1 Varieties

1.5 Nonsingulara Varieties

1.5.1

char$(k) \neq 2$ とする。本のグラフは $k = \mathbb{R}$ として描かれている。hypersurface $Y = Z(f)$ では $r = \dim Y = n - 1$ だから (Proposition 1.13)、singular point は rank$J < n - r = 1$、すなわち $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \forall i$ で与えられる。

以下 (a)〜(d) は全て既約である。従って $f = 0$ は曲線である。nonsingular point はいずれの場合も (0, 0) のみである。

(a) $f = x^2 - x^4 - y^4$ のグラフは Tacnode である。

(b) $f = xy - x^6 - y^6$ のグラフは Node である。

(c) $f = x^3 - y^2 - x^4 - y^4$ のグラフは Cusp である。

(d) $f = x^2y + xy^2 - x^4 - y^4$ のグラフは Triple Point である。

1.5.2

以下 (a)〜(c) は全て既約である。

(a) $f = xy^2 - z^2$ に対しては Sing$Y = Z(y, z)$ で、これは x 軸である。グラフは Pinch Point である。

(b) $f = x^2 + y^2 - z^2$ に対しては Sing$Y = (0, 0)$ である。グラフは Conical double point である。

(c) $f = xy + x^3 + y^3$ に対しては Sing$Y = Z(x, y)$ で、これは z 軸である。グラフは Double line である。

1.5.3

$f(a, b) = 0$ とする。$x' = x - a, y' = y - b$ とおき、f を x', y' の関数とみなせば $(0, 0)$ で 0 となる。

(a) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \neq 0, \exists i \neq 0 \Leftrightarrow$ rank$J = 1$ より $\mu_P(Y) = 1 \Leftrightarrow P$: nonsingular point of Y

(b) Exercise 5.1 の各 curve の multiplicities は次の通り。
$\mu_{(0,0)}(Z(x^2-x^4-y^4))=2$
$\mu_{(0,0)}(Z(xy-x^6-y^6))=2$
$\mu_{(0,0)}(Z(y^2-x^3-x^4-y^4))=2$
$\mu_{(0,0)}(Z(x^2y-xy^2-x^4-y^4))=3$

[補足] $\mu_P(Y)$ は affine 上で定義されているが、projective 上でも定義できる。これは $\mathcal{O}_P$ において

$$\mu_P(Y)=\dim_k \mathfrak{m}_P^n/\mathfrak{m}_P^{n+1}, \forall n \geq \mu_P(Y) \tag{1}$$

が成立することによる ([2], 5 章 5.1 and 3 章 Theorem 2)。これは次のようにして示すこともできる。$m=\mu_P(Y)$ とおくと、k 上ベクトル空間として $\mathfrak{m}_P^{m-1}/\mathfrak{m}_P^m$ の基底は $\{x^iy^j|i+j=m-1\}$ なので次元は m であるが、$\mathfrak{m}_P^{m+r}/\mathfrak{m}_P^{m+r+1}$ では独立な式 $x^iy^jf_m=0 \mod \mathfrak{m}_P^{m+r+1}$, $i+j=r$ が存在するので、次元は $m+r+1-(r+1)=m$ で同じである ($n=\mu_P(Y)-1$ でも成り立つとみられる)。

Projective variety における $\mathcal{O}_P$ は U_i 上に移しても同型なので (Exercise 3.17 の証明の最初)、projective でも式 (1) で与えられる。これは $\mu_P(Y)$ がどの U_i に移しても同じことを示しており、i によらず一定である。

1.5.4

(a) $\mathcal{O}_P=\mathcal{O}_{P,\mathbf{A}^2}$ と解釈し、$Y=Z(f), Z=Z(g)$ とする。
$\mathcal{O}_P$ において、height$f=1$ だから ([1], Corollary 11.17)、$\dim\mathcal{O}_P=\dim\mathbf{A}^2=2$ なので (Theorem 3.2(c))、$\dim\mathcal{O}_P/(f)=\dim\mathcal{O}_P-\mathrm{height}(f)=1$ である。
すると、$\mathcal{O}_P/(f,g)=(\mathcal{O}_P/(f))/((f,g)/(f))$ より

$$\dim\mathcal{O}_P/(f,g)=\dim\mathcal{O}_P/(f)-\mathrm{height}(f,g)/(f)=\dim\mathcal{O}_P/(f)-\mathrm{height}(g)=0$$

となる。従って、$\mathcal{O}_P/(f,g)$ はアルティン局所環であり ([1], Theorem 8.5)、その $\mathcal{O}_P$ 加群としての長さ $(Y\cdot Z)_P=\mathrm{length}_{\mathcal{O}_P}\mathcal{O}_P/(f,g)$ は有限である ([1], Proposition 6.8) [1] 。

[1] $\mathrm{length}_{\mathcal{O}_P}\mathcal{O}_P/(f,g)=\dim_k\mathcal{O}_P/(f,g)$ を示す。
$R:=\mathcal{O}_P/(f,g)$ とすると、R はアルティン局所環なので

$$0=\mathfrak{m}_P^n\subsetneq\mathfrak{m}_P^{n-1}\subsetneq\cdots\subsetneq\mathfrak{m}_P\subsetneq\mathfrak{m}_P^0=R, \exists n>0$$

となる系列が存在する ([1], Proposition 8.6)。
$\mathfrak{m}_P^j/\mathfrak{m}_P^{j+1}$ を k ベクトル空間とみなすと、$R/\mathfrak{m}_P=k$ より

$$\dim_k R \underset{(i)}{=\!=} \sum_{j=0}^{n-1}\dim_k\mathfrak{m}_P^j/\mathfrak{m}_P^{j+1}=\sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{length}_k\mathfrak{m}_P^j/\mathfrak{m}_P^{j+1}=\sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{length}_{R/\mathfrak{m}_P}\mathfrak{m}_P^j/\mathfrak{m}_P^{j+1}$$

$$\underset{(ii)}{=\!=}\sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{length}_R\mathfrak{m}_P^j/\mathfrak{m}_P^{j+1}=\mathrm{length}_R R\underset{(iii)}{=\!=}\mathrm{length}_{\mathcal{O}_P}\mathcal{O}_P/(f,g)$$

等号 (i) の理由: $\mathfrak{m}_P^j/\mathfrak{m}_P^{j+1}=(\mathfrak{m}_P^j/\mathfrak{m}_P^{j+t})/(\mathfrak{m}_P^{j+1}/\mathfrak{m}_P^{j+t})\Rightarrow\dim_k\mathfrak{m}_P^j/\mathfrak{m}_P^{j+t}=\dim_k\mathfrak{m}_P^j/\mathfrak{m}_P^{j+1}+\dim_k\mathfrak{m}_P^{j+1}/\mathfrak{m}_P^{j+t}$
等号 (ii,iii) の理由: $\bar{b}\cdot\bar{x}=\overline{bx}=b\bar{x}$

$(Y\cdot Z)_P \geq \mu_P(Y)\cdot\mu_P(Z)$ の証明 ([2], 3 章 Theorem 3 より、一部改変)

P を一般性を失うことなく $P=(0,0)$ としてよい。$m=\mu_P(Y), n=\mu_P(Z)$ とおき、$\mathfrak{m}=(x,y)\subseteq k[x,y]$ とする。

k 上ベクトル空間としての系列

$$k[x,y]/\mathfrak{m}^n \times k[x,y]/\mathfrak{m}^m \xrightarrow{\psi} k[x,y]/\mathfrak{m}^{m+n} \xrightarrow{\varphi} k[x,y]/(\mathfrak{m}^{m+n},f,g) \to 0$$

を考える。ここで、$\psi(\tilde{a}\times\tilde{b}) := \widetilde{af+bg}$ とする。φ は標準的全射なので、$\ker\varphi = (\mathfrak{m}^{m+n},f,g)/\mathfrak{m}^{m+n}$ であり、また $\mathrm{Im}\psi = \widetilde{(f,g)} = (\mathfrak{m}^{m+n},f,g)/\mathfrak{m}^{m+n}$ となるから、この系列は完全である。さらに準同型定理から

$$(k[x,y]/\mathfrak{m}^{m+n})/\ker\varphi = k[x,y]/(\mathfrak{m}^{m+n},f,g)$$

が得られる。

さて、$\mathfrak{m}$ による完備化をとると $\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}^{m+n} \approx \widehat{\mathcal{O}_P}/\widehat{\mathfrak{m}}^{m+n}$ となる ([1], Proposition 10.15 の証明中)。

ここで $\widehat{\mathcal{O}_P} = \widehat{k[x,y]_\mathfrak{m}} = \widehat{k[x,y]}$ が成立することを示す。$A=k[x,y]$ とすると、$A/\mathfrak{m}^n$ において $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$ に属さない元は $h=1-h_1, h_1\in\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$ としてよいので

$$h(1+h_1+h_1^2+\cdots+h_1^{n-1}) = (1-h_1)(1+h_1+h_1^2+\cdots+h_1^{n-1}) = 1-h_1^n = 1$$

から $A/\mathfrak{m}^n$ の単元となり、$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$ は唯一の極大 ideal となる。従って、$A/\mathfrak{m}^n$ は局所環であり、$(A/\mathfrak{m}^n)_{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n} = A/\mathfrak{m}^n$ が成り立つ。また、$(A/\mathfrak{m}^n)_{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n} = A_\mathfrak{m}/{\mathfrak{m}_\mathfrak{m}}^n$ なので、$A_\mathfrak{m}/{\mathfrak{m}_\mathfrak{m}}^n = A/\mathfrak{m}^n$ であり、その逆極限をとると $\widehat{A_\mathfrak{m}} = \hat{A}$ を得る。

従って、

$$\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}^{m+n} \approx \widehat{\mathcal{O}_P}/\widehat{\mathfrak{m}}^{m+n} = \widehat{k[x,y]}/\widehat{\mathfrak{m}}^{m+n} \approx k[x,y]/\mathfrak{m}^{m+n}$$

となる。よって、

$$\mathcal{O}_P/(\mathfrak{m}^{m+n},f,g) = (\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}^{m+n})/((\mathfrak{m}^{m+n},f,g)/\mathfrak{m}^{m+n})$$

$$\approx (k[x,y]/\mathfrak{m}^{m+n})/((\mathfrak{m}^{m+n},f,g)/\mathfrak{m}^{m+n}) = k[x,y]/(\mathfrak{m}^{m+n},f,g)$$

が成り立つ。

以上により

$$\dim_k k[x,y]/\mathfrak{m}^m + \dim_k k[x,y]/\mathfrak{m}^n \geq \dim_k \ker\varphi$$

$$\dim_k \ker\varphi = \dim_k(k[x,y]/\mathfrak{m}^{m+n}) - \dim_k(k[x,y]/(\mathfrak{m}^{m+n},f,g))$$

を得る。従って、

$$(Y\cdot Z)_P = \dim_k \mathcal{O}_P/(f,g) \geq \dim_k \mathcal{O}_P/(\mathfrak{m}^{m+n},f,g)$$

$$= \dim_k k[x,y]/(\mathfrak{m}^{m+n},f,g) = \dim_k k[x,y]/\mathfrak{m}^{m+n} - \dim_k \ker\varphi$$

$$\geq \dim_k k[x,y]/\mathfrak{m}^{m+n} - \dim_k k[x,y]/\mathfrak{m}^m - \dim_k k[x,y]/\mathfrak{m}^n = mn \tag{2}$$

となる。

ここで、最後の等号は、k 上ベクトル空間として $k[x,y]/\mathfrak{m}^i$ の基底は $k[x,y]/\mathfrak{m}^{i-1}$ の基底に $x^jy^{i-j-1}, 0\leq j\leq i-1$ を追加すれば得られるので、$\dim_k k[x,y]/\mathfrak{m}^i = i(i+1)/2$ となることによる。

(b) $P=(0,0)$ としてよい。$Y=Z(f),\mu_P(Y)=m,f(x,y)=f_m(x,y)+f_{m+1}(x,y)+\cdots$ とし、$L=Z(\ell)$ を P を通る直線とする。このとき $\ell|f_m$ となるケースは有限なのでそれ以外とし、$\ell=cx+dy$ とおく。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

において、ℓ を y' に、f_m に x'^m が現れるように a,b を決めることができる ($|k|=\infty$ より)。以下、この条件下で進める。

$g(x)=f(x,0)$ とすると

$$\mathcal{O}_{P,\mathbf{A}^2}/(f,y) \approx \mathcal{O}_{0,\mathbf{A}^1}/(g)$$

が成り立つ。

ここで、局所環 $\mathcal{O}_0$ では $g=x^m(x-a_1)\cdots(x-a_{d-m}),\ a_i\neq 0$ と書け、$(x-a_i)$ は単元なので、$(g)=(x)^m$ である (正確には $(g)\mathcal{O}_0=(x)^m\mathcal{O}_0$)。従って、

$$\mathcal{O}_{P,\mathbf{A}^2}/(f,y) \approx \mathcal{O}_{0,\mathbf{A}^1}/(g) = \mathcal{O}_{0,\mathbf{A}^1}/(x)^m$$

であり、

$$\dim_k \mathcal{O}_{P,\mathbf{A}^2}/(f,y) = \dim_k \mathcal{O}_{0,\mathbf{A}^1}/(x)^m = m = \mu_P(Y)$$

が得られる。

(c) $P\in Y=Z(f)$ とする。P の z 成分は非零と仮定してよいので、$\mathbf{P}^2\cap U_z\approx\mathbf{A}^2$ で考える。$f(x,y,z)$ の既約性から z を含まない項をもつので、$f(x,y,1)$ は d 次式である。それを簡単のため $f(x,y)$ とおく。(b) と同じように 1 次変換して、$L=Z(y),f(x,y)=f_1(x)+yf_2(x,y),\deg f_1=d$ とおける。

さて、$\dim L\cap Y=0$ から、$L\cap Y$ の点は有限個で $(a,0)$ の形をしていて、$f_1(a)=0$ を満たす。その一つを $P=(a,0)$ とすると、

$$(L\cdot Y)_P = \mathrm{length}\mathcal{O}_P/(y,f(x,y)) = \mathrm{length}\mathcal{O}_{a,\mathrm{A}^1}/(f_1) = \mu_a(Z(f_1))$$

これは f_1 における解 $x=a$ の重複度である。従って、$L\cap Y$ のすべての点の和を取れば、$f_1=0$ の解の個数を重複度を加味してカウントすることになり、d に等しいので、

$$(L\cdot Y) = \sum_{P\in L\cap Y}(L\cdot Y)_P = d$$

が得られる。

1.5.5

$p=0$ または $p\not|d$ の場合:

$$f(x,y,z)=x^d+y^d+z^d$$

とおくと、$\forall P=(a,b,c)\in Y=Z(f)\subseteq\mathbf{P}^2$ に対して

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P)=da^{d-1},\frac{\partial f}{\partial y}(P)=db^{d-1},\frac{\partial f}{\partial z}(P)=dc^{d-1}$$

のいずれかは非零である。従って、後出 Exercise 5.9 から Y は nonsingular で、f は既約である。

$p|d$ の場合:

p は素数なので、$d \geq 2$ である。

$$f(x,y,z) = x^d + y^{d-1}z + z^{d-1}x$$

とすると、$\forall P = (a,b,c) \in Y = Z(f)$ に対して

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = c^{d-1}, \frac{\partial f}{\partial y}(P) = -b^{d-2}c, \frac{\partial f}{\partial z}(P) = b^{d-1} - ac^{d-2}$$

のいずれかは非零である。従って、この場合も同様、後出 Exercise 5.9 から Y は nonsingular で f は既約である。

1.5.6

(a) Cusp: $y^2 - x^3 + x^4 + y^4 = 0$

$O = (0,0)$ における blowing-up を行う。

$u \neq 0$ の場合 $\tilde{Y}_t = Z(1 - t^3y + t^4y^2 + y^2, x - ty)$ が得られる。$\tilde{Y}_t$ での singular point は

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -t^3 + 2(1+t^4)y & -3t^2y + 4t^3y^2 \\ 1 & t & y \end{pmatrix}$$

の rank が 1 となる点として得られる。ここで、$f_t = 1 - t^3y + t^4y^2 + y^2$ には x が現れないこと、J の 1 列は $(0,1)^T$ の形をしていることから、rank$J = 1$ となるためには J の (1, 0) 余因子の rank が 0 となること、すなわち f_t のみを y, t の多項式として特異性を見ればよいことがわかる。これは一般に言えることである。よって、

$$\frac{\partial f_t}{\partial y} = -t^3 + 2(1+t^4)y = 0,\ \frac{\partial f_t}{\partial t} = -3t^2y + 4t^3y^2 = 0, f_t = 1 - t^3y + t^4y^2 + y^2 = 0$$

の解が singular point であるが、これらを満たす解は存在しない。

$t \neq 0$ の場合、$\tilde{Y} = Z(u^2 - x + x^2 + u^4x^2, y - ux)$ となる。このとき、

$$\frac{\partial f_u}{\partial x} = -1 + 2x(1+u^4) = 0,\ \frac{\partial f_u}{\partial u} = 2u + 4u^3x = 0, f_u = u^2 - x + x^2 + u^4x^2 = 0$$

も解が存在しないので、この場合も nonsingular である。

従って、Cusp の $O = (0,0)$ における blowing up は nonsingular である。

Node: $x^6 + y^6 - xy = 0$

$tx = uy$ として blowing up する。

$t \neq 0$ の場合、$\tilde{Y}_u = Z(x^4(1+u^6) - u, y - ux)$ となる。このとき

$$f_u = x^4(1+u^6) - u = 0, \frac{\partial f_u}{\partial x} = 4x^3(1+u^6) = 0,\ \frac{\partial f_u}{\partial u} = 6x^4u^5 - 1 = 0$$

に解は存在しない。

$u \neq 0$ の場合は、 $x^6 + y^6 - xy$ が x と y が対称なので、$t \neq 0$ の場合に帰着される。よって、Node の blowing up は nonsingular である。

(b) $P=(0,0)$ としてよい。Plane curve を与える式 f の 2 次部分は $f_2=(ax+by)(cx+dy)$ と 1 次式分解できるが、この 2 つの直線は並行でないので、$f_2=xy$ とできる。

$tx=uy$ として blowing up する。$t\neq 0$ の場合、blowing-up は

$$\tilde{Y}=Z(u+g_3(u)x+g_4(u)x^2+\cdots,y=ux)$$

となる。$(x,y)=(0,0)$ を満たす (x,y,t,u) は $Q_u=(0,0,1,0)$ であり、これは $\tilde{Y}$ において nonsingular である。同様に、$u\neq 0$ の場合は $(x,y,t,u)=(0,0,0,1)$ なる。

従って、$\varphi^{-1}(P)=\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ で、両点とも nonsingular である。

(c) Tacnode: $x^2-x^4-y^4=0$

Singular point は $P=(0,0)$ である。その点で blowing up する。$t\neq 0$ では $\tilde{Y}=Z(1-x^2-u^4x^2,y-ux)$ であるが、$(x,y)=(0,0)$ となる点は存在しない。

$u\neq 0$ では $\tilde{Y}=Z(t^2-t^4y^2-y^2,x-ty)$ であるが、$(x,y)=(0,0)$ を満たす (x,y,t,u) は $Q=(0,0,0,1)$ であり、この点が $\varphi^{-1}(P)$ となる。$t^2-t^4y^2-y^2$ の 2 次部分は $(t-y)(t+y)$ なので Q は node である。(b) で示したようにこれを blowing up すれば、Q に対応するのは二つの nonsingular な点となる。

(補足)　$\tilde{Y}=Z(t^2-t^4y^2-y^2,x-ty)$ を定義通りに blowing-up しても同じ結果になることを示そう。ここでは $u\neq 0$ の affine で考えているので、$Q=(0,0,0)$ である。

変数を付け替えて

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_3^2-x_3^4x_2^2-x_2^2,g(x_1,x_2,x_3)=x_1-x_3x_2$$

とし、$Y=Z(f,g)$ を $Q=(0,0,0)$ で $\mathbf{A}^3\times\mathbf{P}^2$ に blowing-up する。$(x_1,x_2,x_3)\times(y_1,y_2,y_3)\in\mathbf{A}^3\times\mathbf{P}^2$ とすると $\{x_iy_j=x_jy_i\}_{1\leq i,j\leq 3}$ である。

まず $y_1\neq 0,y_1=1$ のときは常に $\tilde{\varphi}^{-1}(Q)=\varnothing$ である。なぜなら blowing-up によって g から $g_1=1-x_1y_2y_3$ が得られるが、$x_1=0$ のとき $g_1\neq 0$ となるからである。

$y_2\neq 0,y_2=1$ のときは $x_1=y_1x_2,x_3=y_3x_2$ から、blowing-up として

$$f_2=y_3^2-x_2^4y_3^4-1,g_2=y_1-y_3x_2,h_2=x_1-y_1x_2,h_3=x_3-y_3x_2$$

を得る。

f_2 には x_1 は含まれておらず (偶然ではない)、従って y_1 も含まれていない。すなわち、Jacobian matrix は次の形になるが、

$$J=\begin{array}{c} \\ f_2\\ g_2\\ h_2\\ h_3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} x_2 & y_3 & y_1 & x_1 & x_3\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccccc} 4x_2^3y_3^4 & 2y_3-4x_2^4y_3^3 & 0 & 0 & 0\\ -y_3 & -x_2 & 1 & 0 & 0\\ -y_1 & 0 & -x_2 & 1 & 0\\ -y_3 & -x_2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\end{array}$$

g_2, h_2, h_3 は blowing-up に $a-bc$ の形で追加されるため、matrix はシンプルな形をしている。そのため、rank$J \neq 4$ と、1 行目の f_2 と x_3, y_3 に対応する成分が 0 となることは同値となる。結局 g_2, h_2, h_3 は最初から考慮する必要がなく、f のみから blowing-up していけばよいことになる。これは一般に言えることである。なお、与えられた問題では f_2 から $\tilde{\varphi}^{-1}(Q)$ として nonsingular な 2 点 $(0,0,0)\times(0,1,\pm 1)$ が得られる。

$y_3 \neq 0$ の場合も同様に進められる。ただし、この場合、与えられた問題では $\tilde{\varphi}^{-1}(Q) = \varnothing$ である。

(d) $y^3 = x^5$ において $P=(0,0)$ は 3 本の tangent line が重なっているタイプの triple point(multiplicity 3) である。

P で blowing-up し、$t=1$ とすると、$\tilde{Y} = Z(u^3 - x^2, y - ux)$ を得る。$Q = (x,y,t,u) = (0,0,1,0)$ は singular な double point(multiplicity が 2) であるが、2 次項が x^2 のみなので、tangent line が重なっているから node ではない。なお、$u=1$ では P に対応する点は存在しない。

さらに Q で blowing-up する。$f_u = u^3 - x^2$ に対して $u'u = x'x$ とおく。$x'=1$ とすると、$\widetilde{f_u} = u - u'^2$ となり、Q に対応する点は $(x,u,x',u') = (0,0,1,0)$ である。singular point は無い。$u' \neq 0$ のときは Q に対応する点は存在せず、singular point は無い。全体として blowing-up した $\tilde{\tilde{Y}}$ は nonsingular で、Q に対応する点は $(x,u,x',u') = (0,0,1,0)$ のみである。

1.5.7

(a) f を $\mathbf{A}^3$ 上の 2 次以上の斉次多項式とする。$P=(0,0,0)$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = \frac{\partial f}{\partial z}(P) = 0$$

となるから P は singular point である。

$Y \subseteq \mathbf{P}^2$ が nonsingular なので、後出 Exercise 5.8 から $\forall Q \neq (0,0,0)$ で

$$\frac{\partial f}{\partial x}(Q),\ \frac{\partial f}{\partial y}(Q),\ \frac{\partial f}{\partial z}(Q)$$

のいずれかは非零である。よって、$X = Z(f) \subseteq \mathbf{A}^3$ は P 以外で nonsingular である。

(b) $\varphi : \tilde{X} \to X$ を $P=(0,0,0)$ における blowing-up とする。$(s,t,u) \in \mathbf{P}^2$ において $s \neq 0 \to s=1$ の場合を考えて、f に $y=tx, z=ux$ を代入すると $f(x,tx,ux) = x^d f(1,t,u)$ が得られるので、

$$\widetilde{X_s} = Z(f(1,t,u), y-tx, z-ux)$$

となる。

一般に Y が projective の場合に、P が nonsingular であることは (P の x_i 成分が非零として)、affine $Y_i = Y \cap U_i,\ (U_i := Z(x_i)^c)$ で P が nonsingular なことと同値である。なぜなら、$\mathcal{O}_{P,Y}$ における P の nonsingular 条件

$$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim \mathcal{O}_{P,Y},\ k \approx \mathcal{O}_{P,Y}/\mathfrak{m}$$

に対して、環として $\mathcal{O}_{P,Y} \approx \mathcal{O}_{P,Y_i}$ から、極大 ideal は極大 ideal に、剰余体は剰余体に対応するので、$\mathcal{O}_{P,Y_i}$ においても対応する等式が成り立つからである。よって、Jacobian matrix の条件が使える。

すると、$\widetilde{X_s}$ の singular point は

$$\frac{\partial f(1,t,u)}{\partial t} = 0, \frac{\partial f(1,t,u)}{\partial u} = 0, f(1,t,u) = 0 \tag{3}$$

の解である。

一方、(a) より X が nonsingular なので $X_x = Z(f(1,y,z)) = Z(f(x,y,z)) \cap U_x$ も nonsingular であり、従って式 (3) に共通解はない。すなわち $\widetilde{X_s}$ は nonsingular である。

$\widetilde{X_t}, \widetilde{X_u}$ も同様なので、$\tilde{X} = \widetilde{X_s} \cup \widetilde{X_t} \cup \widetilde{X_u}$ は nonsingular である。

(c) $\varphi^{-1}(P)$ を求める。(b) より、$s \neq 0$ の時の

$$\widetilde{X_s} = Z(f(1,t,u), y - tx, z - ux)$$

において $(x,y,z) = (0,0,0)$ とおくと、$\widetilde{X_s} = Z(f(1,t,u)) = Y \cap U_x = Y_x$ となる。同様に、$\widetilde{X_t} = Y_y, \widetilde{X_u} = Y_z$ なので、$\varphi^{-1}(P) = Y$ が得られる。

1.5.8

Proposition 2.2 証明の ψ_i, α, β を用いる。$I(Y) = (f_1, \cdots, f_t),\ P = (1, a_1, \cdots, a_n) \in Y_0 = Y \cap U_0,\ P' = (a_1, \cdots, a_n) \in Y' = \psi_0(Y_0)$ とする。f_i は斉次多項式である。

このとき、$I(Y') = (\alpha f_1, \cdots, \alpha f_t)$ である:

$g \in I(Y') \Rightarrow (\beta g)(\boldsymbol{x}) = x_0^{\deg g} g(x_1/x_0, \cdots, x_n/x_0) = x_0^{\deg g} g(\boldsymbol{y}) = 0, \forall \boldsymbol{x} \in Y_0, \boldsymbol{y} = \psi_0(\boldsymbol{x}) \in Y'$

$\Rightarrow \beta g \in I(Y_0) = I(\overline{Y_0}) = I(Y) \Rightarrow \beta g = \sum_{1 \le i \le t} h_i f_i$

$\Rightarrow g = \alpha\beta g = \sum_{1 \le i \le t} \alpha h_i \alpha f_i \in (\alpha f_1, \cdots, \alpha f_t)$

$\forall \boldsymbol{y} = (x_1/x_0, \cdots, x_n/x_0) \in Y', \boldsymbol{x} \in X_0 \Rightarrow \alpha f_i(\boldsymbol{y}) = f_i(1, y_1, \cdots, y_n) = x_0^{-\deg f_i} f_i(\boldsymbol{x}) = 0 \Rightarrow \alpha f_i \in I(Y')$

Euler' lemma: $\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} x_j = df,\ d = \deg f$ より $\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(P) a_j = 0$ なので、

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}(P)\right)_{1 \le i \le t} = -\sum_{1 \ge j \ge n} a_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right)_{1 \le i \le t}$$

が得られるが、これは

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right)_{1 \le i \le t, 0 \le j \le n} = \operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right)_{1 \le i \le t, 1 \le j \le n} = \operatorname{rank}\left(\frac{\partial \alpha f_i}{\partial x_j}(P')\right)_{1 \le i \le t, 1 \le j \le n} \tag{4}$$

を意味する。

ここで、$P = (\lambda a_0, \cdots, \lambda a_n), \lambda \neq 0$ としても rank の値は変わらない。なぜなら、$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ は $\deg f_j - 1$ の斉次多項式であるため、

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\lambda a_0, \cdots, \lambda a_n)\right)_{0 \le j \le n} = \lambda^{\deg f_i - 1}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_0, \cdots, a_n)\right)_{0 \le j \le n}$$

なので、$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right)_{1\le i\le t, 0\le j\le n}$ の小行列式の零、非零に影響を与えないからである。

さて、前問 (b) で示したように、$P \in Y_0 \subseteq Y \subseteq \mathbf{P}^n$ が nonsingular ということと、$P' \in Y_0 = Y \cap U_0$ が nonsingular ということは同じである。

従って、$P \in Y$ が nonsingular なら $P' \in Y'$ も nonsingular であり、式 (4) の最右辺 $= n - r$、よって最左辺 $= n - r$ となる。逆に最左辺 $= n - r$ なら最右辺 $= n - r$ となり、$P' \in Y'$ は nonsingular、よって $P \in Y$ は nonsingular である。

1.5.9

前提から $Y = Z(f)$ は nonsingular である。

$f = f_1 f_2,\ \deg f_1 \ge 1, \deg f_2 \ge 1,\ f_1$: 既約とする。Exercise 3.7(b) より、$\exists P \in Z(f_1) \cap Z(f_2) \ne \varnothing$ に対して、$f_1(P) = 0, f_2(P) = 0$ だから

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(P) f_2(P) + f_1(P) \frac{\partial f_2}{\partial x}(P) = 0$$

となる。他の変数に関しても同じ結果が得られるが、これは問題の前提に反する。よって、f は既約であり、従って $Z(f)$ は nonsingular variety である。

一般に変数の個数 r が 3 以上なら同様な条件で f は既約となる。その場合、$\mathbf{P}^{r-1}$ においてなら $Z(f)$ は nonsingular であるが、$\mathbf{P}^n, n \ge r$ だと singular point は存在する (例: Exercise 5.12)。

1.5.10

(a) X を variety とする。双対線形空間の次元は元の線形空間の次元に等しいので、

$$\dim T_P(X) = \dim_k (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^* = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \ge \dim \mathcal{O}_{P,X} = \dim X$$

である。最後の等式は Exercise 3.12 による。

不等式が等式になる条件は $\mathcal{O}_{P,X}$ が regular になること、すなわち P が nonsingular になることである。

(b) Exercise 3.3(a) より

$$\varphi_P^* : \mathcal{O}_{\varphi(P),Y} \to \mathcal{O}_{P,X}$$

は準同型である。

$Q = \varphi(P)$ に対して、$\mathfrak{m}_P$ を局所環 $\mathcal{O}_{P,X}$ の極大 ideal、$\mathfrak{m}_Q$ を局所環 $\mathcal{O}_{Q,Y}$ の極大 ideal とする。このとき、

$$\varphi_P^{*-1}(\mathfrak{m}_P) = \mathfrak{m}_Q$$

である。実際、$< U, f > \in \mathfrak{m}_Q \Leftrightarrow f\varphi(P) = 0 \Leftrightarrow < \varphi^{-1}(U), f\varphi > \in \mathfrak{m}_P \Leftrightarrow \varphi_P^*(< U, f >) \in \mathfrak{m}_P$ である。

よって、$\varphi_P^*(\mathfrak{m}_Q) = \varphi_P^*(\varphi_P^{*-1}(\mathfrak{m}_P)) \subseteq \mathfrak{m}_P$ であり、$\varphi_P^*(\mathfrak{m}_Q^2) \subseteq \mathfrak{m}_P^2$、準同型写像

$$\widetilde{\varphi_P^*} : \mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2 \to \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2,\ \tilde{f} \mapsto \widetilde{\varphi_P^*(f)}$$

が定義できる。

従って、線形空間の双対原理より、線形写像が得られる。

$$T_P(\varphi) = \widetilde{\varphi_P^*}^* : T_P(X) = (\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^* \to (\mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2)^* = T_{\varphi(P)}(Y)$$

(c) $X = Z(x - y^2) \subseteq \mathbf{A}^2, Y = Z(y) \subseteq \mathbf{A}^1$ に対し、

$$\varphi : X \to Y, (x, y) \mapsto x$$

とする。ここで、 $P = (0,0), Q = \varphi(P) = 0, \mathfrak{m}_P = (x, y), \mathfrak{m}_Q = (x)$ とおくと、$\mathcal{O}_{P,X} = A(X)_{\mathfrak{m}_P} = (k[x,y]/(x-y^2))_{\mathfrak{m}_P} = k[y]_{(y)},\ \mathcal{O}_{Q,Y} = A(Y)_{\mathfrak{m}_Q} = k[x]_{(x)}$ に対して、

$$\varphi_P^* : \mathcal{O}_{Q,Y} \to \mathcal{O}_{P,X},\ x \mapsto x \circ \varphi(x,y) = x = y^2$$

である。

これに対して、

$$\widetilde{\varphi_P^*} : \mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2 = (x)/(x)^2 \to \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = (x,y)/(x^2, xy, y^2) = (y)/(y)^2,\ \tilde{x} \mapsto \tilde{y}^2$$

となるが、$y^2 \equiv 0 \mod (y^2)$ より $\widetilde{\varphi_P^*} = 0$ である。従って、$T_P(\varphi) = 0^* = 0$ となる。

1.5.11

$Y = Z_3(f,g) \subseteq \mathbf{P}^3,\ V = Z_2(h) \subseteq \mathbf{P}^2,\ f = x(x-z) - yw,\ g = yz - (x+z)w,\ h = y^2 z - x(x^2 - z^2),\ \tilde{Y} = Y - P,\ \tilde{V} = V - P',\ P' = (1, 0, -1)$ とする。Y は algebraic set であり、Exercise 5.9 より V は既約閉集合なので $\tilde{V}$ は quasi projective variety である。$Z_3(h) = \tilde{Y} \cup \{(x,y,z,w) | h(x,y,z) = 0, \forall w\}$ において、$\{(x,y,z,w)|h(x,y,z) = 0, \forall w\}$ の元は特殊な w の場合を除き、$\tilde{Y}$ の外である。

Exercise 3.14(a) から projection $\varphi' : \mathbf{P}^3 - P \to \mathbf{P}^2$ は morphism である。φ' を $\tilde{Y}$ に制限したものを φ とおく。

まず、

$$\varphi : \tilde{Y} \to \tilde{V},\ (x,y,z,w) \mapsto (x,y,z)$$

が全単射であることを示す。

Well-define 性: $f(1, 0, -1, w) \neq 0$ なので $\varphi(\tilde{Y}) \not\ni P'$ である。

全射性: $Q = (x,y,z) \in \tilde{V}$ は $y \neq 0$ or $x+z \neq 0$ を満たす。実際、$y = 0, x+z = 0$ とすると $Q = (0,0,0)$ or $(1,0,-1)$ であるが、いずれも $\tilde{V}$ に属さない。

$y \neq 0$ のとき、$(xy, y^2, yz, x(x-z)) \in \tilde{Y}$ であり、$\varphi(xy, y^2, yz, x(x-z)) = Q$ となる。

$x + z \neq 0$ のとき、$(x(x+z), y(x+z), z(x+z), yz) \in \tilde{Y}$ であり、$\varphi(x(x+z), y(x+z), z(x+z), yz) = Q$ となる。

これらが重なっているところでは、$x(x-z)/y = yz/(x+z)$ なので、両者は等しい: $(xy, y^2, yz, x(x-z)) \sim (x(x+z), y(x+z), z(x+z), yz)$

単射性: $(x,y,z) \in \tilde{V}$ とする。$y(x+z) \neq 0$ を満たすので、$y \neq 0$ とすると $f(x,y,z,w) = 0$ より w は一意的に決まる。$x+z \neq 0$ の場合も同様である。

以上により φ は全単射である。

φ' が連続なので、$\tilde{V}$ の開集合 U に対して、$\varphi^{*-1}(U)\cap\tilde{Y}=\varphi^{-1}(U)$ は Y の開集合であるから φ は連続である。逆関数 $\psi=\varphi^{-1}$ が連続であることを示す。$\tilde{Y}$ を $y\neq 0$ あるいは $x+z\neq 0$ に応じて二つの開集合に分けると、それぞれに対応して

$$\psi(x,y,z)=(xy,y^2,yz,x(x-z)) \text{ or } (x(x+z),y(x+z),z(x+z),yz)$$

となるが、いずれの場合にも斉次多項式 α に対して $\alpha\psi$ は斉次多項式なので $\psi^{-1}\alpha^{-1}(0)=(\alpha\psi)^{-1}(0)$ は閉集合となる。各々の場合に連続なので全体として ψ は連続である。よって、φ は位相同型写像、$\tilde{Y}$ は既約で、variety となる。

さて、$\tilde{Y}$, $\tilde{V}$ とも variety なので、その間の morphism が定義できる。φ' が morphism なので φ も morphism である。逆関数 ψ が morphism であることも、$\tilde{Y}$ を affine の和集合に分割して ($y\neq 0, x+z\neq 0$ に応じて)、Lemma 3.6 を用いれば証明できる。

以上により、φ は isomorphism であることが示された。

Exercise 5.9 より $V=Z_2(h)$ は nonsingular である。従ってその開集合 $\tilde{V}$ も nonsingular で既約となる。

$\tilde{Y}$ は Y で開集合であるが、閉集合ではない。もし閉集合とすると、$\tilde{V}$ も閉集合になるが、それはあり得ない。実際、もし閉集合だとすると、$\{P'\}$ が V で開集合になるが、V は既約なので $\overline{\{P'\}}=V$ であり、一点集合 $\{P'\}$ はそれ自身が閉集合なので、$V=\{P'\}$ となってしまう。よって $\overline{\tilde{Y}}\neq\tilde{Y}$ で $Y=\tilde{Y}\cup\{P\}$ が閉集合ゆえ $\overline{\tilde{Y}}=Y$ であり、Example 1.1.4 より Y は既約である。

Y が既約閉集合なので、$I(Y)$ は prime ideal であり、$I(Y)=(f,g)$ が成り立つ。従って Y は complete intersection である。

また $\tilde{Y}$ は $\tilde{V}$ と isomorphic なので、任意の点 $Q\in\tilde{Y}$ で $\mathcal{O}_{Q,\tilde{Y}}\approx\mathcal{O}_{\varphi(Q),\tilde{V}}$ である。よって、$\varphi(Q)$: nonsingular $\Leftrightarrow$ Q: nonsingular より、$\tilde{Y}$ は nonsingular である。$\{P\}=Y-\tilde{Y}$ では $\mathrm{rank}J_P=2$ であり、これは $n-\dim Y$ に等しいので、P は nonsingular である (f,g は Exercise 5.9 より異なる既約多項式なので、$\dim Y=1$)。

従って、Y は nonsingular である。

1.5.12

(a) ベクトル空間 $V=k^n$ の 2 次形式を $\varphi:V\to k$ とする。ここで、$f(x,y)=(\varphi(x+y)-\varphi(x)-\varphi(y))/2$ とおくと $\varphi(x)=f(x,x), f(x,y)=f(y,x)$ を満たす。$x=\sum_{0\leq i\leq n}x_i\boldsymbol{e}_i, y=\sum_{0\leq i\leq n}y_i\boldsymbol{e}_i$ とすると、$f(x,y)=\sum_{i,j}f(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)x_iy_j$ であり、$a_{i,j}=f(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)$ とおくと、$\varphi(x)=\sum_{i,j}a_{i,j}x_ix_j$ となる。$f(x,y)=0$ のとき $x\perp y$ と書き、直交しているという。

このとき、V に直交基底が取れることを証明する。n に関する帰納法による。

$n=1$ のときは明らかである。$n-1$ で成立しているとして、n の場合を証明する ($n\geq 2$)。もし $\varphi=0$ なら $f=0$ となり任意の基底が直交基底となるので、$\varphi\neq 0$ とする。$\varphi(x)\neq 0$ となる $x\neq 0$ が存在するので、それを a_1 とする。a_1 で生成される部分空間を M とし、$M'=\{x|x\perp M\}$ とおく。

このとき $V=M\oplus M'$(直和) となることを示す。

$x\in V$ とする。$y=x-\varphi(x,a_1)/\varphi(a_1,a_1)a_1$ とおくと、$\varphi(y,a_1)=0$ より、$y\in M'$ なので $x=y+a_1\in M+M'$ である。

次に一意性を示すために $y_1+z_1=y_2+z_2, y_i\in M, z_i\in M'$ とすると、$z_1-z_2=y_2-y_1=\exists ba_1$ より $\varphi(y_2-y_1,a_1)=b\varphi(a_1,a_1)$、一方 $\varphi(z_1-z_2,a_1)=0$ より $b=0$、よって $y_1=y_2, z_1=z_2$ より $V=M\oplus M'$ である。

$\dim M'=\dim V-\dim M=n-1$ から、帰納法の仮定より M' に直交基底が存在して $M'=(a_2,\cdots,a_n)$ となるので、$V=M\oplus M'=(a_1,\cdots,a_n)$ となる直交基底が V に存在する。

基底変換により $x=\sum_{0\le i\le n}x_i\boldsymbol{e}_i=\sum_{0\le i\le n}y_ia_i$ となり、$\varphi(x)=f(x,x)=\sum_{i,j}f(a_i,a_j)y_iy_j=\sum_i f(a_i,a_i)y_i^2$ が得られる。ここで、y はある行列 P で $x=Py$ と書ける。k は代数的閉体なので、$c_i^2=f(a_i,a_i), z_i=c_iy_i$ とすれば、$\varphi(x)=\sum_{1\le i\le s}z_i^2$ となる。

(b) $r\ge 2$ とする。$\frac{\partial f}{\partial x_i}=2x_i=0$ $(0\le i\le r)$ となるのは $(x_0,\cdots,x_r)=(0,\cdots,0)$ しかない。よって Exercise 5.9(3 変数以上なら成立する) より、f は既約である。

$r=1$ のとき、$f=x_0^2+x_1^2=(x_0+\beta x_1)(x_0-\beta x_1),\ \beta^2=-1$ とかけるので、可約である。$r=0$ のとき、$f=x_0^2$ は可約である。

(c) Exercise 5.8 から singular point は $\frac{\partial f}{\partial x_i}=2x_i=0$ を満たす点なので、$\mathrm{Sing}\ Q=Z(x_0,\cdots,x_r)=H_0\cap\cdots\cap H_r$ は linear variety である。

Projective variety は Proposition 2.2 より affine に変換でき、しかも Exercise 2.6 の証明にあるように変換しても次元は変わらない。よって、Exercise 1.8 から $\dim\mathrm{Sing}\ Q=\dim H_0\cap\cdots\cap H_r=n-r-1$ が得られる。

$r=n$ なら Exercise 5.8 より Q は nonsingular であり、$r\le n-1$ なら $\dim\mathrm{Sing}\ Q=n-r-1\ge 0$ より $\mathrm{Sing}\ Q\ne\varnothing$ である。

(d) $Q=Z_n(f),\ Q'=Z_r(f)\subseteq\mathbf{P}^r,\ Z=\mathrm{Sing}\ Q=Z_n(x_0,\cdots,x_r)$ において、Q' を $\mathbf{P}^n$ の部分集合と見るとき、それは $\{(a_0,\cdots,a_r,0,\cdots,0)|(a_0,\cdots,a_r)\in Q'\}$ となる。これも Q' と書く。

一般に、$\mathbf{P}^n$ の 2 点 $a=(a_0,\cdots,a_n), b=(b_0,\cdots,b_n)$ を通る直線は $\ell_{a,b}=\{(ua_0+vb_0,\cdots,ua_n+vb_n)|(u,v)\in\mathbf{P}^1\}$ で与えられる (Exercise 3.14 の証明中)。以下、これを $\ell_{a,b}=\{ua+vb|(u,v)\in\mathbf{P}^1\}$ とも記す。

このとき $L=\{\ell_{a,b}|a\in Q', b\in Z\}$ としたとき、$L=Q$ を証明する。この L が cone over Q' with axis Z である。

$L\ni ua+vb=(ua',vb'),\ a=(a',\mathbf{0}), b=(\mathbf{0},b')$ とすると $f(ua+vb)=u^2f(a')=0$ を満たすので、Q に属す。

逆に $(a',b')\in Q$ とする。このとき、$a'\ne\mathbf{0}$ または $b'\ne\mathbf{0}$ である。

$a'\ne\mathbf{0}$ かつ $b'\ne\mathbf{0}$ のとき、$(a',b')=(1\cdot a+1\cdot b),\ a=:(a',\mathbf{0})\in Q', b:=(\mathbf{0},b')\in Z$ なので $(a',b')\in L$ である。

どちらかが $\mathbf{0}$、例えば $a'=\mathbf{0}$ のとき、$\exists c=(c',\mathbf{0})\in Q'$ を取れば、$(a',b')=(\mathbf{0},b')=0\cdot c+1\cdot b\in L$ となる。

以上により、$L=Q$ が示された。

一般の閉集合 $Y\subseteq\mathbf{P}^r$ の場合も同様である。

Z を次元 $n-r-1$ の linear variety とすると、変数を 1 次変換することにより $Z = H_0 \cap \cdots \cap H_r$ とできる。すると、$\mathbf{P}^r \subseteq \mathbf{P}^n$ とみなしたとき、$\mathbf{P}^r \cap Z = \varnothing$ となる。

このとき、Y を $\mathbf{P}^n$ の部分集合みなし、$\tilde{Y} = \{(a', b') \in \mathbf{P}^n | a' \in Y \text{ or } a' = \mathbf{0}\}$, $L = \{\ell_{a,b} | a \in Y, b \in Z\}$ とすると、上記と全く同様にして $L = \tilde{Y}$ を示すことができる。

1.5.13

Normal point の定義は local なので、Y は affine としてよい。

Theorem 3.9A より、$A(Y)$ の $\mathrm{Frac}A(Y)$ における整閉包は $\widetilde{A(Y)} = (f_1, \cdots, f_r) = A(Y)f_1 + \cdots + A(Y)f_r$, $f_i \in \mathrm{Frac}A(Y)$ となるので、$f_1, \cdots, f_r$ の共通分母を g とすると、$(\widetilde{A(Y)})_g = A(Y)_g$ が成り立つ。[1], Proposition 5.12 より $(\widetilde{A(Y)})_g$ は $(\mathrm{Frac}A(Y))_g$ における $A(Y)_g$ の整閉包であり、[1], Corollary 5.5 よりそれは、整閉である。$(\widetilde{A(Y)})_g = A(Y)_g$ だから、結局 $A(Y)_g$ が整閉となる。このとき

$$\text{Normal } Y = g^{-1}(0)^c \cap Y$$

となることを示す。

$P \in \text{Normal } Y$ とすると $\mathcal{O}_{P,Y}$ は整閉である。このとき、$\mathrm{Frac}\mathcal{O}_{P,Y} = \mathrm{Frac}A(Y)_{\mathfrak{m}_P} = \mathrm{Frac}A(Y)$ なので、$(f_1, \cdots, f_r) = \widetilde{A(Y)} \subseteq \mathcal{O}_{P,Y}$ を満たす。よって、$f_i \in \mathcal{O}_{P,Y}$, $1 \le i \le r$ より、$g(P) \neq 0$ である。

逆に、$g(P) \neq 0, P \in Y$ とすると $g \notin \mathfrak{m}_P$ である。このとき、$A(Y)_g$ は $\mathrm{Frac}A(Y)_g$ で整閉だったので、$(A(Y)_g)_{\mathfrak{m}_P} = A(Y)_{\mathfrak{m}_P} = \mathcal{O}_{P,Y}$ も $\mathrm{Frac}(A(Y)_g)_{\mathfrak{m}_P} = \mathrm{Frac}A(Y)_{\mathfrak{m}_P} = \mathrm{Frac}\mathcal{O}_{P,Y}$ で整閉である ([1], Proposition 5.12)。よって、P は normal point である。

以上により $\text{Normal } Y = g^{-1}(0)^c \cap Y$ が示された。ここで $g \notin I(Y)$ なので、$g^{-1}(0)^c \cap Y \neq \varnothing$ であり、従って $\text{Nonnormal } Y = (g^{-1}(0) \cap Y)^c \cap Y = g^{-1}(0) \cap Y$ は Y の真閉集合となる。

1.5.14

(a) $P \in Y = Z(f)$, $Q \in Z = Z(g)$, $r = \mu_P(Y), s = \mu_Q(Z)$ とし、P, Q は原点 $(0,0)$ におく。Example 5.6.3 で示されているように、$\hat{\mathcal{O}}_{P,Y} = k[[x,y]]/(f)$ である。

$\hat{\mathcal{O}}_{P,Y}$ は $\mathfrak{m}_P = (\tilde{x}, \tilde{y})$ を極大 ideal とする局所環である。$\hat{\mathcal{O}}_{P,Y}$, $\hat{\mathcal{O}}_{Q,Z}$ は環同型なので、$\hat{\mathcal{O}}_{Q,Z}$ において、対応する $\mathfrak{m}_P$ の ideal は極大であり、局所環だからそれは $\mathfrak{m}_Q = (\overline{x}, \overline{y})$ に等しい。

$r > s$ と仮定する。$\mathfrak{m}_P^s/\mathfrak{m}_P^{s+1}$ における $\{\tilde{x}^i\tilde{y}^j\}_{i+j=s}$ は k 上線形空間の基底をなす。しかるに対応する $\mathfrak{m}_Q^s/\mathfrak{m}_Q^{s+1}$ においては、$\{\overline{x}^i\overline{y}^j\}_{i+j=s}$ は生成元をなすが $g_s = -g_{s+1} - \cdots$ より独立ではない。よって、$\dim \mathfrak{m}_P^s/\mathfrak{m}_P^{s+1} > \dim \mathfrak{m}_Q^s/\mathfrak{m}_Q^{s+1}$ となり、これは $\mathfrak{m}_P$ と $\mathfrak{m}_Q$ は環同型ではないことを意味する。従って $r = s$ である。

(b) Example 5.6.3 と同じように $f_r = g_s h_t$, $s, t \ge 1$ として

$$g = g_s + g_{s+1} + \cdots$$

$$h = h_t + h_{t+1} + \cdots$$

が $f = gh$ を満たすように、g, h を構成してゆく。

さて、斉次多項式 g_s, h_t は共通の一次因子を持たないが (k が代数的閉体なので、g_s, h_t が互いに素ということと同じ)、このとき $\mathcal{O}_P \approx k[x,y]/\mathfrak{m}_P$ において

$$\mathfrak{m}_P^{r-1} \subseteq (g_s, h_t),\ r = s + t$$

が成り立つを示す ([2], 3.3 Lemma (a) を改変)。ここで (g_s, h_t) は $\mathcal{O}_P$ における ideal である。

($\because$) $k[x,y]$ の d 次斉次多項式の集合を $k[x,y]_d$ としたとき、$k[x,y]_{r-1} \subseteq (g_s, h_t)$ を示せばよい。

g_s, h_t を 1 次分解して $g_s = L_1 \cdots L_s,\ h_t = M_1 \cdots M_t$ とする。$i > s, j > t$ に対しては $L_i = L_s, M_j = M_t$ とおく。いくつかの L_i は同じ可能性があり、M_j も同様であるが、L_i と M_j は互いに素である。

このとき、$A_{i,j} = L_1 \cdots L_i M_1 \cdots M_j$ とすると、$\{A_{i,j}\}_{i+j=d}$ は $k[x,y]_d$ の k 上の基底となることを示す。そのためには、$k[x,y]_d$ は $d+1$ 次元 k 上ベクトル空間なので (例えば $\{x^i y^j\}_{i+j=d}$ は基底)、$\{A_{i,j}\}_{i+j=d}$ が $k[x,y]_d$ で線形独立であることを言えばよい。

$\sum_{i+j=d} a_{i,j} A_{i,j} = 0,\ a_{i,j} \neq 0$ と仮定しよう。$u = \max_i a_{i,j} \neq 0$ とし、$v = d - u$ とする。$u = 0$ のときは v と交代できるので、$u \neq 0$ としてよい。すると、$A_{u,v} = \sum_{i+j=d, i<u, j>v} b_{i,j} A_{i,j}$ と書けるので、$L_1 \cdots L_u M_1 \cdots M_v = \sum_{i+j=d, i<u, j>v} b_{i,j} L_1 \cdots L_i M_1 \cdots M_j$ となるが、$i < u, j > v$ より

$$L_1 \cdots L_u = M_{v+1} \sum_{i+j=d, i<u, j>v} b_{i,j} L_1 \cdots L_i M_{v+2} \cdots M_j$$

となるが、これは L_i と M_j が互いに素という前提に反する。

$i + j = s + t - 1$ より $i \geq s$ または $j \geq t$ なので、例えば $i \geq s$ とすると、$A_{i,j} = g_s B \in (g_s, h_t)$ である。$\{A_{i,j}\}_{i+j=r-1}$ は $k[x,y]_{r-1}$ の基底なので、$k[x,y]_{r-1} \subseteq (g_s, h_t)$、よって $\mathfrak{m}_P^{r-1} \subseteq (g_s, h_t)$ が示された。($\because$) 終

さて、$f_{r+1} \in (g_s, h_t),\ r = s + t$ から

$$f_{r+1} = h_{t+1} g_s + g_{s+1} h_t,\ \exists h_{t+1}, \exists g_{s+1} \in k[[x,y]]$$

となる。ここで、f_{r+1}, g_s, h_t は斉次多項式なので h_{t+1}, g_{s+1} の各々は次数 $t+1, s+1$ の斉次多項式にできる。

次に $f_{r+2} = h_{t+2} g_s + h_{t+1} g_{s+1} + g_{s+2} h_t$ から

$$f_{r+2} - h_{t+1} g_{s+1} = h_{t+2} g_s + g_{s+2} h_t,\ \exists h_{t+2}, \exists g_{s+2} \in k[[x,y]]$$

とできる。これを繰り返せば、$f = gh,\ g, h \in k[[x,y]]$ が得られる。

これは、f の $k[[x,y]]$ における因数分解は f の最低次斉次部分で決まることを示している。

(c)　2 変数の 1 次変換 $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}'$ によって、ある直線 $ax + by = 0$ を別の直線 $cx' + dy' = 0$ に変換することを考える。$x = \alpha x' + \beta y', y = \gamma x' + \delta y'$ として、$ax + by = 0$ に代入して得られた直線が $cx' + dy' = 0$ になる条件は

$$ad\alpha - ac\beta + bd\gamma - bc\delta = 0$$

となる。

ここで $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ は実質 3 変数なので、3 直線のセットを別の任意の 3 直線に変換できる。すなわち、$a_i x + b_i y = 0 \to c_i x' + d_i y' = 0,\ i = 1, 2, 3$ とすると

$$a_i d_i \alpha - a_i c_i \beta + b_i d_i \gamma - b_i c_i \delta = 0,\ i = 1, 2, 3$$

を満たすように $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ を全てが 0 とならないように決めればよく、これは常に可能である。しかし、4 本の互いに異なる直線セットを別の同様なセットに変換することはできない。

P, Q が 2 つの ordinary double point の場合に analytically isomorphic になるという証明は、Example 5.6.3 で実質的に示されている。

そこで、P, Q が 2 つの ordinary triple point とする。$f = \ell_1\ell_2\ell_3 + \cdots$ で、これらの 3 本の直線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 は互いに素である。ここで、一本は残り 2 本の 1 次結合で表せるので、$\ell_3 = a\ell_1 + b\ell_2$ としよう。このとき、(b) と同様に $f = \alpha\beta\gamma$ となる α, β, γ が存在するが、その際、$\gamma = a\alpha + b\beta$ とできることを示そう。

$$\alpha = \ell_1 + \alpha_2 + \cdots,\ \beta = \ell_1 + \beta_2 + \cdots,\ \gamma = a\ell_1 + b\ell_2 + a\alpha_2 + b\beta_2 + \cdots$$

としたとき、$f = \alpha\beta\gamma$ となるように、$\alpha_2, \beta_2, \cdots$ を定めてゆく。

$$f_4 = \ell_1\ell_2(a\alpha_2 + b\beta_2) + \ell_1(a\ell_1 + b\ell_2)\beta_2 + \ell_2(a\ell_1 + b\ell_2)\alpha_2 = \ell_2(2a\ell_1 + b\ell_2)\alpha_2 + \ell_1(a\ell_1 + 2b\ell_2)\beta_2$$

ここで、$\ell_2(2a\ell_1 + b\ell_2)$ と $\ell_1(a\ell_1 + 2b\ell_2)$ は共通因子を持たないので、(b) で示したとおり、$\mathfrak{m}_P^3 \subseteq (\ell_2(2a\ell_1 + b\ell_2), \ell_1(a\ell_1 + 2b\ell_2))$ となるので、上式を満たす α_2, β_2 が存在する。

$$f_5 = \ell_1\ell_2(a\alpha_3 + b\beta_3) + \ell_1(a\ell_1 + b\ell_2)\beta_3 + \ell_2(a\ell_1 + b\ell_2)\alpha_3 + g = \ell_2(2a\ell_1 + b\ell_2)\alpha_3 + \ell_1(a\ell_1 + 2b\ell_2)\beta_3 + g$$

ここで、g は既に定まった多項式であるので、左辺に移項すれば、f_4 の場合と同じようにして定まる。以下同様にすれば、全ての $\alpha_2, \beta_2, \cdots$ が定まる。

以上により $f = \alpha\beta(a\alpha + b\beta)$ が得られた。さて、Example 5.6.3 で示されているように、$\alpha \mapsto \ell_1, \beta \mapsto \ell_2$ となる $k[[x, y]]$ の automorphism が存在する。このとき、$a\alpha + b\beta \mapsto a\ell_1 + b\ell_2$ より $\gamma \mapsto \ell_3$ なので、

$$\widehat{\mathcal{O}}_{P,Y} = k[[x, y]]/(f) = k[[x, y]]/(\alpha\beta\gamma) = k[[x, y]]/(\ell_1\ell_2\ell_3)$$

である。同様に、$\widehat{\mathcal{O}}_{Q,Z} = k[[x, y]]/(\ell_1'\ell_2'\ell_3')$ となるが、既に示したように、変数の一次変換で $\ell_1\ell_2\ell_3$ は $\ell_1'\ell_2'\ell_3'$ となるので、$\widehat{\mathcal{O}}_{P,Y} \approx \widehat{\mathcal{O}}_{Q,Z}$ が得られ、P と Q は analytically isomorphic である。

P が ordinary 4-fold point の場合は、4 本の直線セットを異なる別のセットに変換できない。3 本は変換できるが、残り 1 本 $ax + by = 0$ は $cx + dy = 0$ とは異なる。$(c, d) \in \mathbf{P}^1$ と見られるので、P を固定して考えると、Q は 1 パラメータの nonisomorphic point family である。

(d) $P=(0,0)$ が $Y=Z(f)$ の double point singularity なので、f の multiplicity は 2 で、1 次変換により y^2 の係数を 1 にできる。
$B=k[[x]]$ とし、$M=B[[y]]/(f)$ を B 加群と考える。

$$M/(\tilde{x})=(B[[y]]/(f))/((x,f)/(f))=B[[y]]/(x,f)=k[[y]]/(\tilde{f}),\ \tilde{f}=f(0,y)$$

において、$\tilde{f}=y^2+\cdots=ty^2, t$ は単元なので、$M/(\tilde{x})\approx k[[y]]/(y^2)$ である。これは $1,y$ で生成されるので、$M=B[[y]]/(f)$ も $1,\tilde{y}$ で生成される ([1], Proposition 2.8)。すると、 $\tilde{y}^2\in M$ は $\tilde{y}^2=a_1\tilde{y}+a_2, a_1,a_2\in B$ とかけるはずなので、$y^2-a_1y-a_2=0 \mod (f)$ から $uf=y^2-a_1y-a_2,\ u\in B[[y]]$ となる。$x=0$ として y^2 の係数を比較すると、u の定数項は非零、すなわち u は単元であることがわかる。よって、$uf=y^2-a_1y-a_2,\ a_1,a_2\in k[[x]], u:\mathrm{unit}$ が得られるが、$y^2-a_1y-a_2$ は $y^2-v, v\in k[[x]]$ の形に変換できるので、

$$uf=y^2-v, v\in k[[x]]$$

の形になる。
ここで v の multiplicity を r とおき、$v=x^r+b_1x^{r+1}+\cdots$ としたとき、

$$v=h(x)^r,\ h(x)=x+c_1x^2+\cdots$$

とできることを示す。これは $1+b_1x^n+\cdots=(1+c_1x+\cdots)^r$ を意味するが、係数を比較すると、まず $c_1=b_1/r$ となる。そして、$c_1,\cdots,c_{j-1}$ が求まったとすると、$c_1,\cdots,c_{j-1}$ の多項式 q_j を用いて $b_j=rc_j+q_j$ と書けるので、c_j も求まる。以上により帰納的に $v=h(x)^r$ とできることが示された。
$h(x)=x+c_1x^2+\cdots=x(1+c_1x+\cdots)$ なので、$h=wx, w:\mathrm{unit}$ である。よって h を変数と見なすこともでき、$k[[x,y]]/(y^2-v)=k[[x,y]]/(y^2-h^r)=k[[xw',y]]/(y^2-x^r)=k[[x,y]]/(y^2-x^r),\ w'=w^{-1}$ となる。従って、

$$k[[x,y]]/(f)=k[[x,y]]/(y^2-x^r)$$

が得られる。

このときの r の一意性を示す。そのために $r\neq s$ のとき $k[[x,y]]/(y^2-x^r)\not\approx k[[x,y]]/(y^2-x^s)$ となることを証明する。double point を扱っているので $r,s\geq 2$ である。$r<s$ とする。
r,s の一方のみが奇数の場合:
r が奇数で s が偶数とする。y^2-x^r は既約で y^2-x^s は可約なので、$k[[x,y]]/(y^2-x^r)$ は整域、$k[[x,y]]/(y^2-x^s)$ は整域でない。従って、それらは同型ではない。r が偶数で s が奇数の場合も同様である。
r,s が奇数の場合:

$$\varphi:k[[x,y]]/(y^2-x^r)\to k[[t]],\ \tilde{x}\mapsto t^r,\tilde{y}\mapsto t^2$$

は像 $R_r:=\varphi(k[[x,y]]/(y^2-x^r))$ への環同型を与える。実際、$f(t^r,t^2)=0$ のとき $f(x,y)\equiv 0 \mod y^2-x^r$ より単射である。R_r は項として $t,t^3,\cdots,t^{r-2}$ を含まない冪級数の集合である。$k[[x,y]]/(y^2-x^r)\approx k[[x,y]]/(y^2-x^s)$ とすれば $R_r\approx R_s$ が得られるが、ベクトル空間として $\mathfrak{m}^{s-1}/\mathfrak{m}^s$ を取ると $\dim_k$ が異なるので、同型ではあり得ない ($\mathfrak{m}=(t)$)。

r, s が偶数の場合:

r, s を改めて $2r, 2s$ とおく。$k[[x,y]]/(y^2 - x^{2s})$ において $y \leftarrow y + x^s$ とすると $k[[x,y]]/(y^2 - x^{2s}) \approx k[[x,y]]/y(y - 2x^s)$ となるので、

$$\varphi : k[[x,y]]/(y^2 - x^{2r}) \to k[[x,y]]/y(y - 2x^s),\ \tilde{x} \mapsto \overline{f}, \tilde{y} \mapsto \overline{g}$$

が同型写像とする。$\overline{g}^2 - \overline{f}^{2r} = 0$ において $\overline{g} + \overline{f}^r, \overline{g} - \overline{f}^r$ の一方が0とすると、対応して $y \pm x^r \equiv 0 \mod y^2 - x^{2r}$ となり、矛盾するので、$g + f^r = ay, g - f^r = b(y - 2x^s)$ とおける。

$f = f_x + yf_y, g = g_x + yg_y$ とし、f_x, g_x は x のみの元とする。すると、$y = 0$ とおくことにより $g_x = -f_x^r$ が得られる。$g - f^r = b(y - 2x^s)$ からは $g(x, 2x^s) = f(x, 2x^s)^r$ より $g_x + 2x^s g_y(x, 2x^s) = (f_x + 2x^s f_y(x, 2x^s))^r$ となるが、$g_x = -f_x^r$ を用いて整理すると、$f_x^r = x^s h$ の形となる。よって、$r\mu(f_x) \geq s$ である。ここで $\mu(f_x)$ は f_x の最低次数とした。

さて、$k[[x,y]]/(y^2 - x^{2r})$ の極大 ideal$(\tilde{x}, \tilde{y})$ に対応して $(\tilde{f}, \tilde{g})$ は $k[[x,y]]/(y(y - 2x^s))$ の極大 ideal である。局所環性から $(\tilde{f}, \tilde{g}) = (\tilde{x}, \tilde{y})$ となり、$x \equiv c\tilde{f} + d\tilde{g} \mod y(y - 2x^s)$、すなわち $x = cf + dg + ey(y - 2x^s)$ が得られる。ここで $y = 0$ とすると、$x = c(x,0)f_x - d(x,0)f_x^r = f_x(c(x,0) - d(x,0)f_x^{r-1})$ となるので、$\mu(f_x) \leq 1$ である。すると、既に得られた $r\mu(f_x) \geq s$ から $s \leq r\mu(f_x) \leq r$ となり、$r < s$ に反する。

以上により $r \neq s$ のとき $k[[x,y]]/(y^2 - x^r) \not\approx k[[x,y]]/(y^2 - x^s)$ である。

$r = 2$ のとき、$y^2 - x^2 = (y - x)(y - x) \approx xy$ は node である。
$r = 3$ のとき、$y^2 - x^3$ は cusp である。
$r = 4$ のとき、$y^2 - x^4$ は tacnode である。

1.5.15

$i + j + k = d$ を満たす $x^i y^j z^k$ の個数は、3 個から重複を許して d 個とる組み合わせなので、${}_3H_d = \binom{d+2}{2}$ であり、$N = \binom{d+2}{2} - 1 = d(d+3)/2$ となる。

(a) $k[x,y,z]_d$ を d 次斉次多項式の集合 ($f = cg, k \ni \exists c \neq 0$ となる f, g は同一とみなす) とすると

$$\varphi : \mathbf{P}^N \to k[x,y,z]_d,\ (a_{i,j,k})_{i+j+k=d} \mapsto \sum a_{i,j,k} x^k y^j z^k$$

は明らかに全単射である。

$B \subseteq k[x,y,z]_d$ を重複因子を持たない多項式の集合とし、$\tilde{B} = \varphi^{-1}(B) \subseteq \mathbf{P}^N$、$\mathcal{C} = \{Z(g) | g \in B\}$ とおくと

$$Z' : B \to \mathcal{C}, f \mapsto Z(f)$$

は全単射である。実際、定義できることと全射性は明らかである。また $Z(f) = Z(g) \Rightarrow \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)} \Rightarrow f^n = ag, g^m = bf, \exists n > 0, m > 0 \Rightarrow g | f^n, f | g^m \Rightarrow f \sim g$ より、単射でもある。

従って、$\rho = Z'\varphi : \tilde{B} \to \mathcal{C}$ は全単射である。

(b) $F := \{f \in k[x,y,z] | Z(f)\text{: nonsingular}\} = \{f \in k[x,y,z] | \frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0 \ \mathit{or}\ \frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0 \ \mathit{or}\ \frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0, \forall P \in Z(f)\} \subseteq \{f \in k[x,y,z] | f\text{: irreducible}\} \subseteq B$ が成り立つので (Exercise 5.8, 5.9)、$Z'(F)$ は (irreducible) nonsingular curve であり、$F \neq \varnothing$ である (Exercise 5.5)。

さて、$f = \sum_{i+j+k=d} a_{i,j,k} x^k y^j z^k$ としたとき、

$$
\begin{aligned}
f &= \sum_{i+j+k=d} a_{i,j,k} x^k y^j z^k = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \sum_{i+j+k=d-1} (i+1) a_{i+1,j,k} x^k y^j z^k = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \sum_{i+j+k=d-1} (j+1) a_{i,j+1,k} x^k y^j z^k = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \sum_{i+j+k=d-1} (k+1) a_{i,j,k+1} x^k y^j z^k = 0
\end{aligned}
$$

が $\mathbf{P}^2$ で解を持つことと、$\{a_{i,j,k}\}$ のある斉次多項式 $g_1, \cdots, g_t$ が $\mathbf{P}^N$ で解を持つことと等価である (Theorem 5.7A)。

従って、$F^c = B - F = \{f \in B | \frac{\partial f}{\partial x}(P) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0, f(Q) = 0, \exists Q \in \mathbf{P}^2\}$ から、

$$\psi(F^c) = Z(g_1, \cdots, g_t), \psi = \varphi^{-1}$$

が成り立つ。実際、$f \in F^c \Leftrightarrow \psi(f) \in Z(g_1, \cdots, g_t)$ である。

ψ は全単射でなので $\psi(F) = (\psi(F^c))^c = Z(g_1, \cdots, g_t)^c$ となり、$F \neq \varnothing$ で $Z'(F)$ は nonsingular curve 集合ゆえ、結局

$$\rho : Z(g_1, \cdots, g_t)^c \to \sigma(F)$$

が得られ、nonsingular curve と非空な開集合の点が 1 対 1 対応する。

[参考図]

$$
\begin{array}{lccccccc}
\mathbf{P}^2 \text{ variety:} & & & \mathcal{C} & \subseteq & \{curve\} & \subseteq & \{nonsingular\ curve\} \\
 & & & \uparrow Z' & & \uparrow Z' & & \uparrow Z' \\
\text{多項式:} & k[x,y,z]_d & \supseteq & B(\text{無重複因子}) & \supseteq & \{\text{ 既約 }\} & \supseteq & F(nonsingular\ polynomial) \\
 & \uparrow \varphi & & \uparrow \varphi & & & & \varphi \uparrow \text{Th.5.7A} \\
\text{係数:} & \mathbf{P}^N & \supseteq & \tilde{B} & \supseteq & & \supseteq & Z(g_1, \cdots, g_t)^c
\end{array}
$$

References

[1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald: Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, 1963

[2] W. Fulton: Algebraic Curves, http://www.math.lsa.umich.edu/˜wfulton/CurveBook.pdf, 2008