphi(U_J)(t_J) = s|_{U_J}\},\ U_J := \bigcup_{j \in J} U_j$$

とすると、$(\{i\}, t_i) \in \Sigma$ より $\Sigma \neq \varnothing$ である。

Σ に半順序関係を導入する:

$$(J, t_J) \leq (J', t_{J'}) \overset{def}{\Leftrightarrow} J \subseteq J', t_{J'}|_{U_J} = t_J$$

この関係が半順序をなしていることは明らかである。

$T \subseteq \Sigma$ を全順序部分集合とすると、T には上界が存在する。
$(\because)$ $\overline{J} = \bigcup_{(J,t_J) \in T} J,\ U_{\overline{J}} = \bigcup_{(J,t_J) \in T} U_J$ とおく。$(J, t_J), (J', t_{J'}) \in T$ に対し、T は全順序部分集合なので、$(J, t_J) \leq (J', t_{J'})$ が成立するとしてよい。このとき $J \cap J' = J$ より $U_J \cap U_{J'} = U_J$ であり、かつ $t_{J'}|_{U_J} = t_J$ である。よって、

$$t_{J'}|_{U_J \cap U_{J'}} = t_{J'}|_{U_J} = t_J,\ t_J|_{U_J \cap U_{J'}} = t_J|_{U_J} = t_J$$

が成立し、$\mathscr{F}$ は sheaf なので

$$\exists t_{\overline{J}} \in \mathscr{F}(U_{\overline{J}}),\ t_{\overline{J}}|_{U_J} = t_J \Rightarrow (\overline{J}, t_{\overline{J}}) \geq \forall (J, t_J) \in T$$

となる。

また $U_{\overline{J}} = \bigcup_{(J,t_J) \in T} U_J$ において

$$\varphi(U_{\overline{J}})(t_{\overline{J}})|_{U_J} = \varphi(U_J)(t_J) = s|_{U_J}$$

が成り立つので、$\mathscr{F}$" の sheaf 性を用いると $\varphi(U_{\overline{J}})(t_{\overline{J}}) = s|_{U_{\overline{J}}}$ を得る。従って、$(\overline{J}, t_{\overline{J}})$ は Σ に属し、T の上界をなす。$(\because$ 終$)$

以上から Zorn の補題より極大元 $(J^m, t_{J^m}) \in \Sigma$ が存在し、$\varphi(U_{J^m})(t_{J^m}) = s|_{U_{J^m}}$ を満たす。

ここで $J^m \neq I$ と仮定し、$i \in I - J^m,\ V := U_{J^m} \cap U_i$ とおく[5]。

$$\varphi(V)(t_{J^m}|_V - t_i|_V) = (\varphi(U_{J^m})(t_{J^m}) - \varphi(U_i)(t_i))|_V = (s|_{U_{J^m}} - s|_{U_i})|_V = 0$$

$$\Rightarrow t_{J^m}|_V - t_i|_V \in \ker \varphi(V) = \mathrm{im}\, i(V) \Rightarrow i(V)(v) = t_{J^m}|_V - t_i|_V,\ \exists v \in \mathscr{F}'(V)$$

$\mathscr{F}'$: flasque より $w_i|_V = v,\ \exists w_i \in \mathscr{F}'(U_i)$ である。$t'_i = t_i + i(U_i)(w_i) \in \mathscr{F}(U_i)$ とおくと、

$$t'_i|_V = t_i|_V + i(V)(w_i)|_V = t_i|_V + i(V)(w_i|_V) = t_i|_V + i(V)(v) = t_i|_V + t_{J^m}|_V - t_i|_V$$
$$= t_{J^m}|_V$$

より、貼り合わせにより $\exists t_L \in \mathscr{F}(U_L),\ t_L|_{U_i} = t'_i,\ t_L|_{U_{J^m}} = t_{J^m},\ L = \{i\} \cup J_m$ が得られ、

$$(\varphi(U_L)(t_L))|_{U_{J^m}} = \varphi(U_{J^m})(t_{U_{J^m}}) = s|_{U_{J^m}}$$

$$\varphi(U_L)(t_L)|_{U_i} = \varphi(U_i)(t'_i) = \varphi(U_i)(t_i) + \varphi(U_i)i(U_i)(w_i) \overset{(21)}{=} \varphi(U_i)(t_i) + 0 = s|_{U_i}$$

[5] Sheaf の条件 (b-4) の趣旨から、$V \neq \varnothing$ のみ考慮すれば十分である。

となる。すると

$$\varphi(U_L)(t_L) = s|_{U_L},\ U_{J^m} \subsetneq U_L \Rightarrow (U_{J^m}, t_{J^m}) \lneq (U_L, t_L) \in \Sigma$$

が得られるが、これは (U_{J^m}, t_{J^m}) の極大性に反する。従って $J^m = I$ であり、

$$(I, t_I) \in \Sigma \Rightarrow \varphi(U_I)(t_I) = s|_{U_I} \Rightarrow \varphi(U)(t_I) = s,\ t_I \in \mathscr{F}(U)$$

より、$\varphi(U)$ は全射となる。

(c) $\mathscr{F}'$ が flasque なので $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}"(U),\ \forall U \subseteq X$ は全射である。また ρ_{UV} が全射なので $\varphi(V)\rho_{UV} = \rho"_{UV}\varphi(U)$ も全射であり、従って $\rho"_{UV}$ は全射である。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{F}'(U) \arrow[r] \arrow[d, "\rho'_{UV}"] & \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho_{UV}"] & \mathscr{F}"(U) \arrow[r] \arrow[d, "\rho"_{UV}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F}'(V) \arrow[r] & \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] & \mathscr{F}"(V) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(d) $f_*\mathscr{F}$ の restriction map は

$$\rho'_{UV} = \rho_{f^{-1}(U)f^{-1}(V)} : (f_*\mathscr{F})(U) = \mathscr{F}(f^{-1}(U)) \to (f_*\mathscr{F})(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V))$$

で与えられる。$\mathscr{F}$ は flasque なので $\rho_{f^{-1}(U)f^{-1}(V)}$ は全射であり、よって ρ'_{UV} も全射である。

(e)

$$\mathscr{G} : U \mapsto \mathscr{G}(U) = \{s | s : U \to \bigcup_{P \in U} \mathscr{F}_P,\ s(P) \in \mathscr{F}_P\}$$

の restriction map は

$$\rho^{\mathscr{G}}_{UV} : \mathscr{G}(U) \to \mathscr{G}(U),\ s \mapsto s|_V$$

で与えられる。ここで $s|_V$ は写像 s の定義域 U を V に制限した写像である。
このとき、$\mathscr{G}$ は明らかに sheaf となる。

$s \in \mathscr{G}(V),\ V \subseteq U$ に対し $t \in \mathscr{G}(U)$ を

$$t(P) = \begin{cases} s(P) & ; P \in V \\ 0 & ; P \in U - V \end{cases}$$

で定義する。このとき、

$$\rho^{\mathscr{G}}_{UV}(t) = t|_V = s$$

より全射である。よって $\mathscr{G}$ は flasque sheaf である。

$\mathscr{F}^+(U)$ の定義から $\mathscr{F}^+(U) \overset{\iota}{\subseteq} \mathscr{G}(U)$ であるが、$\mathscr{F}$ がsheaf なので $\varphi : \mathscr{F} \approx \mathscr{F}^+$ であり、よって単射 $\iota\varphi : \mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{G}$ が存在する。

2.1.17

加法群 A に対し、$i_P(A)$ を

$$i_P(A)(U) = \begin{cases} A & ; P \in U \\ 0 & ; P \notin U \end{cases}$$

とし、restriction map を

$$\rho_{UV} : i_P(A)(U) \to i_P(A)(V), s \mapsto \begin{cases} s & ; P \in V \\ 0 & ; P \notin V \end{cases}$$

と定義する。このとき $i_P(A)$ が sheaf となることはほとんど自明であるが、(b-3), (b-4) のみ示す。

(b-3) $U = \bigcup_i V_i$ とし、$i_P(A)(U) \ni s \neq 0$ とする。このとき、$P \in U$ より $P \in \exists V_i \Rightarrow s|_{V_i} = s \neq 0$ である。

(b-4) $U = \bigcup_i V_i$ のとき、$s_i \in i_P(A)(V_i),\ s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ とする。$s_i \neq 0$ となる s_i がなければ $s = 0 \in i_P(A)(U)$ とすればよいので、$\exists s_{i'} \neq 0$ とする。

このとき $J := \{j | P \in V_j\} \ni i' \Rightarrow P \in V_{i'} \cap V_j,\ \forall j \in J$ から

$$0 \neq s_{i'} = s_{i'}|_{V_{i'} \cap V_j} = s_j|_{V_{i'} \cap V_j} = s_j \Rightarrow s_j = s_{i'} = a \neq 0 \in A$$

となり、$s = a \in i_P(A)(U)$ とすれば、$s|_{V_j} = a = s_j,\ j \in J$ を得る。$j \notin J$ の場合は $P \notin V_j$ より $s_j = 0$ であり、同様に $s|_{V_j} = 0$ なので、やはり $s|_{V_j} = s_j$ を得る。以上により $i_P(A)$ は sheaf である。

$\{P\}^- = (\bigcup_{P \notin U} U)^c$ より、V_Q を Q の近傍とすると $Q \in \{P\}^- \Leftrightarrow P \in \forall V_Q$ である。よって

$$(i_P(A))_Q = \lim_{Q \in U} i_P(A)(U) = \begin{cases} A & ; Q \in \{P\}^- \\ 0 & ; Q \notin \{P\}^- \end{cases}$$

となる。

加法群 A に対する constant sheaf を $\mathscr{A}$ とし、$i : \{P\}^- \to X$ を inclusion とする。このとき、$Y := \{P\}^-$ の開集合は必ず P を含むので、全ての非空な開集合 $V \subseteq Y$ は連結であり、$\mathscr{A}(V) = A$ となる。また $P \in U \Rightarrow P \in U \cap Y = i^{-1}(U) \neq \varnothing$ であり、$P \notin U \Rightarrow Y \cap U = i^{-1}(U) = \varnothing$ である。

従って、

$$i_*(\mathscr{A})(U) = \mathscr{A}(i^{-1}(U)) = \begin{cases} A & ; P \in U \\ 0 & ; P \notin U \end{cases}$$

より、$i_*(\mathscr{A}) = i_P(A)$ である。

2.1.18

いくつかに分けて証明する。

(1) morphism $\sigma : f^{-1}f_*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ の存在

連続写像 $f : X \to Y$ に対する順極限 $\varinjlim_{V\supseteq f(U)} f_*\mathscr{F}(V)$ において、$V \supseteq f(U)$ より $f^{-1}(V) \supseteq f^{-1}f(U) \supseteq U$ となるので、$\rho_{f^{-1}(V)U}$ が定義できる。μ_V^U を順極限への準同型 ([1], Exercise 2.14 における μ_i に相当) とする。

$$\begin{tikzcd}
 & f_*\mathscr{F}(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V)) \arrow[dl, "\mu_V^U"'] \arrow[dr, "\rho_{f^{-1}(V)U}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
\varinjlim_{V\supseteq f(U)} f_*\mathscr{F}(V) = (f^{-1}f_*\mathscr{F})^-(U) \arrow[rr, dotted, "\exists!\sigma^-(U)"] \arrow[dr, "\theta(U)"'] & \circlearrowleft & \mathscr{F}(U) \\
 & (f^{-1}f_*\mathscr{F})(U) \arrow[ur, dotted, "\exists!\sigma(U)"'] &
\end{tikzcd} \tag{22}$$

$V \supseteq W$ のとき $f^{-1}(V) \supseteq f^{-1}(W)$ となり、

$$\mu_{VW} = \rho_{f^{-1}(V)f^{-1}(W)} : f_*\mathscr{F}(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V)) \to f_*\mathscr{F}(W) = \mathscr{F}(f^{-1}(W))$$

より、$\rho_{f^{-1}(V)U} = \rho_{f^{-1}(W)U}\mu_{VW}$ が成立する。従って、順極限 $\varinjlim_{V\supseteq f(U)} f_*\mathscr{F}(V)$ の U. P. (Universal Property) から

$$\rho_{f^{-1}(V)U} = \sigma^-(U)\mu_V^U \tag{23}$$

を満たす $\sigma^-(U)$ が一意的に存在する。

$U \supseteq U'$ のとき、$(f^{-1}f_*\mathscr{F})^-$ の restriction map を $\nu_{UU'}$ とすると、下図式 (24) は全て可換になる ($(f^{-1}f_*\mathscr{F})^-$ は presheaf を表す)。よって

$$\sigma^-(U')\nu_{UU'}\mu_V^U = \sigma^-(U')\mu_V^{U'} = \rho_{f^{-1}(V)U'} = \rho_{UU'}\rho_{f^{-1}(V)U} = \rho_{UU'}\sigma^-(U)\mu_V^U$$

となるが、$(f^{-1}f_*\mathscr{F})^-(U)$ の元はある V に対して $s = \mu_V^U(s_V)$ とかけるので、

$$\sigma^-(U')\nu_{UU'}(s) = \sigma^-(U')\nu_{UU'}\mu_V^U(s_V) = \rho_{UU'}\sigma^-(U)\mu_V^U(s_V) = \rho_{UU'}\sigma^-(U)(s)$$

より

$$\sigma^-(U')\nu_{UU'} = \rho_{UU'}\sigma^-(U)$$

なので σ^- は morphism である。

$$
\begin{tikzcd}
\lim\limits_{V \supseteq f(U)} f_*\mathscr{F}(V) = (f^{-1}f_*\mathscr{F})^-(U) \arrow[rr, "\sigma^-(U)"] \arrow[dd, "\nu_{UU'}"'] & & \mathscr{F}(U) \arrow[dd, "\rho_{UU'}"] \\
& f_*\mathscr{F}(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V)) \arrow[ul, "\mu_V^U"'] \arrow[ur, "\rho_{f^{-1}(V)U}"] \arrow[dl, "\mu_V^{U'}"'] \arrow[dr, "\rho_{f^{-1}(V)U'}"] & \\
\lim\limits_{V \supseteq f(U')} f_*\mathscr{F}(V) = (f^{-1}f_*\mathscr{F})^-(U') \arrow[rr, "\sigma^-(U')"] & & \mathscr{F}(U')
\end{tikzcd}
\tag{24}
$$

さらに、$(f^{-1}f_*\mathscr{F})^-$ を sheaf 化すれば、$\sigma^- = \sigma\theta$ を満たす morphism

$$\exists! \sigma : f^{-1}f_*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$$

が一意的に存在する。

(2) morphism $\delta : \mathscr{G} \to f_*f^{-1}\mathscr{G}$ の存在
$f_*f^{-1}\mathscr{G}$ は順極限

$$(f_*(f^{-1}\mathscr{G})^-)(V) = (f^{-1}\mathscr{G})^-(f^{-1}(V)) = \lim_{W \supseteq f(f^{-1}(V))} \mathscr{G}(W)$$

の sheaf 化であるが、$V \supseteq f(f^{-1}(V))$ なので

$$\mu_V : \mathscr{G}(V) \to \lim_{W \supseteq f(f^{-1}(V))} \mathscr{G}(W)$$

が定義できる ([1], Exercise 2.14)。よって順極限 $\lim_{V' \supseteq ff^{-1}(V)} \mathscr{G}(V')$ の U. P. より $\exists! \rho^-_{VW}\mu_V = \mu_W \rho^{\mathscr{G}}_{VW}$、さらには sheaf 化 $f_*f^{-1}\mathscr{G}$ の U.P. より $\exists! \rho_{VW}\theta'(V) = \theta'(W)\rho^-_{VW}$ となり、下図式 (26) は可換となる。

従って

$$\delta(V) := \theta'(V)\mu_V : \mathscr{G}(V) \to f_*f^{-1}\mathscr{G}(V) \tag{25}$$

が得られる。δ が morphism になることは下図式 (26) より明らかである。

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(V) \arrow[r, "\rho^{\mathscr{G}}_{VW}"] \arrow[d, "\mu_V"'] \arrow[dd, bend right=60, "\delta(V)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathscr{G}(W) \arrow[d, "\mu_W"] \arrow[dd, bend left=60, "\delta(W)"] \\
(f_*(f^{-1}\mathscr{G})^-)(V) = \lim\limits_{V' \supseteq ff^{-1}(V)} \mathscr{G}(V') \arrow[r, dotted, "\exists! \rho^-_{VW}"] \arrow[d, "\theta'(V)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (f_*(f^{-1}\mathscr{G})^-)(W) = \lim\limits_{V" \supseteq ff^{-1}(W)} \mathscr{G}(V") \arrow[d, "\theta'(W)"] \\
(f_*f^{-1}\mathscr{G})(V) \arrow[r, dotted, "\exists! \rho_{VW}"] & (f_*f^{-1}\mathscr{G})(W)
\end{tikzcd}
\tag{26}
$$

(3) $\varphi : f^{-1}\mathscr{G} \to \mathscr{F}$ に対する $f_*\varphi : f_*f^{-1}\mathscr{G} \to f_*\mathscr{F}$ の存在
一般に sheaf の morphism $\phi : \mathscr{H} \to \mathscr{F}$ に対して

$$(f^*\phi)(V) = \phi(f^{-1}(V)) : (f_*\mathscr{H})(V) = \mathscr{H}(f^{-1}(V)) \to (f_*\mathscr{F})(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V)) \tag{27}$$

が定義できる。ϕ が morphism なので、$f^*\phi$ も morphism である。
従って $\mathscr{H} = f^{-1}\mathscr{G}$ の場合も

$$f^*\varphi : f_*f^{-1}\mathscr{G} \to f_*\mathscr{F}$$

なる morphism も定義できる。

(4) $\psi : \mathscr{G} \to f_*\mathscr{F}$ に対する $f^{-1}\psi : f^{-1}\mathscr{G} \to f^{-1}f_*\mathscr{F}$ の存在
一般に、sheaf の morphism $\phi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ に対して

$$(f^{-1}\phi)^-(V)\mu_W^V = \mu_W'^V\phi(W)$$

をみたす $(f^{-1}\phi)^-(V)$ が一意的に存在する ([1], Exercise 2.18)。$(f^{-1}\phi)^-$ が morphism であることは図式 (24) と同様にして示すことができる。

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(W) \arrow[rr, "\phi(W)"] \arrow[d, "\mu_W^V"'] & \circlearrowleft & \mathscr{H}(W) \arrow[d, "\mu_W'^V"] \\
(f^{-1}\mathscr{G})^-(V) = \varinjlim_{W \supseteq f(V)} \mathscr{G}(W) \arrow[rr, dotted, "\exists!(f^{-1}\phi)^-(V)"] \arrow[d, "\theta^g"'] & \circlearrowleft & (f^{-1}\mathscr{H})^-(V) = \varinjlim_{W \supseteq f(V)} \mathscr{H}(W) \arrow[d, "\theta^h"] \\
(f^{-1}\mathscr{G})(V) \arrow[rr, dotted, "\exists!(f^{-1}\phi)(V)"] & & (f^{-1}\mathscr{H})(V)
\end{tikzcd} \tag{28}$$

$(f^{-1}\mathscr{G})^-$, $(f^{-1}\mathscr{H})^-$ を sheaf 化すると、

$$(f^{-1}\phi)(V)\theta^g(V)\mu_W^V = \theta^h(V)\mu_W'^V\phi(W)$$

をみたす morphism $f^{-1}\phi : f^{-1}\mathscr{G} \to f^{-1}\mathscr{H}$ が存在する。
よって、$\psi : \mathscr{G} \to f_*\mathscr{F}$ に対する morphism $f^{-1}\psi : f^{-1}\mathscr{G} \to f^{-1}f_*\mathscr{F}$ が存在する。

(5) 以上定義した morphism を組み合わせると

$$\mathscr{G} \xrightarrow{\delta} f_*f^{-1}\mathscr{G} \xrightarrow{f_*\varphi} f_*\mathscr{F},\ f^{-1}\mathscr{G} \xrightarrow{f^{-1}\psi} f^{-1}f_*\mathscr{F} \xrightarrow{\sigma} \mathscr{F}$$

より、

$$\alpha : \mathrm{Hom}_X(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) \to \mathrm{Hom}_Y(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}),\ \varphi \mapsto f^*\varphi\delta$$

$$\beta : \mathrm{Hom}_Y(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}) \to \mathrm{Hom}_X(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}),\ \psi \mapsto \sigma f^{-1}\psi$$

が得られる。

(6) $\alpha\beta(\psi) = \psi$

下図式 (29) において、写像には $\psi(V)$ あるいは $\varphi(U)$ など $(V), (U)$ がついているべきであるが、スペースの都合上、省いてある。

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}(V) \arrow[rrr, "\mu_V^U"] \arrow[dr, "\mu_V^{f^{-1}(V)}"] \arrow[ddr, "\delta"'] \arrow[ddd, "\psi"] & & & (f^{-1}\mathscr{G})^-(U) \arrow[d, "\theta_1"] \arrow[dd, bend right, "\varphi^-"'] \arrow[ddd, bend left=80, "(f^{-1}\psi)^-"] & \\
& (f_*(f^{-1}\mathscr{G})^-)(V) \arrow[urr, "\rho^{f^{-1}\mathscr{G}}_{f^{-1}(V)U}"] \arrow[d, "\theta_3"] \arrow[ddl, "f_*\varphi^-"'] & & (f^{-1}\mathscr{G})(U) \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "f^{-1}\psi"] & \\
& (f_*f^{-1}\mathscr{G})(V) \arrow[dl, "f_*\varphi"'] & & \mathscr{F}(U) & (f^{-1}f_*\mathscr{F})(U) \arrow[l, "\sigma"'] \\
(f_*\mathscr{F})(V) \arrow[urrr, "\rho^{\mathscr{F}}_{f^{-1}(V)U}"'] \arrow[rrr, "\nu_V^U"'] & & & (f^{-1}f_*\mathscr{F})^-(U) \arrow[u, "\sigma^-"] \arrow[ur, "\theta_2"] &
\end{tikzcd} \tag{29}$$

$(f^{-1}\mathscr{G})^-(U) = \varinjlim_{V \supseteq f(U)} \mathscr{G}(V)$ より、$V \supseteq f(U),\ f^{-1}(V) \supseteq f^{-1}(f(U)) \supseteq U$ なので

$$(f^{-1}\mathscr{G})^-(U) = \varinjlim_{W \supseteq f(U)} \mathscr{G}(W)$$

$$(f_*(f^{-1}\mathscr{G})^-)(V) = (f^{-1}\mathscr{G})^-(f^{-1}(V)) = \varinjlim_{W \supseteq f(f^{-1}(V))} \mathscr{G}(W)$$

を用いると順極限の U. P. より

$$\rho^{f^{-1}\mathscr{G}}_{f^{-1}(V)U} : (f_*(f^{-1}\mathscr{G})^-)(V) \to (f^{-1}\mathscr{G})^-(U),\ \mu_W^U = \rho^{f^{-1}\mathscr{G}}_{f^{-1}U}\mu_W^{f^{-1}(V)} \tag{30}$$

となる。

$$\begin{tikzcd}
& \mathscr{G}(W) \arrow[dl, "\mu_W^{f^{-1}(V)}"] \arrow[dr, "\mu_W^U"] & \\
\varinjlim_{W \supseteq f(f^{-1}(V))} \mathscr{G}(W) \arrow[rr, dotted, "\exists! \rho^{f^{-1}\mathscr{G}}_{f^{-1}(V)U}"'] & & \varinjlim_{W \supseteq f(U)} \mathscr{G}(W)
\end{tikzcd}$$

同様に、

$$\rho^{\mathscr{F}}_{f^{-1}(V)U} : (f_*\mathscr{F})(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V)) \to \mathscr{F}(U)$$

となる。

ψ から順極限により $f^{-1}\psi$ を作成する過程から (図式 (28))

(a) $\nu_V^U\psi = (f^{-1}\psi)^-\mu_V^U$

(b) $\theta_2(f^{-1}\psi)^- = f^{-1}\psi\cdot\theta_1$

が得られる。

δ の定義から

(c) $\delta \overset{(25)}{=} \theta_3\mu_V^{f^{-1}(V)}$

が成り立つ。

さらに、σ の作り方と $(f^{-1}f_*\mathscr{F})^-(U)$ の順極限の U.P. から

(d) $\rho^{\mathscr{F}}_{f^{-1}(V)U} \overset{(23)}{=} \sigma^-\nu_V^U$

(d') $\sigma^- = \sigma\theta_2$

を得る。

$\varphi := \sigma f^{-1}\psi,\ \varphi^- := \varphi\theta_1$ と定義する。このとき、

$$\varphi^- = \varphi\theta_1 = \sigma f^{-1}\psi\theta_1 \overset{(b)}{=} \sigma\theta_2(f^{-1}\psi)^- \overset{(d')}{=} \sigma^-(f^{-1}\psi)^- \tag{31}$$

となる。これを用いると、

$$\varphi^-\mu_V^U \overset{(31)}{=} \sigma^-(f^{-1}\psi)\mu_V^U \overset{(a)}{=} \sigma^-\nu_V^U\psi \overset{(d)}{=} \rho^{\mathscr{F}}_{f^{-1}(V)U}\psi$$

が得られるが、特に $U = f^{-1}(V)$ とおくと、

$$\psi(V) = \varphi^-(f^{-1}(V))\mu_V^{f^{-1}(V)} = (f_*\varphi^-)(V)\mu_V^{f^{-1}(V)} = f_*\varphi(V)\theta_3(V)\cdot\mu_V^{f^{-1}(V)} \overset{(c)}{=} f_*\varphi(V)\delta(V)$$

となり、

$$\alpha\beta(\psi) = f_*(\sigma f^{-1}\psi)\delta = f_*\varphi\delta = \psi$$

が成立する。

(7) $\beta\alpha(\varphi) = \varphi$

今度は φ が出発点となり、$f_*\varphi$、さらには $\varphi^- = \varphi\theta_1,\ f_*\varphi^- = f_*\varphi\theta_3$ が作られる。ψ は

(e) $\psi := f_*\varphi\cdot\delta$

によって定まり、さらに $f^{-1}\psi$ が定義される。また、$\varphi^- = \varphi\theta_1$ は morphism なので

(f) $\varphi^-(U)\rho^{f^{-1}\mathscr{G}}_{f^{-1}(V)U} = \rho^{\mathscr{F}}_{f^{-1}(V)U}\varphi^-(f^{-1}(V))$

が成り立つ。

$\beta\alpha(\varphi) = \sigma f^{-1}(f_*\varphi \cdot \delta) = \sigma f^{-1}\psi$ なので、$\sigma f^{-1}\psi = \varphi$ を示せばよいが、そのためには

$$\sigma f^{-1}\psi\theta_1\mu_V^U = \varphi\theta_1\mu_V^U \tag{32}$$

を言えばよい。なぜなら、これが成り立てば $\varphi\theta_1 = \sigma f^{-1}\psi\theta_1$ が得られ、θ_1 関連の sheaf 化の U.P. から $\sigma f^{-1}\psi = \varphi$ となるからである。

$$\sigma f^{-1}\psi\theta_1\mu_V^U \overset{(b)}{=} \sigma\theta_2(f^{-1}\psi)^-\mu_V^U \overset{(d')}{=} \sigma^-(f^{-1}\psi)^-\mu_V^U \overset{(a)}{=} \sigma^-\nu_V^U\psi \overset{(d)}{=} \rho^{\mathscr{F}}_{f^{-1}(V)U}\psi \tag{33}$$

において、(a) は ψ から $(f^{-1}\psi)^-$ を定義した際の、(b) はさらにそれから $f^{-1}\psi$ を定義した際の可換式なので、今回でも成立する。その他の可換式は φ, ψ に無関係なので成立している。

ここで (c) から

$$(g)\ f_*\varphi^- \cdot \mu_V^{f^{-1}(V)} = f_*\varphi \cdot \delta \overset{(e)}{=} \psi$$

が成り立つので、上式 (33) はさらに

$$\rho^{\mathscr{F}}_{f^{-1}(V)U}\psi(V) \overset{(g)}{=} \rho^{\mathscr{F}}_{f^{-1}(V)U}f_*\varphi^-(V)\mu_V^{f^{-1}(V)}$$

$$= \rho^{\mathscr{F}}_{f^{-1}(V)U}\varphi^-(f^{-1}(V))\mu_V^{f^{-1}(V)} \overset{(f)}{=} \varphi^-(U)\rho^{f^{-1}\mathscr{G}}_{f^{-1}(V)U}\mu_V^{f^{-1}(V)} \overset{(30)}{=} \varphi^-(U)\mu_V^U = \varphi(U)\theta_1\mu_V^U$$

となる。

以上により式 (32) が示せたので、

$$\beta\alpha(\varphi) = \varphi$$

が成立する。

2.1.19

(a) $\mathscr{F}$ を Z 上の sheaf とする。このとき、$i_*\mathscr{F}$ は X 上の sheaf となる。

$P \in Z$ のとき

$$Z \supseteq U_Z : \mathrm{open},\ P \in U_Z \Leftrightarrow U_Z = i^{-1}(U),\ P \in U(\subseteq X) : \mathrm{open}$$

より

$$(i_*\mathscr{F})_P = \lim_{P \in U} \mathscr{F}(i^{-1}(U)) = \lim_{P \in U_Z} \mathscr{F}(U_Z) = \mathscr{F}_P$$

である。

$P \notin Z$ のときは

$$P \in Z^c : \mathrm{open} \Rightarrow P \in \exists V_P \subseteq Z^c \Rightarrow i^{-1}(V) = \varnothing,\ P \in \forall V \subseteq V_P$$

$$\Rightarrow (i_*\mathscr{F})(V) = \mathscr{F}(i^{-1}(V)) = \mathscr{F}(\varnothing) = 0 \Rightarrow (i_*\mathscr{F})_P = \lim_{P \in V}(i_*\mathscr{F})(V) = 0$$

となる。

(b) $\mathscr{F}$ を U 上の sheaf とする。Restriction map を

$$\rho^j_{VW} = \begin{cases} \rho_{VW} & ; V \subseteq U \\ 0 & ; V \not\subseteq U \end{cases}$$

とすると

$$(j_!\mathscr{F})^- : V \to \begin{cases} \mathscr{F}(V) & ; V \subseteq U \\ 0 & ; V \not\subseteq U \end{cases}$$

は X 上の presheaf となる。

$P \in U$ のとき

$s_P \in (j_!\mathscr{F})_P = (j_!\mathscr{F})^-_P \Rightarrow s \in (j_!\mathscr{F})^-(V),\ \exists V \subseteq U$ となるが、U では $(j_!\mathscr{F})^-(V) = \mathscr{F}(V),\ \rho^j = \rho$ なので、$s_P \in (j_!\mathscr{F})_P \Leftrightarrow s_P \in \mathscr{F}_P$ である。よって、

$$(j_!\mathscr{F})_P = \mathscr{F}_P$$

である。

$P \notin U$ のときは

$$P \in \forall V \Rightarrow V \not\subseteq U \Rightarrow (j_!\mathscr{F})^-(V) = 0 \Rightarrow \lim_{P \in V}(j_!\mathscr{F})^-(V) = 0$$

よって、

$$(j_!\mathscr{F})_P = 0$$

である。

X 上の sheaf $\mathscr{G}$ が

$$\mathscr{G}|_U = \mathscr{F},\ \mathscr{G}_P = \begin{cases} \mathscr{F}_P & ; P \in U \\ 0 & ; P \notin U \end{cases}$$

を満たしているとする。このとき、$\varphi^-(V) : (j_!\mathscr{F})^-(V) \to \mathscr{G}(V)$ を

$$\varphi^-(V) = \begin{cases} id & ; V \subseteq U \\ 0 & ; V \not\subseteq U \end{cases}$$

とすると、$\varphi^-(V)$ は restriction map と compatible である。よって、sheaf 化の U.P. より

$$\varphi : j_!\mathscr{F} \to \mathscr{G}$$

となる morphism が存在する。$\mathscr{G}_P = (j_!\mathscr{F})_P$ なので、Proposition 1.1 から $\mathscr{G} \approx j_!\mathscr{F}$ を得る。

(c) $\mathscr{F}$ を X 上の sheaf とする。Inclusion

$$\iota : j_!(\mathscr{F}|_U) \to \mathscr{F}$$

は明らかに morphism である。また、

$$\varphi(V) := \rho_{VV_Z} : \mathscr{F}(V) \to i_*(\mathscr{F}|_Z)(V) = (\mathscr{F}|_Z)(i^{-1}(V)) = \mathscr{F}(V_Z),\ s \mapsto s|_{V_Z},\ V_Z = V \cap Z$$

も morphism である。

このとき、系列

$$0 \to (j_!\mathscr{F}|_U)_P \to \mathscr{F}_P \to (i_*\mathscr{F}|_Z)_P \to 0 \tag{34}$$

が完全であることを示す。

$P \in U$ のとき、$(j_!\mathscr{F}|_U)_P = \mathscr{F}_P,\ (i_*\mathscr{F}|_Z)_P = 0$ より系列 (37) は完全である。

$P \notin U$ のとき、$(j_!\mathscr{F}|_U)_P = 0,\ (i_*\mathscr{F}|_Z)_P = \mathscr{F}_P$ よりやはり系列 (37) は完全である。

従って、いずれの場合も系列 (37) は完全となり、Exercise 1.2(c) から

$$0 \to j_!(\mathscr{F}|_U) \to \mathscr{F} \to i_*(\mathscr{F}|_Z) \to 0$$

は完全となる。

2.1.20

(a) $\mathscr{F}$ を X 上の sheaf とするとき

$$\mathscr{H}^0_Z(\mathscr{F}) : V \mapsto \Gamma_{Z\cap V}(V, \mathscr{F}|_V) = \{s \in \mathscr{F}(V) | \text{Supp } s \subseteq Z\}$$

が sheaf となることを示す。

$W \subseteq V,\ s \in \Gamma_{Z\cap V}(V, \mathscr{F}|_V)$ とする。

$$\forall P \in \text{Supp } s|_W \Rightarrow (s|_W)_P = s_P \neq 0 \Rightarrow P \in \text{Supp } s \subseteq Z \Rightarrow \text{Supp } s|_W \subseteq Z \Rightarrow s|_W \in \Gamma_{Z\cap W}(W, \mathscr{F}|_W)$$

より restriction map は $\mathscr{F}$ の restriction map ρ_{VW} を制限したものにできる。

Sheaf の条件 (a), (b-0)〜(b-3) は明らかなので (b-4) のみ示す。

(b-4) $V = \bigcup_i V_i$ に対し、

$$s_i \in \mathscr{H}^0_Z(\mathscr{F})(V_i) = \Gamma_{Z\cap V_i}(V_i, \mathscr{F}|_{V_i}) \Leftrightarrow \text{Supp } s_i \subseteq Z,\ s_i|_{V_i\cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$$

とすると、$\mathscr{F}$ の sheaf 性より $s|_{V_i} = s_i$ となる $s \in \mathscr{F}(V)$ が存在する。

このとき

$$\forall P \in \text{Supp } s \Rightarrow s_P \neq 0,\ P \in V = \bigcup_i V_i \Rightarrow P \in \exists V_i,\ (s_i)_P = (s|_{V_i})_P = s_P \neq 0$$

$$\Rightarrow P \in \mathrm{Supp}\ s_i \subseteq Z \Rightarrow \mathrm{Supp}\ s \subseteq Z$$

より

$$s \in \mathscr{H}^0_Z(\mathscr{F})(V)\ (\Leftrightarrow \mathrm{Supp}\ s \subseteq Z)$$

となり、(b-4) が示された。

(b) $U = X - Z$、inclusion $j : U \to X$ に対する系列

$$0 \to \mathscr{H}^0_Z(\mathscr{F}) \xrightarrow{\iota} \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} j_*(\mathscr{F}|_U) \tag{35}$$

の完全性を示すために、

$$0 \to \mathscr{H}^0_Z(\mathscr{F})_P \xrightarrow{\iota_P} \mathscr{F}_P \xrightarrow{\varphi_P} j_*(\mathscr{F}|_U)_P \tag{36}$$

が完全であることを示す。$\mathscr{H}^0_Z(\mathscr{F})$ は $\mathscr{F}$ の subsheaf なので、$\varphi : \mathscr{F} \to j_*(\mathscr{F}|_U)$ が存在して $\mathrm{im}\iota_P = \ker\varphi_P$ が成り立つことを言えばよい。

$$j_*(\mathscr{F}|_U)(V) = \mathscr{F}|_U(j^{-1}(V)) = \mathscr{F}|_U(V \cap U) = \mathscr{F}(V \cap U)$$

より

$$\varphi(V) := \rho_{VV_U},\ V_U = V \cap U \tag{37}$$

とおける。$j_*(\mathscr{F}|_U)$ の restriction map は

$$\rho'_{VW} = \rho_{V_U W_U}$$

なので $\rho'_{VW}\varphi(V) = \varphi(W)\rho_{VW}$ が成立し、$\varphi(V)$ は morphism となる。

($\ker\varphi_P \supseteq \mathrm{im}\ i_P\ (= \mathscr{H}^0_Z(\mathscr{F})_P)$ の証明)

$$\forall s_P \in \mathscr{H}^0_Z(\mathscr{F})_P \Rightarrow s_P =< \exists V, s >,\ P \in V,\ s \in \mathscr{H}^0_Z(\mathscr{F})(V) = \Gamma_{Z\cap V}(V, \mathscr{F}|_V)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Supp}\ s \subseteq Z \tag{38}$$

$s_p = 0$ なら当然 $\varphi_P(s_P) = 0$ である。
$s_p \neq 0$ とすると式 (38) より $P \in Z$ となる。このとき

$$\varphi_P(s_P) = (\varphi(\exists W)(s|_W))_P = (\rho_{WW_U}(s|_W))_P = (s|_{W_U})_P$$

となるが、ここで $W \subseteq V$ としてよい。

$$\forall Q \in W_U \Rightarrow Q \notin Z \overset{(38)}{\Rightarrow} s_Q = 0 \Rightarrow s|_{V^Q} = 0, \exists V^Q$$

ここで $W_U = \bigcup_{Q\in W_U} V^Q,\ s|_{V^Q} = 0$ より $\mathscr{F}$ の sheaf 性から $s|_{W_U} = 0$ よって

$$\varphi_P(s_P) = (s|_{W_U})_P = 0$$

が得られる。

(ker $\varphi_P \subseteq$ im i_P の証明)

$$\varphi_P(s_P)=0 \Rightarrow \varphi(\exists V)(s)|_P=0,\ s\in\mathscr{F}(V),\ P\in V$$

$$\Rightarrow \varphi(V)(s|_V)|_{\exists W}=0,\ P\in W\subseteq V \Rightarrow \varphi(W)(s|_W)=0 \overset{(37)}{\Rightarrow} s|_{W_U}=0$$

ここで $\forall Q\in W-Z=W_U$ とすると $s_Q=(s|_{W_U})_Q=0$ となる。従って

$$\forall Q'\in \mathrm{Supp}\ s|_W \Rightarrow 0\neq (s|_W)_{Q'}=s_{Q'} \Rightarrow Q'\in Z$$

よって

$$\mathrm{Supp}\ s|_W\subseteq Z \Rightarrow s|_W\in\mathscr{H}^0_Z(\mathscr{F})(W) \Rightarrow s_P=(s|_W)|_P\in\mathscr{H}^0_Z(\mathscr{F})_P$$

が得られる。

$\mathscr{F}$: flasque sheaf とする。

$$s_P\in(j_*\mathscr{F}|_U)_P \Rightarrow P\in\exists V,\ s\in(j_*\mathscr{F}|_U)(V)=\mathscr{F}(V_U)$$

において $\mathscr{F}$: flasque より $\exists t\in\mathscr{F}(V),\ \rho_{VV_U}(t)=s$ となる。従って

$$\varphi(V)(t)=s \Rightarrow (\varphi(V)(t))_P=\varphi_P(t_P)=s_P$$

が得られ、φ_P は全射となる。

2.1.21

(a) Inclusion $i:Y\hookrightarrow X$ に対して $U_Y=U\cap Y$ とすると、

$$\varphi(U)=\rho_{UU_Y}:\mathcal{O}_X(U)\to i_*\mathcal{O}_Y(U)=\mathcal{O}_Y(U_Y),\ f\mapsto f|_{U_Y}$$

とすると、φ は morphism であり、

$$\ker\varphi(U)=\mathscr{I}_Y(U) \tag{39}$$

となる。よって、$\mathscr{I}_Y$ は $\mathcal{O}_X$ の subsheaf である。

(b) 系列 Y は閉集合とみなす ($\mathscr{I}_Y$ の前提)。

$$0\to(\mathscr{I}_Y)_P\overset{\iota_P}{\to}(\mathcal{O}_X)_P\overset{\varphi_P}{\to}(i_*\mathcal{O}_Y)_P\to 0$$

が完全であることを示す。(a) より ι_P は単射で、

$$(\mathscr{I}_Y)_P=(\ker\varphi)_P=\ker\varphi_P$$

が成立する。

一方、Exercise 1.19(a) から

$$(i_*\mathcal{O}_Y)_P = \begin{cases} (\mathcal{O}_Y)_P = \mathcal{O}_{Y,P} & ; P \in Y \\ 0 & ; P \notin Y \end{cases}$$

である。

$P \in Y$ のとき、$\mathcal{O}_{Y,P} \approx \mathcal{O}_{X,P}$ である。なぜなら、$f \in \mathcal{O}_{Y,P}$ は Y における P 近傍で有理式 $f = g/h$ とかけ、$h(P) \neq 0$ である。このとき、X においても $h(P) \neq 0$ なので、P の近傍で 0 にならず、そこでも $f = g/h$ とかける。よって germ として $f \in \mathcal{O}_{X,P}$ である。逆に、$f \in \mathcal{O}_{X,P}$ とすると P 近傍で有理式 $f = g/h$ とかけ、$h(P) \neq 0$ である。その時の P 近傍は Y における P 近傍を与えるので、$f \in \mathcal{O}_{Y,P}$ となる。

以上により制限写像 φ_P は全射となる。$P \notin Y$ の場合は $(i_*\mathcal{O}_Y)_P = 0$ なので、当然全射である。

従って、

$$0 \to \mathscr{I}_Y \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\varphi} i_*\mathcal{O}_Y \to 0$$

は完全であり、Exercise 1.6(b) から

$$i_*\mathcal{O}_Y \approx \mathcal{O}_X/\mathscr{I}_Y$$

となる。

(c) $X = \mathbf{P}^1,\ Y = \{P, Q\}$ とする。

$$i_*\mathcal{O}_Y(U) = \begin{cases} \mathcal{O}_Y(P,Q) & ; P, Q \in U \\ \mathcal{O}_Y(P) & ; P \in U, Q \notin U \\ \mathcal{O}_Y(Q) & ; P \notin U, Q \in U \\ 0 & ; P \notin U, Q \notin U \end{cases}$$

$$\mathscr{F}(U) = i_*\mathcal{O}_{\{P\}}(U) \oplus i_*\mathcal{O}_{\{Q\}}(U) = \begin{cases} \mathcal{O}_{\{P\}}(P) \oplus \mathcal{O}_{\{Q\}}(Q) & ; P, Q \in U \\ \mathcal{O}_{\{P\}}(P) & ; P \in U, Q \notin U \\ \mathcal{O}_{\{Q\}}(Q) & ; P \notin U, Q \in U \\ 0 & ; P \notin U, Q \notin U \end{cases}$$

なので、$i_*\mathcal{O}_Y \to i_*\mathcal{O}_P \oplus i_*\mathcal{O}_Q$ は morphism である。

さらに、$R \in X$ に対し、$(i_*\mathcal{O}_Y)_R,\ \mathscr{F}_R$ は共に

$$\begin{cases} \mathcal{O}_{\{P\},P} = k & ; R = P \\ \mathcal{O}_{\{Q\},Q} = k & ; R = Q \\ 0 & ; R \neq P, R \neq Q \end{cases}$$

に等しいので、$(i_*\mathcal{O}_Y)_R \approx \mathscr{F}_R$ である。よって (b) より

$$0 \to \mathscr{I}_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathscr{F} \to 0$$

は完全である。

Theorem 3.4(a) より

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}(X) \approx k \Rightarrow \dim \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = 1$$

一方、

$$\dim \Gamma(X, \mathscr{F}) = \dim(i_*\mathcal{O}_{\{P\}}(U) \oplus i_*\mathcal{O}_{\{Q\}}(U)) = \dim \mathcal{O}_{\{P\}}(P) + \dim \mathcal{O}_{\{Q\}}(Q) = \dim k + \dim k = 2$$

となるが、すると $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X, \mathscr{F})$ は全射ではありえない。

(d) $X = \mathbf{P}^1$ は既約なので $\mathscr{K}(U) = K,\ U \subseteq X$ である。

$f \in \mathcal{O}(U)$ とすると $\forall P \in U$ に対し、$P \in \exists V$ において $f = g/h, h(V) \not\ni 0$ であるが、すると $g/h \in K(U)$ となる。このとき、もし $g/h = 0$ とすると $\mathcal{O}(U)$ で $f|_V = 0$ ゆえ U においても $f = 0$ となる (Remark 3.1.1)。従って、$\mathcal{O}(U) \hookrightarrow K(U)$ から $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathscr{K}$ である (Exercise 1.4(a))。

$X = \mathbf{P}^1$ はネーター空間である (Exercise 1.2.5(a))。一般に、ネーター空間上の sheaf の (infinite) direct sum $\mathscr{F} = \oplus_i \mathscr{F}_i$ は sheaf となることを示す。

$(\because)$ $\mathscr{F}$ は sheaf 条件 (a), (b-0)〜(b-3) を満たしているのは明らかなので、(b-4) を示す。$U = \bigcup_\lambda U_\lambda$ に対し、

$$s_\lambda = \sum_i s^i_\lambda \in \mathscr{F}(U_\lambda) = \oplus_i \mathscr{F}_i(U_\lambda)$$

$$s_\lambda|_{U_\lambda \cap U_{\lambda'}} = s_{\lambda'}|_{U_\lambda \cap U_{\lambda'}} \Leftrightarrow s^i_\lambda|_{U_\lambda \cap U_{\lambda'}} = s^i_{\lambda'}|_{U_\lambda \cap U_{\lambda'}}, \forall i \tag{40}$$

とする。$s^i_\lambda \neq 0$ となる i は有限個である。

ネーター空間は擬コンパクトゆえ ([1], Exercise 6.6)、$U = \bigcup_\lambda U_\lambda$ に対し有限被覆 $U = \bigcup_{j=1}^n U_{\lambda_j}$ が存在する。ここで $\mathscr{F}_i$ が sheaf なので $\exists s^i \in \mathscr{F}_i(U),\ s^i|_{U_{\lambda_j}} = s^i_{\lambda_j}$ である。そこで、$s = \sum_i s^i$ とすると、$s^i \neq 0 \Leftrightarrow s^i_{\exists\lambda_j} \neq 0$ となる i は有限個なので ($s^i_{\lambda_j} \neq 0$ となるケースは有限個)、

$$s \in \oplus_i \mathscr{F}_i(U) = \mathscr{F}(U)$$

であり、

$$s|_{U_{\lambda_j}} = \sum_i s^i|_{U_{\lambda_j}} = \sum_i s^i_{\lambda_j} = s_{\lambda_j}$$

となる。

λ_j 以外の λ に対しても、$s|_{U_\lambda} = s_\lambda$ となることを U_λ の開被覆 $U_\lambda = \bigcup_j U^j_\lambda,\ U^j_\lambda = U_\lambda \cap U_{\lambda_j}$ を用いて示す。

$$(s|_{U_\lambda})|_{U^j_\lambda} = \sum_i (s^i|_{U_\lambda})|_{U^j_\lambda} = \sum_i (s^i|_{U^j_\lambda}) = \sum_i (s^i|_{U_{\lambda_j}})|_{U^j_\lambda} = \sum_i s^i_{\lambda_j}|_{U^j_\lambda} \overset{(40)}{=} \sum_i s^i_\lambda|_{U^j_\lambda} = s_\lambda|_{U^j_\lambda}$$

よって、(b-3) より $s|_{U_\lambda} = s_\lambda$ である。($\because$ 終)

Sheaf $\mathscr{B} := \sum_{P\in X} i_P(I_P)$ に対する

$$\varphi(U) : \mathscr{K}(U) = K \to \mathscr{B}(U) = \sum_{P\in U} I_P,\ f \mapsto \sum_{P\in U} \widetilde{f_P} = \sum_{P\in\{P_1,\cdots,P_n\}} \widetilde{f_P}$$

において、$\widetilde{f_P}$ は f の $K/\mathcal{O}_P$ への標準的全射の像であり、$\{P_1,\cdots,P_n\}$ は f の極 in U である。極の個数は有限個なので、$\sum_{P\in\{P_1,\cdots,P_n\}} \widetilde{f_P} \in \sum_{P\in U} i_P(I_P)$ である。このとき、φ は $\rho^{\mathscr{B}}_{UV} : \sum_{P\in U} \widetilde{f_P} \mapsto \sum_{P\in V} \widetilde{f_P}$ と compatible なので morphism である。

以上により次の系列ができる。

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathscr{K} \to \sum_{P\in X} i_P(I_P) \to 0$$

これが完全であることは、stalk 化した次の系列が完全であることから得られる:

$$0 \to \mathcal{O}_P \to \mathscr{K}_P = K \to (\sum_{Q\in X} i_Q(I_Q))_P \overset{*}{=} I_P = K/\mathcal{O}_P \to 0$$

ここで最後の等号 (*) は X が T_0 空間であることを利用している。

(e) Exercise 1.6, 1.8 と (d) から

$$\Gamma(X,\mathscr{K}) = \mathscr{K}(X) \to \Gamma(X,\mathscr{K}/\mathcal{O}) = \mathscr{K}/\mathcal{O}(X)$$

が全射であることを示せばよい。

$f = \sum_{P\in X} \widetilde{f_P} \in \sum_{P\in X} i_P(I_P)(X)$ とすると $\widetilde{f_P} \neq 0$ となる P は有限個である。

標準的全射を $\varphi_P : K \to K/\mathcal{O}_P$ とおくと、$\widetilde{f_P} = \varphi_P(f_P) \in K/\mathcal{O}_P,\ \exists f_P \in K$ であるが、f_P には P 以外にも極があるので、$f' := \sum_{P\in X} f_P$ としても $\sum_{Q\in X} \varphi_Q(f') = \sum_{P\in X} \widetilde{f_P}$ とは限らない。

そこで $\widetilde{f_P} \neq 0$ となる P に対し、

$$g_P \in \mathcal{O}_Q,\ f_P - g_P \in \mathcal{O}_P,\ \forall Q \neq P \tag{41}$$

を満たす $g_P \in K$ を求める。すると、

$$g = \sum_P g_P \mapsto \sum_Q \varphi_Q(\sum_P g_P) = \sum_P \varphi_P(g_P) = \sum_P \varphi_P(f_P) = \sum_P \widetilde{f_P} = f$$

より、全射性が証明できる。

局所的な議論なので、affine $\mathbf{A}^1$ 上で考えてよく、$P = 0$ としてよい。f_P の部分分数分解形を

$$f_P = \sum_i \frac{a_i}{x^i} + \alpha(x),\ \alpha(x) \in \mathcal{O}_P,\ a_i \in k$$

とする。ここで、

$$g_P = \sum_i \frac{a_i}{x^i} \in K$$

とすれば、これは式 (41) を満たす。

2.1.22

$\forall U \subseteq X$ に対して

$$\mathscr{F}(U) := \{(s_i)_{i\in I}, s_i \in \mathscr{F}_i(U\cap U_i) \mid \varphi_{ij}(s_i|_{U\cap U_i\cap U_j}) = s_j|_{U\cap U_i\cap U_j}\}$$

$$\rho_{UV} := (\rho^i_{U\cap U_i, V\cap U_i})_{i\in I}$$

とする。

$s = (s_i) \in \mathscr{F}(U)$ に対して、

$$s|_V = \rho_{UV}(s) = (\rho^i_{U\cap U_i, V\cap U_i}(s_i))_{i\in I} = (s_i|_{V\cap U_i})_{i\in I}$$

$\Rightarrow \varphi_{ij}((s_i|_{V\cap U_i})|_{V\cap U_i\cap U_j}) = \varphi_{ij}(s_i|_{V\cap U_i\cap U_j}) = (s_j|_{V\cap U_i\cap U_j}) = ((s_j|_{V\cap U_j})|_{V\cap U_i\cap U_j})$

より $s|_V \in \mathscr{F}(V)$ である。

このとき、$\mathscr{F}$ は ρ_{UV} を restriction map として sheaf 条件 (a), (b-0)〜(b-3) を満たしているのは明らかである。

(b-4) $V = \bigcup_\lambda V_\lambda$ に対し、

$$s^\lambda \in \mathscr{F}(V_\lambda),\ s^\lambda|_{V_\lambda\cap V_{\lambda'}} = s^{\lambda'}|_{V_\lambda\cap V_{\lambda'}}$$

とする。この式は

$$(s_i^\lambda)_{i\in I} \in \mathscr{F}(V_\lambda),\ s_i^\lambda|_{V_\lambda\cap V_{\lambda'}\cap U_i} = s_i^{\lambda'}|_{V_\lambda\cap V_{\lambda'}\cap U_i},\ \forall i \in I$$

と等価である。$V\cap U_i = \bigcup_\lambda (V_\lambda \cap U_i)$ より $\mathscr{F}_i$ の sheaf 性から

$$\exists s_i \in \mathscr{F}_i(V\cap U_i),\ s_i|_{V_\lambda\cap U_i} = s_i^\lambda \tag{42}$$

が得られるが、

$$s := (s_i)_{i\in I} \in \mathscr{F}(V)\ (\Leftrightarrow \varphi_{ij}(s_i|_{V\cap U_i\cap U_j}) = s_j|_{V\cap U_i\cap U_j})$$

を示す必要がある。

$V\cap U_i\cap U_j = \bigcup_\lambda V_\lambda \cap U_i\cap U_j$ から

$$\varphi_{ij}(s_i|_{V\cap U_i\cap U_j})|_{V_\lambda\cap U_i\cap U_j} = \varphi_{ij}(s_i|_{V_\lambda\cap U_i\cap U_j}) \overset{(42)}{=} \varphi_{ij}(s_i^\lambda|_{V_\lambda\cap U_i\cap U_j})$$

$$\overset{(***)}{=} s_j^\lambda|_{V_\lambda\cap U_i\cap U_j} = s_j|_{V_\lambda\cap U_i\cap U_j} = (s_j|_{V\cap U_i\cap U_j})|_{V_\lambda\cap U_i\cap U_j}$$

を得るが、$\mathscr{F}_j$ の sheaf 性から $\varphi_{ij}(s_i|_{V\cap U_i\cap U_j}) = s_j|_{V\cap U_i\cap U_j}$ が成り立つ。ここで、等号 (***) は $(s_i^\lambda)_{i\in I} \in \mathscr{F}(V_\lambda)$ による。

以上により $\mathscr{F}$ は sheaf である。

次に $\exists\psi_k : \mathscr{F}|_{U_k} \to \mathscr{F}_k$ を示す。$V \subseteq U_k$ とする。

$\mathscr{F}|_{U_k}(V) = \mathscr{F}(V)$ は direct product $\prod_i \mathscr{F}_i(V\cap U_i)$ の部分集合なので、射影 morphism ψ_k を $\mathscr{F}(V)$ に制限したものを

$$\psi_k(V) : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}_k(V\cap U_k) = \mathscr{F}_k(V)$$

とする。
　一方、

$$\delta_k(V) : \mathscr{F}_k(V) \to \mathscr{F}|_{U_k}(V) = \mathscr{F}(V),\ s_k \mapsto (\varphi_{ki}(s_k|_{V\cap U_k \cap U_i}))_{i\in I}$$

と定義する。このとき、$V \subseteq U_k \Rightarrow V \cap U_k = V$ から

$$s_i := \varphi_{ki}(s_k|_{V\cap U_k\cap U_i}) = \varphi_{ki}(s_k|_{V\cap U_i})$$

となるので、

$$\varphi_{ij}(s_i|_{V\cap U_i\cap U_j}) = \varphi_{ij}((\varphi_{ki}(s_k|_{V\cap U_i}))|_{V\cap U_i\cap U_j})$$

$$= \varphi_{kj}(s_k|_{V\cap U_i\cap U_j}) = \varphi_{kj}(s_k|_{V\cap U_j})|_{V\cap U_i\cap U_j} = s_j|_{V\cap U_i\cap U_j}$$

より、

$$\delta_k(s_k) = (s_i)_{i\in I} \in \mathscr{F}(V)$$

となる。
　以上から、まず $\psi_k(V)\delta_k(V) = \mathrm{id}$ である。また、$(s_i)_{i\in I} \in \mathscr{F}(V)$ に対して、$s_i \in \mathscr{F}_i(V\cap U_i)$ より

$$\delta_k(V)\psi_k(V)((s_i)_{i\in I}) = \delta_k(V)(s_k) = (\varphi_{ki}(s_k|_{V\cap U_i}))_{i\in I} = (s_i|_{V\cap U_i})_{i\in I} = (s_i)_{i\in I}$$

となるので $\delta_k(V)\psi_k(V) = \mathrm{id}$ も成立する。さらに、ψ_k が morphism で $\delta_k = \psi_k^{-1}$ なので、δ_k も morphism となることがわかる。
　従って ψ_k は isomorphism である。

　$V \subseteq U_i \cap U_j$ において、$s = (s_k)_{k\in I},\ s_k \in \mathscr{F}_k(V\cap U_k)$ に対して $\psi_i(V)(s) = s_i \in \mathscr{F}_i(V\cap U_i) = \mathscr{F}_i(V)$ より

$$\varphi_{ij}(V)\psi_i(V)(s) = \varphi_{ij}(V)(s_i) = \varphi_{ij}(V)(s_i|_{V\cap U_i\cap U_j}) = s_j|_{V\cap U_i\cap U_j} = s_j = \psi_j(s)$$

従って、

$$\psi_j = \varphi_{ij}\psi_i$$

が得られる。

　$< \mathscr{G}, \sigma_i >$ が

$$\sigma_i : \mathscr{G}|_{U_i} \to \mathscr{F}_i;\ \ \text{isomorphism}$$

$$\sigma_j = \varphi_{ij}\sigma_i \text{ on } U_i \cap U_j$$

を満たすとする。このとき、

$$\phi_i = \sigma_i^{-1}\psi_i : \mathscr{F}|_{U_i} \to \mathscr{G}|_{U_i} \Rightarrow \phi_i \in \mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{G})(U_i)$$

とすると、$U_i \cap U_j$ において

$$\phi_i = \sigma_i^{-1}\psi_i = \sigma_j^{-1}\varphi_{ij}\psi_i = \sigma_j^{-1}\psi_j = \phi_j$$

より、$\phi_i|_{U_i \cap U_j} = \psi_j|_{U_i \cap U_j}$ となる。よって $\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ は sheaf なので (Exercise 1.15)

$$\exists \phi \in \mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{G})(X) = \mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{G}),\ \phi|_{U_i} = \phi_i$$

を得る。ϕ_i: isomorphism だから ϕ_i^{-1} から同様に ϕ' を作成すれば、sheaf 条件 (b-4) における section の一意性から $\phi\phi' = \mathrm{id},\ \phi'\phi = \mathrm{id}$ が得られるので

$$\mathscr{F} \approx \mathscr{G}$$

である。

References

[1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald: Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, 1963

[2] 彌永昌吉、小平邦彦: 現代数学概説 I, 岩波書店, 1976