1 Varieties

1.6 Nonsingulara Curves

1.6.1

(a) $K = K(Y)$ とする。Y はどの curve でも nonsingular quasi-projective curve とみなせるので、Proposition 6.7 より abstract nonsingular curve、すなわち C_K の開集合 U に同型である: $Y \approx U \subseteq C_K$

Theorem 6.9 より C_K は K を funtion field とする nonsingular projective curve と同型である。Theorem 3.4(c) から $K(\mathbf{P}^1) = k[x_0, x_1]_{((0))} = k(x) \approx K$ なので、Theorem 6.12 (iii)→(i) より $C_K \approx \mathbf{P}^1$ である。従って、$Y \approx U \subseteq C_K \approx \mathbf{P}^1$ となるが、Y の条件から $Y \approx U \subsetneq \mathbf{P}^1$ である。よって $\varnothing \neq \mathbf{P}^1 - U$ は閉集合となる。$\mathbf{P}^1$ の閉集合は有限個の点からなるのでその 1 点を Q とし、必要なら平行移動して Q の x_0 成分を 0 にすると、$Z(x_0) = \{Q\}$ となる。

従って $\mathbf{A}^1 \approx \mathbf{P}^1 - Z(x_0) = \mathbf{P}^1 - \{Q\} \supseteq U \approx Y$ である。

(注) Y と $\mathbf{P}^1$ は birational なので、Theorem 6.12 (ii)→(iii) より $K(\mathbf{P}^1) \approx K(Y)$ である。このとき、Theorem 6.12 (iii)→(i) から得られるのは $K = K(Y)$ に対する C_K(に同型な nonsingular projective curve) であって、Y ではない (Y は nonsingular projective curve ではない)。今の場合、それが $\mathbf{P}^1 \approx \overline{Y}$ であった。

(b)

$$Y \approx U \approx \mathbf{A}^1 - \{a_1, \cdots, a_n\} \approx Z((x-a_1)\cdots(x-a_n)y-1) \subseteq \mathbf{A}^2$$

において、$(x-a_1)\cdots(x-a_n)y-1$ は既約多項式なので、Y は既約閉、すなわち affine variety である。

(c) 一般に、A がネーター UFD なら $S^{-1}A$ も UFD である (S は A の積閉集合)。
(証明) $S^{-1}A$ の高さ 1 の prime ideal を $\mathfrak{p}$ とすると、A において $\mathfrak{q} \cap S = \varnothing$ となる prime ideal $\mathfrak{q}$ が存在して $\mathfrak{p} = S^{-1}\mathfrak{q}$ とかける ([1], Proposition 3.11(iv))。A は UFD で、height$\mathfrak{q}$ = height$S^{-1}\mathfrak{q}$ = height$\mathfrak{p}$ = 1 なので、Proposition 1.12A より $\mathfrak{q}$ は単項 ideal であり、$\mathfrak{q} = (\alpha),\ \exists\alpha \in A$ である。すると

$$\mathfrak{p} = S^{-1}\mathfrak{q} = S^{-1}(\alpha) = (\alpha/1)$$

から $\mathfrak{p}$ は単項 ideal であり、再び Proposition 1.12A より $S^{-1}A$ は UFD となる。(証明終)

$S = \{(x-a_1)^{i_1}\cdots(x-a_n)^{i_n} | 0 \leq i_1, \cdots, i_n\}$ は $k[x]$ の積閉集合である。

$$\begin{aligned} A(Y) &= k[x,y]/((x-a_1)\cdots(x-a_n)y-1) \\ &\approx k[x, ((x-a_1)\cdots(x-a_n))^{-1}] \\ &\approx k[x, (x-a_1)^{-1}, \cdots, (x-a_n)^{-1}] \\ &\approx S^{-1}k[x] \end{aligned}$$

従って、$A(Y) = S^{-1}k[x]$ は UFD である。

1.6.2

(a) $A(Y)$: rational $\Leftrightarrow K(Y) \approx K(\mathbf{P}^1) = k[x_0, x_1]_{((0))} \approx k(x)$ であり、$k(x)$ は k の純非分離拡大である (純非分離拡大 K/k とは、k 上代数的に独立な元の集合 S に対し $K = k(S)$ となることをいう)。

Y が nonsingular であること、$f = y^2 - x^3 - x$ が既約であることは、f を斉次化して Exercise 5.9 を用いれば明らかである。従って A は整域である。

Y が nonsingular なので $\mathcal{O}_P = A(Y)_{\mathfrak{m}_P}, \forall P \in Y$ は regular local domain であり、$\dim \mathcal{O}_P = \dim Y = 1$ より $\mathcal{O}_P = A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$ は整閉である (Theorem 6.2A)。$A(Y)$ の任意の極大 ideal $\mathfrak{m}_P$ に対して $A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$ が整閉なので、$A(Y)$ は整閉である ([1], Proposition 5.13)。

(b) 変数 x, y の $A(Y)$ への像も x, y と記す。

$A(Y) \subseteq \mathrm{Frac}A(Y) = K(Y) = K$ において、trans.deg$K = \dim Y = 1$ である。もし $x \in A(Y)$ が代数的数なら $y^2 - x^3 - x = 0$ から y も代数的数になってしまい、trans.deg$K = \dim Y = 1$ に反するので、x は超越数、$k[x]$ は多項式環となる。

(a) より $A(Y)$ は整閉なので、$k[x] \subseteq A(Y)$ から $\overline{k[x]} \subseteq A(Y)$ が得られる。ここで、$\overline{k[x]}$ は K における $k[x]$ の整閉包である。一方、$y^2 = x^3 - x \in k[x]$ より $y \in \overline{k[x]}$ なので、$x \in \overline{k[x]}$ とあわせると $A(Y) \subseteq \overline{k[x]}$ が成り立つ ([1], Corollary 5.3)。

従って、$A(Y) = \overline{k[x]}$ となり、$A(Y)$ は K において $k[x]$ 上整閉包である。

(c) $A(Y)$ の元は $a = a_1 + ya_2,\ a_1, a_2 \in k[x]$ の形にかける。

$$N(a) = a\sigma(a) = (a_1 + ya_2)(a_1 - ya_2) = a_1^2 - (x^3 - x)a_2^2 \in k[x]$$

(a) で示したように $k[x]$ は多項式環であり、UFD である。このとき $N(1) = 1$ であり、

$$N(ab) = ab\sigma(ab) = (a_1^2 - (x^3 - x)a_2^2)(b_1^2 - (x^3 - x)b_2^2) = N(a)N(b)$$

となることがわかる。なお、$N(a) = a_1^2 - (x^3 - x)a_2^2$ は x の 1 次式にはなり得ない。実際 $\deg N(a) = \max\{2\deg a_1, 2\deg a_2 + 3\} \neq 1$ である ($\deg 0 = -\infty$)。

(d) $a = a_1 + ya_2$ を $A(Y)$ の unit とする。$k[x]$ は多項式環で単元は $k^\times := k - 0$ の元のみなので、$N(a)N(a^{-1}) = 1$ より $N(a) \in k^\times$ が得られる。

このとき $\deg N(a) = \max\{2\deg a_1, 2\deg a_2 + 3\} = 0$ となるのは $\deg a_2 = -\infty$ すなわち $a_2 = 0$ と $a_1^2 = N(a) \in k^\times$ である。よって、$a_1 \in k^\times$、$a = a_1 \in k^\times$ が得られる。逆に $a \in k^\times$ とすると当然 a は $A(Y)$ の unit である。従って、$A(Y) \ni a : unit \Leftrightarrow N(a) \in k^\times \Leftrightarrow a \in k^\times$ である。

$x = ab$ とする。このとき、両辺の norm を取ると $x^2 = N(a)N(b)$ となるが、(a) で述べたように norm は x の 1 次式にはなり得ない。よって、x^2 は $N(a), N(b)$ のいずれか一方に含まれ、残りは単元となる。その残りを $N(a)$ とすると、既に述べたように a が unit となるので、x は既約である。

$y = ab$ とする。両辺の norm を取ると $y^2 = N(a)N(b)$、よって $x^3 - x = x(x-1)(x+1) = N(a)N(b)$ となるが、norm は x の 1 次式にはなり得ないので、

$x^3 - x$ は $N(a), N(b)$ のいずれか一方に含まれ、残りは単元となる。よって x の場合と同様、y は既約となる。同様に $x-1, x+1$ も既約である。

$A(Y)$ の元 $y^2 = x(x-1)(x+1)$ は 2 通りの既約分解を持つので、$A(Y)$ は UFD ではない。

(e) もし Y と $\mathbf{P}^1$ が isomorphic とすると、Proposition 3.5 より $A(Y)$ と $\mathcal{O}(\mathbf{P}^1)$ が環同型となる。しかし、Theorem 3.4 (a) より $\mathcal{O}(\mathbf{P}^1) \approx k$ であり、$A(Y) \supseteq k[x]$ なので、これらは環同型ではあり得ない。よって Y と $\mathbf{P}^1$ は isomorphic ではない。

(a) で Y が nonsingular であることは示したので、もし Y が rational curve ならば Exercise 6.1(c) より $A(Y)$ は UFD である。しかし、(d) で UFD でないことを示したので、Y は rational curve ではない。

1.6.3

(a) 次元 2 以上の abstract nonsingular variety は未定義だが、Theorem 6.9 が成立すると仮定し、X は quasi-projective variety として反例を作る。

$$\varphi : \mathbf{A}^2 - P \to \mathbf{P}^1, (x, y) \mapsto (x, y),\ P = (0, 0)$$

は morphism である。実際 $\varphi^{-1} f^{-1}(0) = (f\varphi)^{-1}(0)$ より φ は連続だし、g を $\mathbf{P}^1$ の regular function とすると $g\varphi$ も regular function である。

φ を拡張できたとしよう。

$$\overline{\varphi} : \mathbf{A}^2 \to \mathbf{P}^1$$

$\overline{\varphi}(P) = (a, b) \in \mathbf{P}^1$ とおく。$Q = (c, d) \neq (a, b)$ とすると $Q = Z_p(dx - cy)$ は閉集合である。このとき $\varphi^{-1}(Q) = Z_a(dx - cy) - P$ であるが、これは閉集合ではない。もし、閉集合だとすると $Z_a(dx - cy) = (Z_a(dx - cy) - P) \cup \{P\}$ は既約でなくなるが、$dx - cy$ が既約であることに反する。従って φ を拡張できない。

(b)

$$\varphi : \mathbf{P}^1 - P \to \mathbf{A}^1, (x, y) \mapsto y/x,\ P = (0, 1)$$

は morphism であるが ($x \circ \varphi = \varphi$ は regular function)、

$$\overline{\varphi} : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{A}^1$$

と拡張できたとしよう。すると $\overline{\varphi}$ は $\mathbf{P}^1$ の regular function である。Theorem 3.4(a) よりそれは定数関数だが、φ が定数関数ではないので、矛盾する。従って φ を拡張できない。

1.6.4

$f \in K(Y)$ は rational function なので $f = g/h : U \to k$ であるが、k を P^1 とみなすと morphism $x \in U \mapsto (g(x), h(x)) \in \mathrm{P}^1$ が得られる。Y において閉集合 U^c は有限個の点からなるので、その morphism を拡張した morphism $\varphi : Y \to \mathrm{P}^1$ が得られる (Proposition 6.8)。

$\varphi(Y)$ は dominant である。もし、$\overline{\varphi(Y)} \neq \mathrm{P}^1$ とすると、閉集合 $\overline{\varphi(Y)}$ は有限集合、従って $\varphi(Y)$ も有限集合である。$\varphi(Y) = \{P_1, \cdots, P_n\}$ とすると $Y = \cup_i \varphi^{-1}(P_i)$ の既約性から $\varphi(Y) = P_i, \exists i$、すなわち constant になる。

Exercise 3.3 から任意の $P \in Y$ に対して $\varphi_P^* : \mathcal{O}_{\varphi(P),\mathrm{P}^1} \hookrightarrow \mathcal{O}_{P,Y}$ は単射なので、$\varphi^* : K(\mathrm{P}^1) \hookrightarrow K(Y)$ と拡張できる。この拡張は P によらない。実際、$< U, f > \in \mathcal{O}_{\varphi(P)} \cap \mathcal{O}_{\varphi(P')}$ に対して $\varphi_P^*(f) = f\varphi = \varphi_{P'}^*(f)$ である。

$\forall Q \in \mathrm{P}^1$ に対し $\mathcal{O}_{Q,\mathrm{P}^1} \subseteq K(\mathrm{P}^1)$ は DVR、かつ次元 1 のネーター局所整域なので Theorem 6.2A より整閉であり、Dedekind 整域である。B を $K(Y)$ における $\varphi^*(\mathcal{O}_{Q,\mathrm{P}^1})$ の整閉包とおくと、Theorem 6.3A よりそれも Dedekind 整域である。よってその極大 ideal による局所化 R は DVR である。すると Theorem 6.9 の証明に示されているように、$R = \mathcal{O}_{P,Y}, \exists P \in Y$ なので、

$$\varphi^*(\mathcal{O}_{Q,\mathrm{P}^1}) \subseteq B \subseteq R = \mathcal{O}_{P,Y}$$

となる。

局所環 $\mathcal{O}_{P,Y}, \mathcal{O}_{Q,\mathrm{P}^1}$ の極大 ideal をそれぞれ $\mathfrak{m}_P, \mathfrak{m}_Q$ とおく。R は B の極大 ideal による局所化なので、$\mathfrak{m}_P$ は B の極大 ideal とみなせる。B は $\varphi^*(\mathcal{O}_{Q,\mathrm{P}^1})$ の整閉包なので、[1], Corollary 5.8 より $\mathfrak{m}_Q = \mathfrak{m}_P^c = \varphi^{*-1}(\mathfrak{m}_P)$ である (Corollary 5.8 は $A \hookrightarrow B$ の場合でも成り立つ)。

このとき $\varphi(P) = Q$ が成立することを示す。$\varphi(P) = Q' \neq Q$ と仮定する。$f \in \mathcal{O}_{Q,\mathrm{P}^1}$ を $f(Q) = 0, f(Q') \neq 0$ を満たすように選ぶ。例えば、$q_i \neq q_i', \exists i$ として $f = y_i - q_i$ とおけばよい。ここで、Q, Q' の座標表示を $Q = (q_1, \ldots, q_n), Q' = (q_1', \ldots, q_n')$ とした。

さて、

$$f(Q) = 0 \Leftrightarrow f \in \mathfrak{m}_Q \Rightarrow \varphi^*(f) \in \varphi^*(\mathfrak{m}_Q) = \varphi^*(\varphi^{*-1}(\mathfrak{m}_P)) \subseteq \mathfrak{m}_P \Rightarrow \varphi^*(f)(P) = 0$$

となるが、これは $\varphi^*(f)(P) = f\varphi(P) = f(Q') \neq 0$ に矛盾する。よって $\varphi(P) = Q$ であり、φ は全射である。

[φ の全射性の別解] 一般に projective variety X から variety Y への morphism $X \to Y$ は閉写像である ([3], Corollary 4.5)。

この結果を用いると $\varphi(Y)$ は閉集合である。1 次元 variety の閉集合は有限集合か variety 全体なので、もし有限集合 $\{P_1, \cdots, P_n\}$ とすると $Y = \cup_i \varphi^{-1}(P_i)$ の既約性から $\varphi(Y) = P_i, \exists i$、すなわち constant になる。従って、$\varphi(Y)$ は全体であり、φ は全射となる。

$P \in \mathrm{P}^1$ に対して $\varphi^{-1}(P)$ は閉集合なので、有限集合か Y である。φ は non-constant なので Y ではない。よって、$\varphi^{-1}(P)$ は有限集合となる。

1.6.5

Y は単に variety だが、projective としてよい。X は Y の subvariety なので quasi-projective variety であり (Exercise 3.10)、$\overline{X}$ は Y において projective variety となる。Proposition 6.7 から $\overline{X}$ は abstract nonsingular curve であり、Proposition 6.8 から恒等写像 $i_X : X \to X$ は $\widetilde{i_X} : \overline{X} \to X$ に一意的に拡張できる。これは $\widetilde{i_X} : \overline{X} \to \overline{X}$ とみても morphism であり、$i_X : X \to X \subseteq \overline{X}$ とみなす

と $\widetilde{i_X}$ は i_X の拡張になっている。一方 $i_{\overline{X}}:\overline{X}\to\overline{X}$ も i_X の拡張である。もし、$\overline{X}\neq X$ と仮定すると、$i_{\overline{X}}(\overline{X})\not\subseteq X$ だが $\widetilde{i_X}(\overline{X})\subseteq X$ なので、これらは等しくない。これは拡張の一意性に反する。

1.6.6

(a) P^1 を $\mathrm{A}^1\cup\infty$ とみなす。

$$\varphi:\mathrm{P}^1\to\mathrm{P}^1, x\mapsto(ax+b)/(cx+d)$$

[単射性] $(ax+b)/(cx+d)=(ay+b)/(cy+d)$ なら $(ad-bc)(x-y)=0$ より $x=y$ である。

[全射性] $y\in\mathrm{P}^1$ に対し、$y=\infty$ なら $\varphi(-d/c)=\infty$、その他は $\varphi((a-cy)/(dy-b))=y$ より全射である。なお、$\varphi^{-1}(y)=(a-cy)/(dy-b)$ より φ^{-1} も fractional linear transformation である。

[morphism 性] morphism の定義は局所的なので $\varphi:\mathrm{P}^1\to U_i\approx\mathrm{A}^1$ としてよい。すると、$x\circ\varphi(x)=(ax+b)/(cx+d)$ は regular function なので、φ は morphism であり、同様に φ^{-1} も morphism である。

従って PGL(1)$\to$Aut $\mathbf{P}^1$ となる。

(b) Aut $\mathbf{P}^1$ の自己 isomorphism は dominant である。すると、Corollary 6.12(i)$\Leftrightarrow$(iii) より $K(\mathbf{P}^1)$ の自己 k-homomorphism が存在する。ここで、$K(\mathbf{P}^1)=S_{((0))}=k(x)$ なので、Aut $\mathbf{P}^1\to$ Aut $k(x)$ である。

(c) σ を $k(x)$ の automorphism とする。$\sigma(x)=f(x)/g(x)\in k(x)$ とかけるので、$f(x)-\sigma(x)g(x)=0$ となる。ここで、$f(x),g(x)$ は互いに素としてよい。

変数 X の多項式 $f(X)-\sigma(x)g(X)$ において、$\alpha:=\sigma(x)$ は X と独立である。また、automorphism σ によって、x と α が対応しているので、$k[x]\approx k[\alpha]$ であり、α は $k[\alpha]$ で変数とみなせる。

このとき、

$$F(X)_\alpha:=f(X)-\alpha g(X)\in k[\alpha][X]$$

は $k(\alpha)[X]$ において既約である。

($\because$) もし $f(X)-\alpha g(X)=\beta(X,\alpha)\cdot\gamma(X,\alpha)$ と分解できたとする。このとき $\beta(X,\alpha),\gamma(X,\alpha)\in k[\alpha][X]$ とできる ([2], 第 3 章定理 16)。この等式は α の 1 次式なので $f(X)-\alpha g(X)=\beta(X)\cdot\gamma(X,\alpha)$ としてよい。X は α と独立、従って $f(X),g(X)$ も α と独立であり、α は任意の値を取り得るので、$f(X),g(X)$ は $\beta(X)$ で割り切れる。$f(X),g(X)$ の仮定から $\beta(X)$ は定数、従って $f(X)-\alpha g(X)$ は $k(\alpha)[X]$ において既約、$F(X)_\alpha$ は $X=x$ の最小多項式となる。

$k(x)\approx k(\alpha)$ なので $x=G(\alpha)/H(\alpha)$ となる多項式 G,H が存在する。このとき $k[\alpha][X]$ における多項式 $H(\alpha)X-G(\alpha)$ は $X=x$ を根に持つ。$k(\alpha)[X]$ はユークリッド整域なので、

$$H(\alpha)X-G(\alpha)=F(X)_\alpha L(X,\alpha)$$

とかける。ここで、$L(X,\alpha)\in k[\alpha][X]$ とできる ([2], 第 3 章定理 16)。この等式の左辺は $k[\alpha][X]$ において X の 1 次式なので $\deg F(X)_\alpha\leq 1$ であるが、も

し、$\deg_X F(X)_\alpha = \deg_X(f(X) - \alpha g(X)) = 0$ とすると $f(X), g(X) \in k$ となり、$\mathrm{im}\,\sigma \subseteq k$ より σ は全射でなくなる。($\because$ 終)

よって、$\deg F(X)_\alpha = \deg_X(f(X) - \alpha g(X)) = 1 \Rightarrow \deg f(X), \deg g(X) \leq 1$ であり、結局

$$\sigma(x) = f(x)/g(x) = (ax+b)/(cx+d)$$

から Aut $k(x) \to$PGL(1) となる。

(a), (b) の結果と合わせると、PGL(1)$\to$Aut $\mathbf{P}^1 \to$ Aut $k(x) \to$PLG(1) となり、全て同型である。従って、PGL(1)$\approx$Aut $\mathbf{P}^1$ が得られる。

1.6.7

$U = \mathbf{A}^1 - \{P_1, \cdots, P_r\} \subseteq \mathbf{A}^1,\ V = \mathbf{A}^1 - \{Q_1, \cdots, Q_s\} \subseteq \mathbf{A}^1$ とおく。これらは $\mathbf{P}^1$ の部分集合とみなすことができ、そのとき $U = \mathbf{P}^1 - \{P_1, \cdots, P_r, \infty\} \subseteq \mathbf{P}^1,\ V = \mathbf{P}^1 - \{Q_1, \cdots, Q_s, \infty\} \subseteq \mathbf{P}^1$ である。

$\varphi : U \to V$ が isomorphism とする。$\varphi : U \to \mathbf{P}^1$ とみなせるので、Proposition 6.8 より φ は $\overline{\varphi} : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ に拡張できる。同様に、$\psi = \varphi^{-1} : V \to U$ も $\overline{\psi} : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ へ拡張できる。

$\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}|_U = id_U$ なので、$\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}$ は $id_{\mathbf{P}^1}$ と共に $id_U : U \to U \subseteq \mathbf{P}^1$ の拡張になっている。拡張の一意性から $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi} = id_{\mathbf{P}^1}$ が得られ (Proposition 6.8)、同様に $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi} = id_{\mathbf{P}^1}$ なので、$\overline{\varphi}$ は isomorphism である。

$\overline{\varphi} : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ は全単射であり、やはり全単射の $\varphi : \mathbf{P}^1 - \{P_1, \cdots, P_r, \infty\} \to \mathbf{P}^1 - \{Q_1, \cdots, Q_s, \infty\}$ の拡張になっているので、$\overline{\varphi}(\{P_1, \cdots, P_r, \infty\}) = \{Q_1, \cdots, Q_s, \infty\}$ のはずである。従って $r = s$ となる。

任意の P_i, Q_j(∞ であってもよい) に対して $\mathbf{A}^1 - \{P_1, \cdots, P_r\} \approx \mathbf{A}^1 - \{Q_1, \cdots, Q_r\}$ となるためには、$r \leq 3$ でなければならない。なぜなら、Exercise 6.6 より Aut $\mathbf{P}^1$ は PGL(1) なので $\overline{\varphi} : x \mapsto (ax+b)/(cx+d)$ の形に限られるが、

$$(aP_1 + b)/(cP_1 + d) = Q_1, \cdots, (aP_r + b)/(cP_r + d) = Q_r$$

は $r = 3$ までなら成立するように a, b, c, d を決定できるが、それ以上はできないからである ((a, b, c, d) は定数倍しても写像は同じなので、実質 3 変数である)。

References

[1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald: Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, 1963

[2] 松坂: 代数系入門, 岩波書店, 1976

[3] A. Bertram: Algebraic Geometry, Math 6130, https://www.math.utah.edu/ bertram/6130/Varieties.pdf, 2016