1 Varieties

1.7 Intersections in Projective Space

1.7.1

(a) Exercise 2.12 から $S(Y) = k[y_0, \cdots, y_N]/\mathfrak{a},\ \mathfrak{a} = \ker\theta, \theta : y_i \mapsto M_i$ である。よって、

$$S(Y)_\ell = k[y_0, \cdots, y_N]_\ell/\mathfrak{a}_\ell = \theta(k[y_0, \cdots, y_N]_\ell) = k[x_0, \cdots, x_n]_{d\ell}$$

となる。最後の等式は、$d\ell$ 次斉次多項式は $M_i, i = 0, \cdots, N$ の多項式で表せることによる。従って、

$$\varphi_{(Y)}(\ell) = \dim_k k[x_0, \cdots, x_n]_{d\ell} = {}_{n+1}\mathrm{H}_{dl} = \binom{n+dl}{n}$$

となるので、

$$P_{S(Y)}(z) = \binom{n+dz}{n} = (dz)^n/n! + \cdots$$

の最大次数係数から $\deg Y = d^n$ が得られる。

(b) Exercise 2.14 から $S(Y) = k[\{z_{ij}\}]/\mathfrak{a},\ \mathfrak{a} = \ker\theta, \theta : z_{ij} \mapsto x_i y_j$ である。

$$S(Y)_\ell = k[\{z_{ij}\}]_\ell/\mathfrak{a}_\ell = \theta(k[\{z_{ij}\}]_\ell) = k[x_0, \cdots, x_r]_\ell k[y_0, \cdots, y_s]_\ell$$

より

$$\varphi_{(Y)}(\ell) = \dim_k k[x_0, \cdots, x_r]_\ell k[y_0, \cdots, y_s]_\ell = {}_{r+1}\mathrm{H}_l \cdot {}_{s+1}\mathrm{H}_l = \binom{r+l}{r}\binom{s+l}{r}$$

となるので、

$$P_{S(Y)}(z) = \binom{r+z}{r}\binom{s+z}{r} = (z^r/r! + \cdots)(z^s/s! + \cdots) = z^{r+s}/(r!s!) + \cdots$$

の最大次数係数から $\deg Y = (r+s)!/(r!s!) = \binom{r+s}{r}$ が得られる。

1.7.2

(a) Proposition 7.6(c) の証明から $P_{P^n}(z) = \binom{z+n}{n}$ なので、

$$p_a(\mathbf{P}^n) = (-1)^n(P_{\mathbf{P}^n}(0) - 1) = (-1)^n(\binom{n}{n} - 1) = 0$$

である。

(c) Proposition 7.6(d) の証明にあるように、$P_H(z) = \binom{z+n}{n} - \binom{z-d+n}{n}$ なので、$P_H(0) = 1 - \binom{n-d}{n}$ から、

$$p_a(H) = (-1)^{\dim H}(-\binom{n-d}{n}) = (-1)^n\binom{n-d}{n} = \binom{d-1}{n}$$

となる。なお、これは $d \le n$ のとき 0 である。

(b) (c) の結果に $n = 2$ を代入すれば

$$p_a(\mathbf{P}^2) = (-1)^2\binom{d-1}{2} = (d-1)(d-2)/2$$

が得られる。

(d) Y は complete intersection なので、$I(Y) = (f, g)$ とかける。$r = \dim Y = 1, a = \deg f, b = \deg g, n = 3$ であるが、題意から f, g は異なる既約多項式としてよい。このとき

$$0 \to S(-a-b) \xrightarrow{\varphi} S(-a) \oplus S(-b) \xrightarrow{\psi} S \to S/(f,g) \to 0$$

$$\varphi : h \mapsto (gh, -fh),\ \psi : (h_1, h_2) \mapsto (fh_1 + gh_2)$$

は完全系列となる。その証明はほとんど自明であるが、$\mathrm{Im}\varphi \supseteq \ker\psi$ のみ示す。$(h_1, h_2) \in \ker\psi$ とすると、$fh_1 + gh_2 = 0 \Rightarrow fh_1 = -gh_2$ であるが、f, g は異なる既約多項式なので、$h := h_1/g = -h_2/f$ とおける。従って、$h_1 = gh, h_2 = -hf$ から $\varphi(h) = (gh, -fh) = (h_1, h_2)$ が得られる。

上記完全系列から

$$P_Y(z) - P_{\mathbf{P}^n}(z) + (P_{\mathbf{P}^n}(z-a) + P_{\mathbf{P}^n}(z-b)) - P_{\mathbf{P}^n}(z-a-b) = 0$$

が得られるので、

$$p_a(Y) = \binom{3-a}{3} + \binom{3-b}{3} - \binom{3-a-b}{3} = \frac{1}{2}ab(a+b-4) + 1$$

となる。

(e) $S(Y)_d \otimes_k S(Z)_d \approx S(Y \times Z)_d$ を示す (Exercise 3.15(b) に対応)。

$$S(Y)_d \times S(Z)_d \to S(Y \times Z)_d, (\overline{f}, \overline{g}) \mapsto \overline{fg}$$

は well-define であり双線形写像なので、環準同型写像

$$\varphi : S(Y)_d \otimes S(Z)_d \to S(Y \times Z)_d,\ \sum_\ell \overline{f}_\ell \otimes \overline{g}_\ell \mapsto \sum_\ell \overline{f_\ell g_\ell}$$

が定義できる ([1], Proposition 2.12)。

$S(Y\times Z)_d$ の元は d 次斉次多項式 $f(\{z_{i,j}\})$ を用いて $\overline{f(\{x_iy_j\})} = \sum_\ell \overline{g_\ell h_\ell}$ で与えられる。ここで、$g_\ell(x), h_\ell(y)$ は d 次斉次多項式である。よって、$\sum_\ell \overline{g}_\ell \otimes \overline{h}_\ell \mapsto \overline{f(\{x_iy_j\})}$ であり、φ は全射である。

φ が単射であることを示す。$S(Z)_d$ は k 加群なので基底 $\{\overline{h_\ell}\}_\ell$ が存在し、$S(Y)_d \otimes S(Z)_d$ の元は $\sum_\ell \overline{g}_\ell \otimes \overline{h}_\ell$ とかける。

一般に

$$f(x,y) \in I(X\times Y)_d \Rightarrow f(P,y) \in I(Y)_d, P\in X \Rightarrow f(P,\tilde{y}) = 0 \text{ in } S(Y)_d$$

である。

よって、$\varphi(\sum_\ell \overline{g}_\ell \otimes \overline{h}_\ell) = \sum_\ell \overline{g_\ell h_\ell} = 0$ とすると、$\sum_\ell g_\ell h_\ell \in I(Y\times Z) \Rightarrow \sum_\ell g_\ell(P)h_\ell(\tilde{y}) = \sum_\ell g_\ell(P)\widetilde{h_\ell(y)} = 0, P\in Y$ である。$\{\overline{h}_\ell\}_\ell$ は基底なので、$g_\ell(P) = 0 \Rightarrow g_\ell(x) \in I(Y) \Rightarrow \widetilde{g_\ell(x)} = 0$ となり、$\sum_i \widetilde{g_\ell(x)} \otimes \widetilde{h_\ell(y)} = 0$ が成立する。

さて、一般に M, N を k-加群とすると $\dim_k M\otimes_k N = \dim_k M \times \dim_k N$ が成り立つ。実際、[1], equation (1), p.28 より

$$(M\otimes N)^* = \mathrm{Hom}(M\otimes N, k) \approx \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N,k)) = \mathrm{Hom}(M, N^*)$$

が成立するので、$\dim M\otimes N = \dim M \cdot \dim N$ である。

従って、

$$\dim S(Y\times Z)_d = \dim S(Y)_d \otimes S(Z)_d = \dim S(Y)_d \cdot \dim S(Z)_d$$

となる。

以上により、$\varphi_{S(Y\times Z)}(\ell) = \varphi_{S(Y)}(\ell)\cdot\varphi_{S(Z)}(\ell)$、よって

$$P_{Y\times Z}(z) = P_Y(z)\cdot P_Z(z)$$

が得られる。$\deg P_Y(z)\cdot P_Z(z) = \deg P_Y(z) + \deg P_Z(z) = r+s$ なので、$p_a(Y\times Z) = (-1)^{r+s}(P_{Y+Z}(0) - 1) = (-1)^{r+s}(P_Y(0)P_Z(0) - 1)$ となる。従って、$P_Y(0) = (-1)^r p_a(Y) + 1$ などから、

$$p_a(Y\times Z) = p_a(Y)p_a(Z) + (-1)^s p_a(Y) + (-1)^r p_a(Z)$$

が成立する。

1.7.3

$P\in Y$ の x_0 成分が非零だったとして、$P\in U_0 \approx \mathbf{A}^2$ とする。$P = (0,0)$ としてよい。P が nonsingular なので f の最低次数は 1 であり、変数の 1 次変換により $f(x,y) = ay + f_2(x,y), \deg f_2 \geq 2$ とおける。

$g(x) = f(x,0)$ とすると $g(x) = x^m(x-a_1)\cdots(x-a_r)$, $a_i \neq 0$, $m = \deg g(x) \geq 2$ とかけ、$\mathcal{O}_{P,\mathbf{A}^1}$ において $x - a_i$ は単元なので $(g) = (x^m)$ である。このとき $L_P = Z(y)$ とすると

$$(L_P\cdot Y)_P = \dim_k \mathcal{O}_{P,\mathbf{A}^2}/(y,f) = \dim_k \mathcal{O}_{P,\mathbf{A}^1}/(g) = \dim_k \mathcal{O}_{P,\mathbf{A}^1}/(x^m) = m \geq 2$$

である。

L_P 以外の line L に対しては $(L\cdot Y)_P=\mu_P(Y)=1$ なので (Exercise 5.4(b) の証明から)、intersection multiplicity が 2 以上となるのは L_P のみとなり、それが $T_P(Y)$ である[1]。

$$\varphi:\mathrm{Reg}Y\to(\mathbf{P}^2)^*\approx\mathbf{P}^2, P\mapsto L_P=T_P(Y)=\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_0}\right|_P,\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_P,\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_P\right)$$

において、Theorem 5.3 より $\mathrm{Reg}Y$ は Y の非空な開集合なので variety であり、$\dim\mathrm{Reg}Y=1$ となる。φ は morphism である。

一般に X が既約ならば連続写像の像 $\psi(X)$ は既約である。実際、$\psi(X)\subseteq C_1\cup C_2\Rightarrow X\subseteq\psi^{-1}(C_1\cup C_2)=\psi^{-1}(C_1)\cup\psi^{-1}(C_2)\Rightarrow X\subseteq\psi^{-1}(C_i)\Rightarrow\psi(X)\subseteq\psi\psi^{-1}(C_i)\subseteq C_i$ である。

従って、$\varphi(\mathrm{Reg}Y)$ は既約であり、$Y^*=\overline{\varphi(\mathrm{Reg}Y)}$ は既約閉集合である。

次元に関しては $\dim Y^*\leq 1$ であって、$\dim Y^*=0$ となるのは Y が hyperplane のとき、そのときに限ることを示す。

$\varphi:\mathrm{Reg}Y\to Y^*$ は dominant morphism なので、$\varphi^*:K(Y^*)\hookrightarrow K(\mathrm{Reg}Y)$ であり (Corollary 6.12)、次式が得られる。

$$\dim Y^*=\mathrm{transdeg}_k K(Y^*)\leq\mathrm{transdeg}_k K(\mathrm{Reg}Y)=\dim\mathrm{Reg}Y=1$$

$\dim Y^*=0$ と仮定しよう。Y^* は既約閉集合なので $\varphi(\mathrm{Reg}Y)=\exists Q$、すなわち φ は定数写像である。よって $\mathrm{Reg}Y$ 上で

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_0},\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)=Q=(c_0,c_1,c_2) \tag{1}$$

となるが、$\overline{\mathrm{Reg}Y}=Y$ なので Y 上でも上式 (1) は成立する。従って

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}-c_i\in(f),\ 0\leq i\leq 2$$

となるが、これは f が hyperplane でない限り成立しない。逆に f が hyperplane なら明らかに $\dim Y^*=0$ である。

1.7.4

Y の点 $P=(a_0,a_1,a_2)$ を通る直線 $\alpha x_0+\beta x_1+\gamma x_2=0$ は $\alpha a_0+\beta a_1+\gamma a_2=0$ を満たすので、(α,β,γ) の集合は $\mathbf{P}^2$ で 1 次元既約閉集合である。特異点は有限個なので (Theorem 5.3)、特異点を通る直線の集合 V もやはり $(\mathbf{P}^2)^*$ で 1 次元閉集合となる。

[1] これは Exercise 5.10 の Zariski tangent space に等しい ([2], Theorem 4.5)。但し、本問の場合はこれを容易に証明できる。$\dim_k T_P(Y)=1$ より、$T_P(Y)^*=(x)_v,\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2=\mathfrak{a}_P/(\mathfrak{a}_P^2+(f))=(x,y)/((x,y)^2,y+f_2(x,y))=\widehat{(x)_v}$ なので [$(x)_v$ はベクトル空間としての生成の意味、$\mathfrak{a}_P$ は Theorem 5.1 の証明で定義]、$\widehat{T_P(Y)^*}=\widehat{(x)_v}$ となる [hat は完備化]。$\mathcal{O}_P$ は整域なので ([1], Theorem 11.22 直後のコメント)、$\mathcal{O}_P\to\widehat{\mathcal{O}_P}$ は単射だから ([1], Corollary 10.18)、$T_P(Y)^*=\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ である。

前問 7.3 より $\dim Y^* \leq 1$ なので $(Y^* \cup V) \subsetneq (\mathbf{P}^2)^*$ である。よって

$$U := (\mathbf{P}^2)^* - (Y^* \cup V) \subseteq ((\mathbf{P}^2)^* - V) - \tilde{Y}$$

とすると U は非空開集合である。ここで、$\tilde{Y}$ は $\mathrm{Reg}Y$ の像、すなわち tangent line の集合である。

$(\mathbf{P}^2)^* - V$ に含まれる直線は Y と必ず交叉する (Exercise 3.7(a))。$L \in U$ とし、$\forall P \in Y \cap L \neq \varnothing$ とする。L は V に含まれないことから Y の特異点を通らず非特異点を通るので、P は非特異点である。

$L \notin \tilde{Y}$ より、L は tangent line $T_P(Y)$ ではない。このとき、Exercise 5.4(b) の証明から分かるように $(L \cdot Y)_P = \mu_P(Y)$ である。$P \in Y$ が非特異点なので $\mu_P(Y) = 1$ から、$(L \cdot Y)_P = 1$ となる。

Exercise 5.4(c) より

$$d = (L \cdot Y) = \sum_{P \in Y \cap L} \mu_P(Y) = \sum_{P \in Y \cap L} 1 = |Y \cap L|$$

が成立する。

1.7.5

(a) $Y = Z(\tilde{f})$ とする。projective variety での multiplicity は $P \in Y_i = Y \cap U_i$ とした affine 上の multiplicity $\mu_P(Y)$ で与えられる。この multiplicity は i に依存しない (Exercise 5.3 解答補足)。よって、Y を affine とし $f(x, y) = \tilde{f}(x, y, 1)$ とおく。

$P = (0, 0) \in Y$ とする。$Y = Z(f)$ としたとき、$\deg f = d$ である。もし、d 次斉次多項式 $\tilde{f}(x, y, z)$ において、$z = 1$ として次数が d より低くなったとすると $\tilde{f}$ は z で割り切れるので既約でなくなる。よって $\mu_P(Y) \leq d$ であるが、ここで $\mu_P(Y) = d$ とすると $f(x, y)$ は d 次斉次多項式となる。k は代数的閉体なので、$d > 1$ とすると

$$f(x, y) = c(a_1 x - b_1 y) \cdots (a_d x - b_d y)$$

と因数分解できる。すると $\tilde{f}$ も可約となるが、これは $\tilde{f}$ が既約ということに反する。よって、$\mu_P(Y) \neq d$ より $\mu_P(Y) < d$ である。

(b) P の z 成分が非零とし、$Y_z = Y \cap U_z$ で考える。このとき、$z = 1$ とした $f(x, y)$ は既約である。$\mu_P(Y) = d - 1$ とする。$\deg f = d > 1$ なので $f = f_{d-1} + f_d,\ \deg f_i = i$ の形をしている。$Y \subseteq Z(x)$ とすると $\dim Y = 1$ より $Y = Z(x) \Rightarrow f = x$ となるが、これは $\deg f > 1$ に反する。

$Y \not\subseteq Z(x)$ とする。$R = Z(f_{d-1}(1, t)) \cup Z(f_d(1, t))$ は有限集合であり、$\mathbf{A}^1 - R, Y - Z(x)$ は共に非空開集合なので既約となる。

$\varphi : Y - Z(x) \ni (x, y) \mapsto t = y/x \in \mathbf{A}^1$ とすると、$t = y/x \notin R$ である。もし $t \in R$ と仮定する。$(x, y) \in Y$ から $f(1, t) = f_{d-1}(1, t) + x f_d(1, t) = 0$ が成立するが、$x \neq 0$ と $t \in R$ から $f_{d-1}(1, t) = 0, f_d(1, t) = 0$ が得られる。従って、$f_d(1, t), f_{d-1}(1, t)$ は共通根を持つ。それを a とすると f_{d-1}, f_d が $y - ax$ を共通因数に持つことになるので、$f(x, y)$ の既約性に反する。

従って、

$$\varphi : Y - Z(x) \to \mathbf{A}^1 - R,\ (x,y) \mapsto t = y/x$$

は morphism である。

一方、$\psi : \mathbf{A}^1 - R \ni t \mapsto (x,y) = (-f_{d-1}(1,t)/f_d(1,t), tx)$ とすると $t \notin R$ より、$f_d(1,t) \neq 0, f_{d-1}(1,t) \neq 0$ なので $\psi(t) \notin Z(x)$ である。従って、

$$\psi : \mathbf{A}^1 - R \to Y - Z(x),\ t \mapsto (x,y) = (-f_{d-1}(1,t)/f_d(1,t), tx)$$

は morphism となる。

$\varphi\psi = id_{\mathbf{A}^1 - R}, \psi\varphi = id_{Y-Z(x)}$ が成立するので、

$$Y \supseteq Y - Z(x) \approx \mathbf{A}^1 - R \subseteq \mathbf{A}^1 \subseteq \mathbf{P}^1$$

より Y は rational curve である。

1.7.6

Algebraic set $Y \subseteq \mathbf{P}^n$ の既約成分分解を $Y = Y_1 \cup \cdots Y_s$ とする。

$$\dim Y_1 = \cdots = \dim Y_s, \deg Y = 1 \Leftrightarrow Y = Z(\exists f_1, \cdots, \exists f_t)$$

を示す。なお、linear variety は既約であり (Exercise 2.11 の証明)、従って実際は $s = 1$ である。

最初に、Hyperplane の集合 $(\mathbf{P}^n)_H$ とその係数の組みの対応を調べておく。

$$\rho : (\mathbf{P}^n)_H \to \mathbf{P}^n : H = Z(f) \mapsto (a_0, \cdots, a_n),\ f(x) = \sum_{0 \le i \le n} a_i x_i$$

は明らかに全単射である。

k^{n+1} をベクトル空間とみなして、$\varphi : k^{n+1} \to \mathbf{P}^n = k^{n+1}/\sim$ を標準的全射とする。$P \in \mathbf{P}^n$ に対し、$P' \in \varphi^{-1}(P)$ とすると、$P' \cdot \boldsymbol{a} = 0$ は P' を $\varphi^{-1}(P)$ のどの元としても成立するので ($\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は内積)、$P \cdot \boldsymbol{a} = 0$ と記す。他に、$P'_0, \cdots, P'_s$ で張られる空間 $< P'_0, \cdots, P'_s >$、$\dim_k < P'_0, \cdots, P'_s >$ なども P'_i のとり方によらないので P' の代わりに P を用いる。

ベクトル空間において $A =< P_0, \cdots, P_s >$ に対して $A^* := \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \cdot P_0 = 0, \cdots, \boldsymbol{x} \cdot P_s = 0\}$ とすると、$\dim_k A^* = n + 1 - \dim_k A$ であり ([3], 第 2 章定理 [5.5])、$A \subseteq B \Rightarrow A^* \supseteq B^*,\ (A^*)^* = A$ である。

$P \in H \Leftrightarrow f(P) = \rho(H) \cdot P = 0$ なので、$H = \varphi(\rho(H)^*)$ である。

$P_0, \cdots, P_s$ が線形独立なとき、$< P_0, \cdots, P_s >^* =< \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-s} >$ と基底で表し、$\boldsymbol{b}_i = \rho(H_i)$ とすると、$H_1 \cap \cdots \cap H_{n-s} = \varphi(< \rho(H_1), \cdots, \rho(H_{n-s}) >^*) = \varphi(< \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-s} >^*) = \varphi((< P_0, \cdots, P_s >^*)^*) = \varphi(< P_0, \cdots, P_s >)$ が得られる。$[P_0, \cdots, P_s] = \varphi(< P_0, \cdots, P_s >)$ とおくと、

$$[P_0, \cdots, P_s] = \exists H_1 \cap \cdots \cap \exists H_{n-s},\ \dim[P_0, \cdots, P_s] = s \tag{2}$$

となり、$[P_0,\cdots,P_s]$ は linear variety である。なお、これは次のように拡張できる。

線形部分空間 V に対し $[V]=\varphi(V)$ は linear variety であり

$$[V]=\exists H_1\cap\cdots\cap\exists H_{n-\dim_k V+1},\ \dim[V]=\dim_k V-1$$

$P\in[P_0,\cdots,P_s]\Leftrightarrow P'\in<P_0,\cdots,P_s>\Leftrightarrow P$ は $P_0,\cdots,P_s$ に線形従属。

$P_0,\cdots,P_s$: 線形独立 $\Leftrightarrow\ \dim(H_1\cap\cdots\cap H_{n-s})=s$ が成り立つ。なぜなら $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_{n-s}$ の線形独立性は $H_j=Z(f_j)$ として $(f_1,\cdots,f_{i-1})\not\ni f_i,\ i=2,\cdots,n-s$ を意味し、さらには $H_1\cap\cdots\cap H_{i-1}\not\supseteq H_i,\ i=2,\cdots,n-s$ を意味するからである。

$(\Leftarrow)$

$Y=Z(f_1,\cdots,f_t)$ で各 f_i は斉次 1 次多項式とする。linear variety は既約なので $s=1$ であり、Y は pure dimension r を持つといえる。$\deg Y=1$ を t に関する帰納法で示す。$t=1$ のとき $Y=Z(f_1)$ で f_1 は斉次 1 次式なので、$\deg Y=1$ である。$t-1$ まで成立すると仮定する。$Y_{t-1}=Z(f_1,\cdots,f_{t-1})$ とおくと、$Y=Y_{t-1}\cap Z(f_t)$: 既約である (linear variety は既約)。もし $Y_{t-1}\subseteq Z(f_t)$ とすると $Y=Y_{t-1}$ なので、帰納法の仮定から Y は linear variety である。$Y_{t-1}\not\subseteq Z(f_t)$ とすると、やはり帰納法の仮定から $\deg Y_{t-1}=1$ で、Theorem 7.7 から

$$i(Y_{t-1},Z(f_t):Y)\deg Y=\deg Y_{t-1}\cdot\deg Z(f_t)=1\cdot1=1$$

より、$\deg Y=1$ となる。

$(\Rightarrow)$

Y には次の性質がある。

$$Y\ni P_0,\cdots,P_s\Leftrightarrow Y\supseteq[P_0,\cdots,P_s] \tag{3}$$

これを証明するには、線形独立な $P_0,\cdots,P_s$ に対して次を証明すればよい。

$$Y\supseteq P_0,\cdots,P_s\Rightarrow s\le r,\ Y\supseteq[P_0,\cdots,P_s]$$

r に関する数学的帰納法で示す。

$r=0$ のとき。Y は既約なので、$s=0,\ Y=\{P_0\}$ である。式 (2) より $\dim[P_0]=0$ なので $[P_0]=P_0\in Y$ である。

$r\ge1$ のとき。既に示したように $[P_0,\cdots,P_s]=H_1\cap\cdots\cap H_{n-s}$ となる hyperplane H_i が存在する。この際、$P_0,\cdots,P_s$ を含む任意の hyperplane H に対して、$H_1=H$ とできるので ($\boldsymbol{b}_0$ は $\mathbf{0}$ 以外自由に選べる)、$P_0,\cdots,P_s$ を含む任意の hyperplane は $[P_0,\cdots,P_s]$ を含むことがわかる。

$s>r$ と仮定する。もし $Y\not\subseteq[P_0,\cdots,P_r]=H_1\cap\cdots\cap H_{n-r}$ とすると、$Y\not\subseteq\exists H_i$ である。$H:=H_i$ として、$P_0,\cdots,P_s\in Y\cap H$ の既約成分分解を $Y\cap H=\cup_j Z_j$ とする。Theorem 7.7 から得られる

$$\sum_j i(Y\cap H,Z_j)\deg Z_j=\deg Y\cdot\deg H=1$$

によって、$Y\cap H = Z_1$: 既約、$\deg Z_1 = 1$ を得る。$Z \ni P_0, \cdots, P_r$ で $\dim Z_1 = r-1$ なので、帰納法の仮定から $r \le r-1$ となるが、これはあり得ない。

よって、$Y \subseteq [P_0, \cdots, P_r] = H_1 \cap \cdots \cap H_{n-r}$ であるが、次元の比較から (Exercise 1.10(d))、$Y = [P_0, \cdots, P_r]$ となる。このとき、Y に $P_{r+1} \notin [P_0, \cdots, P_r]$ を追加できない。

従って、$s \le r$ である。$Y \not\subseteq [P_0, \cdots, P_s] = H_1 \cap \cdots \cap H_{n-s}$ とすると、前と同様に Theorem 7.7 を適用して、$Z = Y \cap H \ni P_0, \cdots, P_s,\ \deg Z = 1, \dim Z = r-1$ を得るが、帰納法の仮定から $s \le r-1,\ Y \supseteq Z \supseteq [P_0, \cdots, P_s]$ が成り立つ。

$Y \subseteq [P_0, \cdots, P_s]$ とすると、次元の比較から $s = r,\ Y = [P_0, \cdots, P_s]$ となる。以上により性質 (3) が示された。

$Y \ni \exists P_0$ に対し、性質 (3) から $Y \supsetneq [P_0]$ である。$Y \supsetneq [P_0] \Rightarrow Y - [P_0] \ni \exists P_1 \Rightarrow Y \supsetneq [P_0, P_1]$ で、$P_1 \notin [P_0]$ より P_0, P_1 は線形独立である。以下同様にすると、$Y - [P_0, \cdots, P_{r-1}] \ni \exists P_r \Rightarrow Y \supseteq [P_0, \cdots, P_r]$ が得られるが、次元の比較から $Y = [P_0, \cdots, P_r]$ となる。$[P_0, \cdots, P_r] = H_1 \cap \cdots \cap H_{n-r}$ より Y は linear variety である。

1.7.7

(a) 次数は閉集合に対してしか定義されていないが (p. 52 における次数の定義参照)、閉集合でない場合にはその閉包で定義するとみられる。これは affine variety Y の次数が、$Y \subseteq U_i \subseteq \mathbf{P}^n$ として、$\deg Y = \deg \overline{Y}$ で定義される ([5], 定義 8.8 の後の定義) こととも適合している。

次元は閉包化しても不変なので、閉包化した variety を Y として今後議論を進める。

$P = (1, 0, \cdots, 0)$ とおき、$I(Y) = (f_1, \cdots, f_s)$ とする。$I(Y)$ は prime ideal である。$\forall Q \in Y$ を $Q = (q_0, \cdots, q_n)$ とおく。このとき、$line(P, Q) = \{P + (Q - P)\lambda | \lambda \in k\}$ なので、

$$Q = P + (\boldsymbol{x} - P)\lambda = (1 - \lambda + \lambda x_0, \lambda x_1, \cdots, \lambda x_n),\ \rho \in k - 0$$

を $f_i(Q) = 0, 1 \le i \le n$ に代入すると

$$f_i(x_0 + t, x_1, \cdots, x_n) = 0,\ 1 \le i \le s \tag{4}$$

となる。ここで、t が変わると $line(P, Q)$ 上を点 $\boldsymbol{x}$ が移動する。すなわち、上式 (4) を満たすような $t \in k$ が存在する $\boldsymbol{x}$ の集合 X^- の closure が題意の X である。従って、t を新たな変数として $g_i(t, x_0, \cdots, x_n) := f_i(x_0 + t, x_1, \cdots, x_n)$ とし、$\tilde{X} = Z(g_1, \cdots, g_s)$ とすると $X^- = \mathrm{Pr}_{\boldsymbol{x}}(\tilde{X})$ である。ここで $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{x}} : \tilde{X} \to X^-$ は射影、g_i は斉次多項式である。

$$I(\tilde{X}) = (g_1, \cdots, g_s) = (f_1(x_0 + t, x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_s(x_0 + t, x_1, \cdots, x_n))$$

は次の二つの性質を持っている。

1. $I(\tilde{X})$: prime ideal. 一般に環 R とその ideal $\mathfrak{a}$ に対し $R[x]/\mathfrak{a}^e \approx (R/\mathfrak{a})[x]$ が成り立つ。よって

$k[t,x_0,x_1,\cdots,x_n]/I(\tilde{X}) = k[t,x_0,x_1,\cdots,x_n]/(g_1,\cdots,g_s)$
$= k[t,y-t,x_1,\cdots,x_n]/(f_1(y,x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_s(y,x_1,\cdots,x_n))$
$= k[y,x_1,\cdots,x_n][t]/(f_1(y,x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_s(y,x_1,\cdots,x_n))$
$= (k[y,x_1,\cdots,x_n]/(f_1(y,x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_s(y,x_1,\cdots,x_n)))[t]$
$\approx (k[x_0,\cdots,x_n]/I(Y))[t]$
であり、$k[x_0,\cdots,x_n]/I(Y)$ は整域なので $(k[x_0,\cdots,x_n]/I(Y))[t]$ も整域となり ([4], 3 章補題 I)、よって $I(\tilde{X})$ は prime ideal である。

2. $\mathrm{height}(I(\tilde{X})) \geq \mathrm{height}(I(Y))$. $\mathrm{height}(I(Y))$ を与える prime ideal の系列があったとする。その系列の中の一つの prime ideal を $\mathfrak{p}$ とすると、それに対応して $x_0 \leftarrow x_0 + t$ で得られる ideal $\tilde{\mathfrak{p}}$ は、いま 1. で示したように prime ideal だから、$\mathrm{height}(I(\tilde{X})) \geq \mathrm{height}(I(Y))$ となる。

Exercise 7.3 の証明で示したように、一般に Y が既約ならば連続写像 φ の像は既約である。従って、$X^- = \mathrm{Pr}_{\boldsymbol{x}}(\tilde{X})$ は既約であり、$X = \overline{X^-}$ は既約閉集合である。但し、今は Y を閉集合としているので $\tilde{X}$ は閉集合、morphism は閉写像なので ([6], Corollary 4.5)、X^- は既に閉集合である。

$\tilde{S} = k[t,x_0,\cdots,x_n]$ とすると

$\dim \tilde{X} = \dim \tilde{S}(\tilde{X}) - 1 = \dim \tilde{S}/I(\tilde{X}) - 1 = \dim \tilde{S} - \mathrm{height}(I(\tilde{X})) - 1$
$\leq \dim S + 1 - \mathrm{height}(I(Y)) - 1 = \dim S(Y) = \dim Y + 1 = r + 1$

である。

次に $r \leq \dim X \leq \dim \tilde{X}$ を示す。

まず、$V \subsetneq W \subseteq X \Rightarrow \mathrm{Pr}_{\boldsymbol{x}}^{-1}(V) \subsetneq \mathrm{Pr}_{\boldsymbol{x}}^{-1}(W) \Rightarrow \dim \tilde{X} \geq \dim X$ である。一方、$X \supseteq Y$ より $\dim X \geq \dim Y = r$ なので、$r \leq \dim X \leq r+1$ が得られる。

ここまでは、P が Y の元か否かにかかわらず成立する。

P が nonsingular point の場合には $\dim X = r$ とはならないことを示す。$\dim X = r$ とすると、$X \supseteq Y$ なので Exercise 1.10(d) より $X = Y$ となる。ここで、Y を nonsingular point P を含む $Y \cap U_0$ として、affine で考える。$P = \mathbf{0}$ とおいてよい。

$Q \in Y$ に対し、P, Q を通る直線は $line(P,Q) = \{uQ | u \in k\}$ で与えられるので $uQ \in X$ である。$X = Y$ より $f \in I(Y)$ に対し $f(uQ) = 0, \forall u \in k$ であり、$\boldsymbol{\alpha} = uQ$ のとき $\frac{df(uQ)}{du} = 0$ となる。両辺に u をかけると

$$u\frac{df(uQ)}{du}(P) = u\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)q_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)\alpha_i = 0 \tag{5}$$

を得る。一方、affine では

$$T_P(Y) = Z(f_1^1,\cdots,f_s^1),\ f_i^1 = \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P)(x_i - p_i)$$

で与えられる ([2], Theorem 4.5)。$P = \mathbf{0}$ なので、上式 (5) は $\boldsymbol{\alpha} \in T_P(Y)$ を示しており、$line(P,Q) \in T_P(Y)$、さらには $X^- = Y \subseteq T_P(Y)$ となる。

P は nonsingular なので $\dim T_P(Y) = \dim Y$ であり (Exercise 5.10(a))、$T_P(Y)$ は linear variety で既約なので、Exercise 1.10(d) より $T_P(Y) = Y$ が得られる。Exercise 7.6 より $\deg T_P(Y) = 1$ となるが、これは $\deg Y = d > 1$ に反する。

(b)　一般に、variety Y に対して、幾つかの hyperplane によって $Y \cap H_1 \cap \cdots \cap H_t$ が $\deg Y$ 個の異なる点からなるようにできるはずである (p. 48 の前半の記述)。このとき、Theorem 7.7 を適用するときに出てくる多重度 $i(Y, H; Z_j)$ は全て 1 となる。また、$\dim Y \geq 1$ なら $Y \not\subseteq \exists H_i$ である。そうでないと、$Y \subseteq H_1 \cap \cdots \cap H_t \Rightarrow Y \cap H_1 \cap \cdots \cap H_t = Y$ より次元 0 とならない。

Variety $Y \not\subseteq H$ に対し、$Y \cap H$ の既約成分を Y_j とする。Theorem 7.6 と Theorem 7.7 を用いると

$$\deg Y \cap H = \sum_j \deg Y_j \leq \sum_j i(Y, H; Y_j) \deg Y_j = \deg Y \tag{6}$$

を得る。多重度が全て 1 の場合は

$$\deg Y \cap H = \deg Y \tag{7}$$

となる。

さて、改めて $X \cap H_1 \cap \cdots \cap H_s$ が $\deg X$ 個の点からなるとする。ここで $P = (1, 0, \cdots, 0) \in H_i, X \not\subseteq H_i$ となる H_i が存在することを示す。

Exercise 7.6 で用いた記法を用いる:

$$\rho : (\mathbf{P}^n)_H \to \mathbf{P}^n : H = Z(f) \mapsto (a_0, \cdots, a_n),\ f(x) = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i x_i$$

線形空間として $< \rho(H_1), \cdots, \rho(H_s) >$ を不変なまま H_i を変更してゆく。

全ての $1 \leq i \leq s$ に対して、x_0 成分 $\rho(H_i)|_0 = 0$ ($\Leftrightarrow P \in H_i$) ならば、$X \not\subseteq H_i$ となる H_i を取ればよい。

そこで、$\rho(\exists H_i)|_0 \neq 0$ とする。ガウスの消去法を用いると、$\rho(H_1)|_0 = 1, \rho(H_2)|_0 = 0, \cdots, \rho(H_s)|_0 = 0$ とできる。このとき、$P \notin H_1,\ P \in H_i,\ 2 \leq i \leq s$ となるが、$X \not\subseteq H_i$ となる H_i があれば終了である。もし、$X \subseteq H_i,\ 2 \leq i \leq s$ とすると、

$$X \subseteq H_2 \cap \cdots \cap H_s \Rightarrow X \cap H_1 \subseteq H_1 \cap \cdots \cap H_s \Rightarrow X \cap H_1 \subseteq X \cap H_1 \cap \cdots \cap H_s$$

が得られるが、$X \not\subseteq H_1$ より、

$$r = \dim X \cap H_1 \leq \dim X \cap H_1 \cap \cdots \cap H_s = 0 \Rightarrow r = 0$$

ところが、$\dim Y = r = 0$ とすると、$Y = \{P\}$ より $d = \deg Y = 1$ となり、$d > 1$ に反する。従って、$P \in H_i, X \not\subseteq H_i$ となる H_i が存在する。$H := H_i \ni P$ とする。

このとき $Y \not\subseteq H$ も成り立つ。なぜなら、$Y \subseteq H$ とすると $\forall Q \in X$ に対し $Q \in line(P, Q')$ となる $Q' \in Y \subseteq H$ が存在し、$Q \in line(P, Q') \subseteq H \Rightarrow X \subseteq H$ となってしまうからである。

$Y \cap H$ の既約成分を $Y_1, \cdots, Y_s$ とし、$P \in Y_1$ とする。

$\dim Y \geq 2$ のとき、$X \cap H$ の既約成分は $C_P(Y_1), \cdots, C_P(Y_s)$ となることを示す。ここで $C_P(Y)$ は (a) において Y に対して求めた X を表す。(a) で述べたように、P が Y_j に属すか否かにかかわらず、$C_P(Y_j)$ は既約閉集合である。

$C_P(Y_j)$ は既約成分であることを示す。もし、$C_P(Y_j) \subseteq V \subseteq C_P(Y)$ となる既約集合 V があったとする。P から Y への projection morphism $\varphi : C_P(Y) \twoheadrightarrow Y$ によって既約は既約に写されるので (Exercise 7.3 解答参照)、$\varphi(V)$ も既約である。Y_j は既約成分ゆえ、$\varphi(V) = Y$ or Y_j であるが、$\varphi^{-1}(Y_j) = C_P(Y_j),\ \varphi^{-1}(Y) = C_P(Y)$ なので $V = C_P(Y)$ or $C_P(Y_j)$ となる。

よって後は $X \cap H = C_P(Y_1) \cup \cdots \cup C_P(Y_s)$ を示せばよい。$Y \supseteq Y_j$ より $X = C_P(Y) \supseteq C_P(Y_j)$ であり、$Y_j \subseteq H \ni P$ より $C_P(Y_j) \subseteq H$ なので $C_P(Y_j) \subseteq X \cap H$ である。また、$Q \in X \cap H$ とすると $Q \in line(P, Q') = line(P, Q) \subseteq H, \exists Q' \in Y \cap H$ より $Q' \in \exists Y_j$ なので $Q \in line(P, Q') \subseteq C_P(Y_j)$ である。

従って、$X \cap H$ の既約成分は $C_P(Y_1), \cdots, C_P(Y_s)$ であり、かつ、Proposition 7.2(の証明) から、

$$X \cap H = C_P(Y_1) \cup \cdots \cup C_P(Y_s),\ \dim C_P(Y_j) = \dim X - 1 = r$$

である。

命題を証明するにあたり、まず、$d > 1$ という条件を外した場合は $\deg C_P(Y) \leq \deg Y$ となることを示す。

$r = 1$ とする。このとき、$d = 1$ なら Exercise 7.6 から Y は linear variety となるので $C_P(Y) = Y$ より $\deg C_P(Y) = \deg Y$ となって成立する。$d > 1$ なら $Y \cap H = \{P = P_1, P_2, \cdots, P_s\},\ s \leq d$ であるが、$C_P(Y_j) = line(P, P_j),\ j \geq 2,\ C_P(P_1) = \varnothing$ より

$$\deg X = \deg X \cap H = \deg \bigcup_{j \geq 2} C_P(Y_j) = \sum_{j \geq 2} \deg line(P, P_j) = s - 1 < \deg Y \quad (8)$$

となって成立する ($d > 1$ の場合は等号なしの不等号で成立)。ここで多重度が 1 であることを用いた。

$r > 1$ では $\dim Y_j = r - 1$ より帰納法の仮定から $\deg C_P(Y_j) \leq \deg(Y_j)$ なので、$X = C_P(Y)$ に対し

$$\deg X = \deg X \cap H = \deg \bigcup_{j \geq 1} C_P(Y_j) = \sum_{j \geq 1} \deg C_P(Y_j) \leq \sum_{j \geq 1} \deg Y_j = \deg Y \cap H \leq \deg Y \quad (9)$$

が得られる。

さて、$d > 1$ のとき、$\deg X < d$ を $r = \dim Y$ に関する帰納法で証明する。
$r = 1$ のときは既に式 (8) で示したとおりである。
$r > 1$ のときは式 (9) から

$$\deg X = \sum_{j \geq 1} \deg C_P(Y_j) \overset{(1)}{\leq} \sum_{j \geq 1} \deg Y_j \leq \deg Y \quad (10)$$

が成立する。ここで、$Y_1 \ni P$ については $\deg Y_1 = 1$ とはならない。実際、もし $\deg Y_1 = 1$ とすると、Exercise 7.6 から Y_1 は linear variety となるので $C_P(Y_1) = Y_1$ となる。これは (a) の $\dim C_P(Y_1) = \dim Y_1 + 1$ に反する。

$\dim Y_j = r-1$, $\deg Y_j > 1$ なので、帰納法の仮定が使えて $\deg C_P(Y_1) < \deg Y_1$ である。よって、式 (10) において、不等号 $\overset{(1)}{\leq}$ には等号は含まれず

$$\deg X < \deg Y = d$$

が得られる。

1.7.8

Y を既約で次元 r, 次数 2 とする。Theorem 5.3 より nonsingular point $P \in Y$ が存在する。Exercise 7.7 より次元 $r+1$、次数 1 の variety X が存在するが、Exercise 7.6 よりそれは linear variety で $X = H_1 \cap \cdots \cap H_{n-r-1}$ とかける。よって $X \approx L := \mathbf{P}^{r+1}$ であり、$Y \subseteq X = \mathbf{P}^{r+1}$ としてよい。

$\mathbf{P}^{r+1}$ において $\dim Y = r$ より $Y = Z(f)$ となる hypersurface が存在する (Exercise 2.8)。従って、quadratic hypersurface は 1 次元多い linear space に埋め込まれていることになる。

References

[1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald: Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, 1963

[2] A. Knutsen: Additional Notes in Algebraic Geometry I, https://folk.uib.no/st00895/MAT229-V16/AGNotesI-2016.pdf

[3] 齋藤正彦: 線型代数入門, 東京大学出版会, 1966

[4] 松坂和夫: 代数系入門, 岩波書店, 1976

[5] E. Baldwin and G. Bérczi: Algebraic Geometry, http://users.ox.ac.uk/ wadh1180/notesAG.pdf, 2014

[6] A. Bertram: Algebraic Geometry, Math 6130, https://www.math.utah.edu/ bertram/6130/Varieties.pdf, 2016