1 Varieties

1.4 Rational Maps

1.4.1

$h : U \cap V \to k$ を次のように定義する。

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \in U \\ g(x) & x \in V \end{cases}$$

このとき h は $U \cap V$ で $f(x) = g(x)$ より well-define であり、regular function の定義が local なので h も regular function である。

$< U, f >$ に対して $\tilde{f}$ を次のように定義する。

$$\tilde{f} : U_f = \bigcup_{< V, g_V > \sim < U, f >} V \to k, x \in V \mapsto g_V(x)$$

このとき $\tilde{f} : U_f$ は well-define で regular function であるのは、上記と同様である。ここで U_f は $< U, f >$ に同値な $< V, g_V >$ における V の和集合なので、ここに入らない $< V', g' >$ は $U \cap V'$ において $f \neq g'$ であり、これ以上拡張できない。

$K(X)$ の rational function を $< U, f >$ とすると、上記で示したことからこれは $< U_f, \tilde{f} >$ まで拡張できる。

1.4.2

$\varphi =< U, \varphi_U > \sim < V, \varphi_V >$ とする。このとき $< U \cup V, \varphi_{U \cup V} >$ を次のように定義する。

$$\varphi_{U \cup V} : x \mapsto \begin{cases} \varphi_U(x) & x \in U \\ \varphi_V(x) & x \in V \end{cases}$$

morphism の定義も局所的なので、この $\varphi_{U \cup V}$ は morphism である。よって $< U \cup V, \varphi_{U \cup V} >$ は $< U, \varphi_U >$ と $< V, \varphi_V >$ を拡張した φ の表現である。

これを最大に拡大したものは Exercise 4.1 と同様 $\varphi =< U_\varphi, \varphi_{U_\varphi} >$ となる。ここで $U_\varphi = \bigcup_{< V, \varphi_V > \sim < U, \varphi_U >} V,\ \varphi_{U_\varphi}(x) = \varphi_V(x); \text{if } x \in V$ である。

1.4.3

(a) $\mathbf{P}^2$ 上の rational function を $f = x_1/x_0$ とする。このとき f は $U = \mathbf{P}^2 - Z(x_0)$ 上で定義される (この U が最大である)。対応する regular funtion は同じ $f = x_1/x_0$ である。

(b) $f = x_1/x_0$ を $\mathbf{P}^2 - Z(x_0) \to \mathbf{A}^1$ とみなすと、これは morphism である。よって、

$$\varphi_{\mathbf{P}^2 - Z(x_0)} : \mathbf{P}^2 - Z(x_0) \to \mathbf{A}^1 \to \mathbf{P}^1, (x_0, x_1, x_2) \mapsto x_1/x_0 \mapsto (x_0, x_1)$$

も morphism であり、rational map $\varphi =< \mathbf{P}^2 - Z(x_0), \varphi_{\mathbf{P}^2 - Z(x_0)} >$ が得られる。

これは最大、次のように拡張できる:

$$\varphi_{\mathbf{P}^2-(0,0,1)}:\mathbf{P}^2-(0,0,1)\to\mathbf{P}^1,(x_0,x_1,x_2)\mapsto(x_0,x_1)$$

よって φ は $\mathbf{P}^2-(0,0,1)$ で定義され、$\varphi=<\mathbf{P}^2-(0,0,1),\varphi_{\mathbf{P}^2-(0,0,1)}>$ である。

1.4.4

まず $K(\mathbf{P}^n)\approx k(x_1,\cdots,x_n)$ を示す ($k(x_1,\cdots,x_n)$ は k の純超越拡大である)。$k(x_1,\cdots,x_n)$ の元は斉次化して $f(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ とみなすことにすると、

$$\rho:k(x_1,\cdots,x_n)\to K(\mathbf{P}^n),f=f_n/f_d\mapsto<Z(f_d)^c,f>$$

が定義できる。これが準同型であるのは明らかである。$<Z(f_d)^c,f>\sim<\mathbf{P}^n,0>$ とすると、$f(Z(f_d)^c\cap\mathbf{P}^n)=0\Rightarrow Z(f_d)^c\subseteq Z(f_n)\Rightarrow\overline{Z(f_d)^c}=\mathbf{P}^n\subseteq Z(f_n)$ となるので有理関数として $f=0$ であり、単射である。次に $<U,f>\in K(\mathbf{P}^n)$ とすると、ある多項式 g,h を用いて $<U,f>\sim<Z(h)^c,g/h>$ となるので、$\rho(g/h)=<Z(h)^c,g/h>\sim<U,f>$ となるから全射である。

(a) Exercise 3.1(c) より $\mathbf{P}^2$ の conic は $\mathbf{P}^1$ と isomorphic なので、corollary 4.5 より birationally equivalent となり、rational である。

(b) $Y=Z(y^2-x^3),C=Y-(0,0)$ とすると、C は Y の開集合である。ここで、

$$\rho:C\to\mathbf{A}^1-0,\ (x,y)\mapsto y/x$$

$$\sigma:\mathbf{A}^1-0\to C,\ x\mapsto(x^2,x^3)$$

とすると、これらは各々morphism である。

$(x,y)\in C$ に対して、$\sigma\rho(x,y)=\sigma(y/x)=(y^2/x^2,y^3/x^3)=(x,y)$ より $\sigma\rho=\mathrm{id}_C$ であり、$\rho\sigma(x)=\rho(x^2,x^3)=x$ より $\rho\sigma=\mathrm{id}_{\mathbf{A}^1-0}$ となる。従って $C\approx\mathbf{A}^1-0\approx\mathbf{P}^1-Z(x_0)-(1,0)$ が成立し、これらは開集合なので Y は rational である。

(c) $P=(0,0,1)$ に対し $\varphi:\mathbf{P}^2-P\to\mathbf{P}^1,\ (x,y,z)\mapsto(x,y)$ は morphism である (Exercise 3.14)。

$Y=Z(y^2z-x^2(x+z)),\ Y_P=Y-P$ に対し、φ_{Y_P} を φ の Y_P への制限とすると $\varphi_{Y_P}(x,y,z)$ は $(1,\pm1)$ にはならない。もしなったとすると、$y^2/x^2=1$ より $y^2/x^2=x/z+1$ から $x=0$ となるからである。他の値はとりうるので、$\varphi_{Y_P}(Y_P)=\mathbf{P}^1-\{(1,1),(1,-1)\}$ である。morphism 性は明らかである。

他方、$U=\mathbf{P}^1-\{(1,1),(1,-1)\}$ に対して、$\rho:(x,y)\mapsto(x(y^2-x^2),y(y^2-x^2),x^3)$ とすると、$\rho(U)\subseteq Y$ かつ $\rho(U)\not\ni P$ となる。よって、$\rho:U\to Y-P$ と見られる。この morphism 性も明らかである。

$\varphi_{Y_P}\rho(x,y)=(x(y^2-x^2),y(y^2-x^2))$ において、U では $y^2\neq x^2$ なので $\varphi_{Y_P}\rho(x,y)=(x,y)$、従って $\varphi_{Y_P}\rho=\mathrm{id}_U$ である。また $\rho\varphi_{Y_P}(x,y,z)=\rho(x,y)=(x(y^2-x^2),y(y^2-x^2),x^3)=(x(y^2-x^2),y(y^2-x^2),z(y^2-x^2))=(x,y,z)$ となる。最後の等式は $P\notin Y_P$ より $y^2-x^2\neq0$ となるからである。従って、$\rho\varphi_{Y_P}=\mathrm{id}_{Y_P}$ である。

以上により $Y-P\approx\mathbf{P}^1-\{(1,1),(1,-1)\}$ となるので Y は rational である。

1.4.5

$Q = Z(xy - zw)$ に対し $Q_w = Q \cap U_w \approx Q'_w := Z(xy - z) \subseteq \mathbf{A}^3,\ U_w = \mathbf{P}^3 - Z(w)$ とする。このとき、

$$\rho : \mathbf{A}^2 \to Q'_w,\ (x, y) \mapsto (x, y, xy)$$

は全単射で morphism であり、ρ^{-1} も morphism なので、ρ は isomorphism である。Q_w は Q の開集合、$\mathbf{A}^2$ は $\mathbf{P}^2$ の開集合なので、Q と $\mathbf{P}^2$ は birationally equivalent である。

しかるに、Q と $\mathbf{P}^2$ は isomorphic ではない。なぜなら、Exercise 2.15 で示したように、$\mathbf{P}^3$ では交叉しない次の二つの直線 $L_t, L_u,\ t \neq u$ が Q 上に存在するが

$$L_t : t_0 y = t_1 w, t_0 z = t_1 x,\ L_u : u_0 y = u_1 w, u_0 z = u_1 x$$

これらに対応する $\mathbf{P}^2$ 上の二つの曲線は Exercise 3.7 より交叉する。よって、isomorphic ではあり得ない。

1.4.6

(b) $U = Z(x_0 x_1 x_2)^c$ とする。このとき、

$$\varphi_U : U \to U,\ (a_0, a_1, a_2) \mapsto (1/a_0, 1/a_1, 1/a_2)$$

は全単射で morphism である。また、$\varphi_U^{-1} = \varphi_U$ なので、これは isomorphism となる。

(a) 従って φ は birational map で逆写像も φ に等しい。

(c) (b) で示したように、rational map として $\varphi^{-1} = \varphi$ である。

$(a_0, a_1, a_2) \mapsto (a_1 a_2, a_0 a_2, a_0 a_1)$ は a_0, a_1, a_2 の中で 2 つが 0 にならなければ定義できる。よって、$U' = \mathbf{P}^2 - Z(x_1, x_2) - Z(x_0, x_2) - Z(x_0, x_1) = \mathbf{P}^2 - (1, 0, 0) - (0, 1, 0) - (0, 0, 1)$ とすると、

$$\varphi_{U'} : (a_0, a_1, a_2) \mapsto \begin{cases} (1/a_0, 1/a_1, 1/a_2) & (a_0, a_1, a_2) \in U \\ (1, 0, 0) & a_0 = 0 \\ (0, 1, 0) & a_1 = 0 \\ (0, 0, 1) & a_2 = 0 \end{cases}$$

となり、これは morphism である。開集合の定義域はこれ以上拡大できないので、φ は U' で定義できていることになる。

1.4.7

X, Y は affine としてよい。もし、X, Y が projective ならば、$P \in X_i = X \cap Z(x_i)^c, Q \in Y_j = Y \cap Z(y_j)^c$ とすれば、X_i, Y_j は affine とみなせて、

$$\mathcal{O}_{P, X_i} \approx \mathcal{O}_{P, X} \approx \mathcal{O}_{Q, Y} \approx \mathcal{O}_{Q, Y_j}$$

なので、$P \in U_i \subseteq X_i, Q \in V_j \subseteq Y_j$ において isomorphism $U_i \to V_j, P \mapsto Q$ の存在を証明できれば、そのまま $P \in U = U_i \subseteq X, Q \in V = V_j \subseteq Y$ において isomorphism $U \to V, P \mapsto Q$ が存在することになる。

さて、$\mathcal{O}_{P,X} \subseteq \mathrm{Frac}\mathcal{O}_{P,X} = K(X)$, $\mathcal{O}_{Q,Y} \subseteq \mathrm{Frac}\mathcal{O}_{Q,Y} = K(Y)$ より、$\mathcal{O}_{Q,Y} \to \mathcal{O}_{P,X}$ の環同型写像は $\varphi^* : K(Y) \to K(X)$ に拡張できる。Corollary 4.5 から birational mapping $\varphi : X \to Y$ およびその逆としての $\psi : Y \to X$ が存在し、$\varphi^*(f) = f\varphi$ が成り立つ。

具体的な φ の作成は、$Y \subseteq \mathrm{A}^n$ としその座標関数に対応する $\mathcal{O}_{Q,Y}$ の生成元を $y_1, y_2, \cdots, y_n$ とすると、$(\varphi^*(y_1), \varphi^*(y_2), \cdots, \varphi^*(y_n))$, $\varphi^*(y_i) \in \mathcal{O}_{P,X}$ による (Theorem 4.4 の証明参照)。従って $\varphi =< U', \varphi_{U'} >$ において U' は各 $\varphi^*(y_i)$ の定義域の共通部分とできるので、$P \in U'$ である。同様に、$\psi =< V', \psi_{V'} >$ においても $Q \in V'$ である。

$\varphi^* : \mathcal{O}_{Q,Y} \approx \mathcal{O}_{P,X}$ のとき $\varphi(P) = Q$ となることを示す。$\varphi(P) = Q' \neq Q$ と仮定する。$f \in \mathcal{O}_{Q,Y}$ を $f(Q) = 0, f(Q') \neq 0$ を満たすように選ぶ。例えば、$q_i \neq q'_i, \exists i$ として $f = y_i - q_i$ とおけばよい。ここで、Q, Q' の座標表示を $Q = (q_1, \ldots, q_n), Q' = (q'_1, \ldots, q'_n)$ とした。局所環 $\mathcal{O}_{P,X}, \mathcal{O}_{Q,Y}$ の極大 ideal をそれぞれ $\mathfrak{m}_P, \mathfrak{m}_Q$ とおくと、φ^* が環同型写像なので、$\mathfrak{m}_P = \varphi^*(\mathfrak{m}_Q)$ が成立する。このとき

$$f(Q) = 0 \Leftrightarrow f \in \mathfrak{m}_Q \Rightarrow \varphi^*(f) \in \varphi^*(\mathfrak{m}_Q) = \mathfrak{m}_P \Rightarrow \varphi^*(f)(P) = 0$$

である。ところがこれは $\varphi^*(f)(P) = f\varphi(P) = f(Q') \neq 0$ に矛盾する。よって $\varphi(P) = Q$ である。同様にして $\psi(Q) = P$ である。

$\psi(Q) = P$ より $\psi^{-1}(P) \ni Q = \varphi(P) \Rightarrow P \in \varphi^{-1}(Q) \subseteq \varphi^{-1}\psi^{-1}(P) \subseteq \varphi^{-1}\psi^{-1}(U')$ であり、同様に $Q \in \psi^{-1}\varphi^{-1}(V')$ となる。

従って $U = \varphi^{-1}\psi^{-1}(U'), V = \psi^{-1}\varphi^{-1}(V')$ とおけば $P \in U \subseteq X, Q \in V \subseteq Y$ となる。U と V が isomorphic であることは既に Corollary 4.5 の証明中に示されている。

1.4.8

(a) M の cardinality を $|M|$ と表す。まず、$|\mathbf{A}^1| = |\mathbf{P}^1| = |k|$ である。代数的閉体は無限集合なので、$|\mathbf{A}^n| = |\mathbf{P}^n| = |k|$ である ([3], 定理 23, p.72)。よって $|X| \leq |k|$ となる。

以下、$|X| \geq |k|$ を示す。X が projective の場合は $(X \supseteq)X_i = X \cap Z(x_i)^c$ で証明すればいいので、X は affine としてよい。また、X の既約成分で証明できれば十分なので、その既約成分を改めて variety X とする。

さて、$\dim X = r$ とする。$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in X$ とし、$H_c = Z(\sum_i c_i(x_i - a_i))$ とおく。このとき、$X \not\subseteq H_c$ となる $c \in k^n$ が存在する。なぜなら $\bigcap_c H_c = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ だからである。

このとき、Exercise 1.8 から $X \cap H_c$ の既約成分の次元は $r - 1$ である。この既約成分を改めて variety X とおく。なお、Exercise 1.8 では Y は affine variety となっているが、quasi-affine でも成立する (Proposition 7.1 の証明前半に示されている)。これを繰り返せば variety X の次元は 1 となる。

次元 1 の X における真閉集合は有限集合であり、逆に有限集合は閉集合である。なぜなら、次元の定義から、その閉集合の既約成分 (有限個しかないー Proposition 1.5) の次元は 0 であり、1 点は次元 0 の既約閉集合だからである (Exercise 1.10(d))。

ここで X を projective とみなして、Proposition 4.9 を適用すると、X は $\mathbf{P}^2$ のある hypersurface $H = Z(f)$ と birational である (f: 斉次既約多項式)。すなわち、$X \supseteq U \approx V \subseteq H \subseteq \mathbf{P}^2$ となる。$\dim H = 1$ より閉集合 $H - V$ は有限集合なので $|X| \geq |U| = |V| = |H|$ である。

$H \cap Z(x_i)^c \neq \varnothing$ とするとそれは affine とみなせるので、それを改めて H とおく。射影 $p_1 : H \to \mathbf{A}^1,\ (x_1, x_2) \mapsto x_1$ は k が代数的閉体なので全射である。よって $|H| \geq |k|$ なので、先の結果と合わせると、$|X| \geq |U| = |V| = |H| \geq |k|$ を得る。

従って、逆向きの結果と合わせて、$|X| = |k|$ を得る。

(b) Curve(1 次元既約閉集合) を G とすると、(a) より $|G| = |\mathbf{A}^1|$ なので全単射 $\varphi : G \to \mathbf{A}^1$ が存在する。φ は有限集合を有限集合に写すので、位相同型である。よって全ての曲線は位相同型となる。

1.4.9

$X_0 = X \cap Z(x_0)^c$ とすると、$K(X_0) \approx K(X)$, $\dim X_0 = \dim X = r$ なので、X_0 を X として進める。

Proposition 4.9 と同様にして、$K = K(X)$ の生成元を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とし、その中の $x_1, x_2, \cdots, x_r$ が超越基底で、$K/k(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ が分離代数拡大となるようにできる。ここで、不要な x_i は除いてあるとしてよい。すなわち、$k(x_1, \cdots, x_n) \neq k(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ とする。

ここであえて代数拡大 $K/k(x_1, x_r, \cdots, x_{n-2})$ をとる。これは分離拡大である ([2], vol.I, §5, Lemma 2, p.69)。すると、$K = L(x_{n-1}, x_n)$ なので、Theorem 4.6A から $K = L(y'), y' = c_{n-1}x_{n-1} + c_n x_n$ とできる。このとき、Theorem 4.6A によれば $c_i \in L$ であるが、[2], vol.I, §9, Theorem 19, p.84-85 の証明において、$c_i \in k$ と変更できることがわかる。実際、与えられた多項式 $g \in L[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ に対して $g \neq 0$ を満たす元 $\{c_i\}_{0 \leq i \leq n}$ は L の任意の無限部分集合 T から選ぶことができる。

x_{n-1} は必要な生成元なので、$c_{n-1} \neq 0$ であり、$y = x_{n-1} + c x_n, c = c_n / c_{n-1}$ とおくと、$K = L(y)$ となる。

ここで $\mathbf{P}^n$ に話を戻す。$\mathbf{A}^n$ の元は Proposition 3.3 の φ_0 で戻して $\mathbf{P}^n$ の元とみなす。$P = (0, 0, \cdots, 0, -c, 1)$ とおくと X_0 の元の x_0 座標は非零だから $P \notin X$ である。Exercise 3.14 によれば、$P' = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ から $Q' = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ の $\mathbf{P}^{n-1} \approx Z(x_n)$ への projection は $(a_n x_0 - a_0 x_n, a_n x_1 - a_1 x_n, \cdots, a_n x_{n-1} - a_{n-1} x_n)$ で与えられる。従って、P から X_0 を $\mathbf{P}^{n-1}$ へ projection すると

$$\rho(1, x_1, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = (1, x_1, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1} + c x_n) = (1, x_1, \cdots, x_{n-2}, y)$$

となる。

$K(X') = k(x_1, \cdots, x_{n-2}, y) \approx K(X) = k(x_1, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$ であり、対応する morphism が P からの projection ρ なので、それは birational morphism である。

この操作を有限回繰返せば、Propostion 4.9 の birational map となる。

1.4.10

Y の $O=(0,0)$ における blowing-up は

$$y^2=x^3, xu=ty \text{ at } \mathbf{A}^2\times\mathbf{P}^1$$

で与えられる。

$t\neq 0$ とすると $x^2(u^2-xt^2)=0$ なので、$x=0$ or $xt^2-u^2=0$ が得られる。$x=0$ のときは $y=0,\forall(t,u),t\neq 0$ となり、exceptional curve E である。$xt^2=u^2$ のときは $yt^3=u^3$ となる。

$u\neq 0$ とすると $y^2(u^3-yt^3)=0$ なので、$y=0$ or $yt^3-u^3=0$ が得られる。$y=0$ のときは $x=0,\forall(t,u),u\neq 0$ となり、exceptional curve E である。$yt^3=u^3$ のときは $xt^2=u^2$ となる。

従って、合わせると Y の blowing-up は

$$\text{Exceptional curve E} : x=0, y=0, \forall(t,u)\in\mathbf{P}^1$$

$$\tilde{Y} : xt^2-u^2=0, yt^3-u^3=0, \forall(t,u)\in\mathbf{P}^1$$

からなる。

$\tilde{Y}$ と E の交点は $(x,y,t,u)=(0,0,1,0)$ の 1 点である。$t\neq 0$ なので、$\tilde{Y}$ は $\tilde{Y}=\{(u^2,u^3,1,u)|u\in k\}$ とかける。

Exercise 4.8(b) より $\tilde{Y}$ と $\mathbf{A}^1$ は位相同型である。また、$\mathbf{A}^1\to\tilde{Y}, u\mapsto(u^2,u^3,1,u)$ とその逆函数は共に morphism であるから、$\tilde{Y}\approx\mathbf{A}^1$ となる。Exercise 4.8(b) より、$\tilde{Y}$ と Y も位相同型であるが、Exercise 3.2(a) で示したように、isomorphic ではない。

References

[1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1963

[2] O. Zariski and P. Samuel: *Commutative Algebra*, Van Nostrand, 1958

[3] 彌永昌吉、小平邦彦: 現代数学概説 1, 岩波, 1961