1 Varieties

1.3 Morphisms

1.3.1

(a) Exercise1.1 の結果から conic Y は $A(Y) = k[x]$ or $k[x,y]/(xy-1)$ を満たす。前者の場合は $Y = \mathbf{A}^1$ であり、後者の場合は $Y = Z(xy-1) \approx \mathbf{A}^1 - 0$ である。

(b) $\mathbf{A}^1$ の閉集合は有限点からなるので、開集合は

$$U = \mathbf{A}^1 - \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \approx Z(y\prod_i (x - a_i) - 1)$$

の形となる。このとき $A(U) = k[x,y]/(y\prod_i(x-a_i) - 1)$ であるが、この中には k 以外の単元 $\prod_i(x-a_i)$ が存在する。一方 $A(\mathbf{A}^1) = k[x]$ には k 以外に単元は存在しないので、同型ではあり得ない。従って、$\mathbf{A}^1 \not\approx U$ である。

(c) $\mathbf{P}^2$ における既約 cone は、変数の 1 次変換を用いると k の代数的閉体性から $x^2 - yz$ の形に集約される。これに対応する variety は $Y := Z(x^2 - yz) = \{(x_0x_1, x_0^2, x_1^2) | x_0, x_1, x_2 \in k\}$ となる。このとき、

$$\varphi : \mathbf{P}^1 \to Y,\ (x_0, x_1) \mapsto (x_0x_1, x_0^2, x_1^2)$$

は Proposition3.6 から isomorphism なので、$Y \approx \mathbf{P}^1$ である。

(d) $\mathbf{A}^2$ では、平行で異なる直線 ℓ_1, ℓ_2 は共通部分を持たない: $\ell_1 \cap \ell_2 = \varnothing$
もし、$\mathbf{A}^2 \approx \mathbf{P}^2$ として、その isomorphism を φ とおく。このとき、

$$\varphi(\ell_1) \cap \varphi(\ell_2) = \varphi(\ell_1 \cap \ell_2) = \varnothing$$

となる。一方、ℓ_i は curve (affine variety) なので $\varphi(\ell_i)$ も curve であり、後出の Exercise3.7(a) を用いると、$\varphi(\ell_1) \neq \varphi(\ell_2)$ より、$\varphi(\ell_1) \cap \varphi(\ell_2) \neq \varnothing$ となる。これは矛盾である。

(e) X を projective variety、Y を affine variety とする。Proposition3.5 から $A(Y) \approx \mathcal{O}(X)$ であるが、

$$\mathcal{O}(X) \approx k \approx A/\mathfrak{m}_P = A/I(P) = A(P)$$

だから $A(Y) \approx A(P)$ であり、Proposition3.7 より $X \approx Y = P$ となる。

1.3.2

(a) $X = \mathbf{A}^1,\ Y = \{(t^2, t^3) | t \in k\}$ とすると $\varphi : X \to Y,\ t \mapsto (t^2, t^3)$ は全単射かつ morphism であり、連続である。また、$\mathbf{A}^1$ の閉集合は有限個の点からなり、

その φ による像も有限個の点からなるので閉集合である。従って、φ^{-1} も連続であり、X と Y は位相同型である。

φ に対応する k 準同型写像を $\tilde{\varphi} : A(Y) \to A(X),\ f \mapsto f \circ \varphi$ とすると、$(\tilde{\varphi} \circ x)(t) = t^2,\ (\tilde{\varphi} \circ y)(t) = t^3$ である。よって $\tilde{\varphi}(A(Y)) = k[t^2, t^3]$ となるが、これは t を含まないので $A(X) = k[t]$ には等しくない。従って $\tilde{\varphi}$ は同型写像ではないので、Corollary3.7 より φ は isomorphism ではあり得ない。

(b)　k の標数 $p > 0$ に対する $\varphi : \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^1,\ t \mapsto t^p$ は k が代数的閉体なので全射である。また体から体への準同型でもあるので単射である。$\mathbf{A}^1$ の閉集合は有限個の点からなるので、全単射は連続であり、従って φ は位相同型である。

$A(\mathbf{A}^1) = k[t]$ なので $\tilde{\varphi}(t) = t^p$ となるが、$t \notin k[t^p]$ より $\tilde{\varphi}$ は全単射ではない。従って φ は isomorphism ではない。

1.3.3

(a)　φ は morphism なので

$$\varphi_P^* : \mathcal{O}_{\varphi(P),Y} \to \mathcal{O}_{P,X},\ < U, f > \mapsto < \varphi^{-1}(U), f \circ \varphi >$$

が定義できる。これは準同型である。

(b)　φ が isomorphism とすると φ, φ^{-1} は morphism なので、$\varphi_P^*, (\varphi^{-1})_{\varphi(P)}^*$ が存在する。$\varphi^{-1} \circ \varphi = id$ より、

$$\varphi_P^* \circ (\varphi^{-1})_{\varphi(P)}^* = (\varphi^{-1} \circ \varphi)_P^* = id_P^* = id_{\mathcal{O}_{\varphi(P),Y}}$$

が成立するので φ_P^* は環の同型写像である。

逆に morphism φ が位相同型写像で、任意の点 $P \in X$ において $\varphi_P^* : \mathcal{O}_{\varphi(P),Y} \to \mathcal{O}_{P,X}$ が環の同型写像とする。$< V, g > \in \mathcal{O}_{P,X}$ に対して、ある $< U, f > \in \mathcal{O}_{\varphi(P),Y}$ が存在して $\varphi_P^*(< U, f >) = < V, g >$ を満たす。$\varphi_P^*(< U, f >) = < \varphi^{-1}(U), f \circ \varphi >$ だから $V \cap \varphi^{-1}(U) \neq \varnothing$ において $f \circ \varphi = g$、よって $f = g \circ \varphi^{-1}$ である。このとき $< \varphi(V), g \circ \varphi^{-1} > \sim < U, f > \in \mathcal{O}_{\varphi(P),Y}$ より、φ^{-1} は morphism である。

以上により φ は isomorphism となる。

(c)　$< U, f > \in \mathcal{O}_{\varphi(P),Y}$ に対して

$$\varphi_P^*(< U, f >) = < \varphi^{-1}(U), f \circ \varphi > = 0_{\mathcal{O}_{P,X}}$$

とすると $(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(U)) = 0$ となる (これは必ずしも $f(U) = 0$ を意味しないことに注意)。

開集合 $S := U \cap Z(f)^c$ とおく。このとき $\varphi(a) \in \varphi(X) \cap S$ とすると $\varphi(a) \subseteq S \subseteq U$ より $f\varphi(a) \neq 0, a \in \varphi^{-1}(U)$ となるので、$(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(U)) = 0$ に矛盾するから、$\varphi(X) \cap S = \varnothing$ である。

従って $S^c \supseteq \varphi(X)$ であり、$S^c \supseteq \overline{\varphi(X)} = Y$ から $S = \varnothing$、すなわち $f(U) = 0 \Leftrightarrow < U, f > = 0_{\mathcal{O}_{\varphi(P),Y}}$ が得られる。

1.3.4

$\rho_d : \mathbf{P}^n \to \rho_d(\mathbf{P}^n)(\subseteq \mathbf{P}^N)$ が位相同型であることは Exercise2.12(c) で示した。ρ_d は明らかに morphism である。

$\forall P \in \mathbf{P}^n$ に対して $< U, f >\in \mathcal{O}_{P,\mathbf{P}^n}$ とすると f は二つの同次斉次多項式で $f = g/h$ とかける ($h(U) \not\ni 0$)。P で非零な斉次多項式を分母子に掛けると $\deg g = \deg h = dr$ とできる (r はある正整数)。こうしても U を適切に変えることにより、$h(U) \not\ni 0$ は満たされる。すると

$$g(x_0, x_1, \cdots, x_n) = g'(M_{i_1}, M_{i_2}, \cdots, M_{i_r})$$

の形にかける。ここで $g' \in k[y_0, y_1, \cdots, y_N]$ である。h についても同様である。

このとき $f' = g'/f'$ は $\rho_d(U)$ で regular であるから

$$f' \circ \rho_d = (g'/h')\rho_d = (g' \circ \rho_d)/(h' \circ \rho_d) = g/h = f$$

となる。従って、$f \circ \rho_d^{-1} = f'$ が regular なので ρ_d^{-1} は morphism である。

1.3.5

f を d 次斉次多項式とする。f における d-upple 単項式はある M_i に等しいので、対応する変数 y_i に置き換えた 1 次式を f' とおくと $f = f' \circ \rho_d$ である。このとき $H' = Z(f')$ は $\mathbf{P}^N$ の hyperplane で、$\rho_d(H) = Z(f') \cap \rho_d(\mathbf{P}^n)$ が成り立つ:

$$\rho_d(H) = \rho_d(f^{-1}(0)) = \rho_d(\rho_d^{-1}(f'^{-1}(0))) = \rho_d(\mathbf{P}^n) \cap Z(f') = \rho_d(\mathbf{P})^n \cap H'$$

$V = \rho_d(\mathbf{P}^n)$ とすると、Proposition2.2 と同様な証明により $\mathbf{P}^N - H' \approx \mathbf{A}^N$ となる。この対応による varitey V の像を varitey V_a とする。このとき、

$$\rho_d(\mathbf{P}^n - H) = \rho_d(\mathbf{P}^n) - \rho_d(H) = V - (H' \cap V) = V \cap (\mathbf{P}^N - H') \approx V_a \cap \mathbf{A}^N$$

は affine variety なので $\mathbf{P}^n - H$ も affine variety とみなせる。

1.3.6

$X = \mathbf{A}^2 - \mathbf{0}$ のとき、$f \in \mathcal{O}(X)$ はある開集合 U において有理関数 $f = g/h, h(U) \not\ni 0$ とかける。ここで、g, h には共通因子がないとし、h の 1 次以上の既約因数 p の存在を仮定して $h = ph'$ とすると、$g = fph'$ より $Z_X(\mathfrak{p}) \subseteq Z_X(\mathfrak{g})$ が得られる。ここで $Z_X(\mathfrak{a}) := X \cap Z(\mathfrak{a}),\ \mathfrak{p} = (p),\ \mathfrak{g} = (g)$ とおいた。よって

$$\overline{Z_X(\mathfrak{p})} \subseteq \overline{Z_X(\mathfrak{g})} = \overline{X \cap Z(\mathfrak{g})} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Z(\mathfrak{g})} \subseteq \overline{Z(\mathfrak{g})} = Z(\mathfrak{g})$$

である。一方、$\mathfrak{p}$ は prime ideal であって、$Z_X(\mathfrak{p}) = X \cap Z(\mathfrak{p})$ から $Z_X(\mathfrak{p})$ は既約閉集合 $Z(\mathfrak{p})$ における開集合なので、$\overline{Z_X(\mathfrak{p})} = Z(\mathfrak{p})$ となる。よって、上式と合わせて $Z(\mathfrak{p}) \subseteq Z(\mathfrak{g})$ が得られる。すると

$$IZ(\mathfrak{p}) \supseteq IZ(\mathfrak{g}) \Rightarrow (p) \supseteq \sqrt{(g)} \supseteq (g)$$

となり、g は p の倍数となって、g, h が互いに素という仮定に反する。従って f は U 上で多項式で書け、U をさらに $\mathbf{A}^2$ の開集合とみると、$< U, f >\sim< \mathbf{A}^2, f >$

より、$f \in k[x,y]$ となる。逆に $k[x,y]$ の多項式は X 上の regular 関数なので、結局 $\mathcal{O}(X) = k[x,y] = A(\mathbf{A}^2)$ が得られる。

X が affine variety と仮定すると、Propostion3.5 から $id : A(\mathbf{A}^2) \to \mathcal{O}(X)$ に対応する isomorphism $\psi : X \to \mathbf{A}^2$ が存在する。Propostion3.5 の証明にあるように、任意の $P \in X$ に対して $\psi(P) = (id(x_1)(P), id(x_2)(P)) = (x_1(P), x_2(P)) = P$ だから、ψ は埋め込みとなる。しかし、これは全射ではないので、isomorphism ということに反する。

1.3.7

(b)　$Y \subseteq H$ ならば $Y \cap H = Y \neq \varnothing$ となるので $Y - H \neq \varnothing$ とする。

Y が projective variety なので、$Y - H$ は Y の開集合だから既約である。また $Y - H = Y \cap (\mathbf{P}^n - H)$ からこれは $\mathbf{P}^n - H$ で閉集合である。よって $Y - H$ は $\mathbf{P}^n - H \approx \mathbf{A}^n$(Exercise3.5) で既約閉集合なので affine variety である。もし $Y \cap H = \varnothing$ とすると、$Y - H = Y$ は projective variety でもあるので、Exercise3.1(e) より $Y = Y - H$ は 1 点からなり、次元は 0 となる。これは Y の仮定に反するので、$Y \cap H \neq \varnothing$

(a)　$\mathbf{P}^2$ における curve は既約多項式 f で与えられる $Z(f)$ なので hypersurface でかつ projective variety である。Exercise2.8 より $\dim Z(f) = 1$ なので (b) を適用でき、二つの curve の共通部分は非空となる。

1.3.8

$Y_i = \mathbf{P}^n - H_i \approx \mathbf{A}^n$ より affine とみられるから、Theorem3.4 の証明にあるように $\mathcal{O}(Y_i) = A(Y_i) \approx \mathbf{S}(Y)_{(x_i)}$ の元はある斉次多項式 g によって $g/x_i^{\deg g}$ の形に表せる。ここで $gcd(g, x_i) = 1$ である。

さて regular 関数 $f \in \mathbf{P}^n - H_i \cap H_j$ を取ると $\mathbf{P}^n - H_i \cap H_j \supseteq \mathbf{P}^n - H_i, \mathbf{P}^n - H_j$ だから f は $\mathbf{P}^n - H_i, \mathbf{P}^n - H_j$ でも regular である。よって、$f \in \mathcal{O}(Y_i), \mathcal{O}(Y_j)$ であり、$f = g_i/x_i^{\deg g_i} = g_j/x_j^{\deg g_j}$ から $g_i x_j^{\deg g_j} = g_j x_i^{\deg g_i}$ が得られる。$k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ は UFD なので $gcd(g_j, x_i) = 1$ より $\deg g_i = 0$ でなければならず、$f \in k$ となる。

なお、$Y = \mathbf{P}^n$ とすると、$\mathbf{P}^n = \bigcup_i Y_i = \mathbf{P}^n - \bigcap_i H_i$ より $f \in k$ となる。

1.3.9

$X = \mathbf{P}^1, Y = Z(z^2 - xy)$ とおくと、Exercise3.1(c) より $X \approx Y$ である。

一方、$S(X) = k[x,y],\ S(Y) = k[x,y,z]/(z^2 - xy)$ であるが、これらは同型にはならない。なぜなら、$\dim_k S(X)_1 = 2$ であるが、$\dim_k S(Y)_1 = 3$ である。ここで、$S(X)_d$ は次数付き環 $S(X)$ の d 次部分であり、k 上線型空間となっている。

1.3.10

$f' : V' \subseteq Y' \to k$ を regular 関数とする。f' は Y の regular 関数ではないので、$\varphi : X \to Y$ の morphism 性を利用できるように拡張する。

$\varphi' = \varphi|_{X'}$ とおく。$\forall P \in \varphi'^{-1}(V')$ に対し $Q = \varphi(P)$ とおくと、$Q \in \exists V'_Q \subseteq V'$ で f' は有理関数 $f' = g/h, h(V'_Q) \not\ni 0$ とできる。このとき $V'_Q \subseteq V := Z(h)^c$ であり、$f := g/h$ は Y の開集合 V で regular 関数である。

$\varphi : X \to Y$ は morphism なので $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(V) \to k$ は regular 関数である。$V'_Q \subseteq V$ より $\varphi'^{-1}(V'_Q) \subseteq \varphi^{-1}(V)$ だから $\varphi'^{-1}(V'_Q)$ で $f' \circ \varphi = (g/h) \circ \varphi = f \circ \varphi$ は regular 関数となる。

従って、$\varphi' = \varphi|_{X'} : X' \to Y'$ は morphism である。

1.3.11

Y が subvariety とは、既約で $Y = U \cap \overline{Y}$ の形でかけることをいい、さらに closed subvariety はそれ自身が closed なので、結局 closed subvariety は既約閉集合である。

まず、X が (quasi-)affine variety とする。Theorem3.2(c) より $\mathcal{O}_P \approx A(X)_{\mathfrak{m}_P}$ なので $\mathcal{O}_P$ の prime ideal は $\mathfrak{m}_P$ に含まれる prime ideal である。これは P を含む既約閉集合、すなわち closed subvariety に 1 対 1 対応している。

次に X が (quasi-)projective variety とする。$X_i = X - Z(x_i)$ とすると $X = \bigcup_i X_i$ であり、X_i は affine とみなせる。$P \in X_i$ とする。このとき、Theorem3.4 の証明にあるように

$$\mathcal{O}_{P,X} = \mathcal{O}_{P,X_i} \approx A(X_i)_{\mathfrak{m}'_P} (\approx S(X)_{(\mathfrak{m}_P)})$$

であり、この対応によって $\mathcal{O}_P$ に含まれる prime ideal は $A(X_i)$ の $\mathfrak{m}'_P$ に含まれる prime ideal に対応し、これはまた x_i の斉次化により $S(X)$ の $\mathfrak{m}_P$ に含まれる斉次 prime ideal に対応する。これは Exercise2.4(b) より X の P を含む既約閉集合に 1 対 1 対応している。

逆に X の P を含む既約閉集合が与えられたとする。これは $S(X)$ の $\mathfrak{m}_P$ に含まれる斉次 prime ideal に対応し、さらに $S(X)_{(\mathfrak{m}_P)}$ の prime ideal に対応する。$\mathcal{O}_P = S(X)_{(\mathfrak{m}_P)})$ よりこれは $\mathcal{O}_P$ の prime ideal に対応する。

1.3.12

X が projective のときは、$X_i = X \cap U_i$ とすると $X = \bigcup_i X_i$ であり、X_i は affine とみなせる。ここで $U_i = \mathbf{V}^n - Z(x_i) \approx \mathbf{A}^n$ である。X が元々affine のときは $X_i = X$ とすればいいので、やはりこの形になる。

$P \in X_i$ とする。Exercise1.10(b) と Proposition1.10 から $\dim X = \sup \dim X_i = \sup \dim \overline{X_i}$ が成り立つ。$< U, f > \in K(\overline{X_i})$ とすると $U' = U \cap X_i \subseteq U$ は X の開集合だから $< U, f > \sim < U', f > \in K(X)$ となり、$K(\overline{X_i}) = K(X)$ が得られる。さらに Theorem3.2(d) を用いると $\dim \overline{X_i} = \mathrm{tr.deg} K(\overline{X_i}) = \mathrm{tr.deg} K(X)$ が成立するから $\dim \overline{X_i}$ は i に依存せず、$\dim X = \dim \overline{X_i}$ となる。Theorem3.2(c) より $\dim \overline{X_i} = \dim \mathcal{O}_{P,\overline{X_i}}$ であるが、$\mathcal{O}_{P,\overline{X_i}} = \mathcal{O}_{P,X}$ なので、

$$\dim X = \dim \overline{X_i} = \dim \mathcal{O}_{P,\overline{X_i}} = \dim \mathcal{O}_{P,X} = \dim \mathcal{O}_P$$

となる。

1.3.13

$\mathcal{O}_{Y,X}$ では $<U,f> \pm <V,g> = <U\cap V, f\pm g>, <U,f><V,g> = <U\cap V, fg>$ なので、環をなす。

$\mathfrak{m} = \{<U,f> | f(U\cap Y)=0\}$ は極大 ideal であることを示す。
$<U,f>, <V,g> \in \mathfrak{m}$ のとき、$(f-g)(U\cap V\cap Y)=0$ より

$$<U,f> - <V,g> = <U\cap V, f-g> \in \mathfrak{m}$$

であり、$<W,h> \in \mathcal{O}_{Y,X}$ に対して $(hf)(U\cap W\cap Y)=0$ より

$$<W,h><U,f> = <U\cap W, hf> \in \mathfrak{m}$$

なので、$\mathfrak{m}$ は ideal である。

$<U,f> \notin \mathfrak{m}$ のとき $f(U\cap Y) \neq 0$ より $(U\cap Y)\cap Z(f)^c \neq \varnothing$ である。$V = U\cap Z(f)^c$ とすると $f(V) \not\ni 0$ から $1/f$ は V で regular であり $V\cap Y \neq \varnothing$ より $<V,1/f> \in \mathcal{O}_{Y,X}$ である。これは $<U,f>$ の逆元なので $<U,f>$ は単元である。従って $\mathfrak{m}$ は唯一の極大 ideal で、$\mathcal{O}_{Y,X}$ は局所環である。

次に $\mathcal{O}_{Y,X}/\mathfrak{m} \approx K(Y)$ を示す。ρ を次のように定義する。

$$\rho : K(Y) \to \mathcal{O}_{Y,X}/\mathfrak{m},\ <U_Y, f> \mapsto <Z(h)^c, g/h>_{\mathfrak{m}}$$

ただし $U_Y \neq \varnothing$ で f は有理関数 $f = g/h, h(U_Y) \not\ni 0$ とできるので、その g,h を用いている。g/h は $Z(h)^c$ で regular であり、$Z(h)^c \cap Y \supseteq U_Y \neq \varnothing$ なので、$<Z(h)^c, g/h> \in \mathcal{O}_{Y,X}$ である。その $\mathfrak{m}$ による剰余類を $<Z(h)^c, g/h>_{\mathfrak{m}}$ としている。

(well-define) $<U_Y, g/h> \sim <U_Y, g'/h'> \in K(Y)$ とする。このとき $Z(h)^c \cap Y \supseteq U_Y,\ Z(h')^c\cap Y \supseteq U_Y$ より、$K(Y)$ において

$$<Z(h)^c\cap Y, g/h> \sim <U_Y, g/h> \sim <U_Y, g'/h'> \sim <Z(h')^c\cap Y, g'/h'>$$

だから、$Z(h)^c\cap Z(h')^c \cap Y$ で $g/h - g'/h' = 0$ であり、これは

$$<Z(h)^c, g/h> - <Z(h')^c, g'/h'> = <Z(h)^c\cap Z(h')^c, g/h - g'/h'> \in \mathfrak{m}$$

を意味する。

(全射) $<U,f> \in \mathcal{O}_{Y,X}$ とする。$U_Y = U\cap Y \neq \varnothing$ とおくと $<U_Y, f> \in K(Y)$ なので、$\exists V_Y \subseteq U_Y$ で $f = g/h,\ h(V_Y) \not\ni 0$ とかける。$V_Y \subseteq Z(h)^c \cap Y$ だから、$K(Y)$ において

$$<U_Y, f> \sim <V_Y, f> \sim <V_Y, g/h> \sim <Z(h)^c\cap Y, g/h>$$

となる。従って、$U_Y \cap Z(h)^c \cap Y = U\cap Z(h)^c\cap Y$ で $f = g/h$ である。これは

$$<Z(h)^c, g/h> - <U,f> = <Z(h)^c \cap U, g/h - f> \in \mathfrak{m}$$

を意味する。

(単射) $\rho(U_Y, f) = <Z(h)^c, g/h>_{\mathfrak{m}} = 0$ とする。U_Y で $f = g/h,\ h(U_Y) \not\ni 0$ であり、$Z(h)^c \cap Y$ で $g = 0$ である。$U_Y \subseteq Z(h)^c\cap Y$ だから $<U_Y, f> \sim <U_Y, g/h> = 0$ となる。

(準同型) 明らかである。

$\dim \mathcal{O}_{Y,X} = \dim X - \dim Y$ の証明は、X, Y が affine のときに証明すれば十分である。なぜなら、X や Y が projective の場合は、$X = \bigcup_i X_i$ あるいは $Y = \bigcup_i Y_i$ とすると、X_i, Y_i は affine であり (いずれも非空としてよい)、Exercise3.12 で示した $\dim X = \dim X_i, \dim Y = \dim Y_i$、および次に示す $\mathcal{O}_{Y,X} = \mathcal{O}_{Y_i,X_i}$ を用いれば

$$\dim \mathcal{O}_{Y,X} = \dim \mathcal{O}_{Y_i,X_i} = \dim X_i - \dim Y_i = \dim X - \dim Y$$

が成立するからである。

$\mathcal{O}_{Y,X} \approx \mathcal{O}_{Y_i,X_i}$ の証明

対応 $< V, f > \in \mathcal{O}_{Y,X} \mapsto < V \cap X_i, f > \in \mathcal{O}_{Y_i,X_i}$ を考える。まず、X が既約で V, X_i とも X の open なので、$V \cap X_i \neq \varnothing$ である。また $V_i = V \cap X_i$ は X_i でも open、$V_i \cap Y_i = V \cap X_i \cap Y_i = V \cap Y_i = V \cap Y \cap U_i = (V \cap Y) \cap (U_i \cap Y)$ において、$V \cap Y \neq \varnothing, U_i \cap Y \neq \varnothing$ であり Y は既約ゆえ $V_i \cap Y_i \neq \varnothing$ となり、$< V_i, f > \in \mathcal{O}_{Y_i,X_i}$ が得られる。

ここで $< V_i, f >= 0$ とすると $V_i = V \cap X_i = V \cap U_i \cap X$ は X でも open なので $< V, f > \sim < V_i, f >= 0$ となるから対応は単射である。

$< V_i, f > \in \mathcal{O}_{Y_i,X_i}$ で $V_i \cap Y_i \neq \varnothing$ とすると V_i は X_i の open なので X の open でもあり、$V_i \cap Y \supseteq V_i \cap Y_i \neq \varnothing$ より $< V_i, f > \in \mathcal{O}_{Y,X}$ となる。よって、対応は全射である。準同型性は明らかである。

X, Y が affine とする。

まず $\mathcal{O}_{Y,X} \approx A(X)_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ を示す。ただし、$\mathfrak{p} = I(Y) \supseteq I(X), \tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}/I(X)$ である。Y が既約なので、$\mathfrak{p}$ は prime ideal である。

$$\psi : A(X)_{\tilde{\mathfrak{p}}} \to \mathcal{O}_{Y,X}, \tilde{f}/\tilde{g} \mapsto < U_g, f/g >$$

とおく。ここで、$\tilde{g} \notin \tilde{\mathfrak{p}} \leftrightarrow g \notin I(Y) \leftrightarrow g(Q) \neq 0, \exists Q \in Y$ より $U_g = X - Z(g)$ とするとこれは open で $Q \in U_g \cap Y \neq \varnothing$ だから $< U_g, f/g > \in \mathcal{O}_{Y,X}$ である。

(well-define) $\tilde{f}/\tilde{g} = 0 \to \tilde{f} = 0 \to f \in I(X) \to f(U_g) = 0 \to < U_g, f/g >= 0$

(単射) $< U_g, f/g >= 0 \to f(U_g) = 0 \to < U_g, f > \sim < U_g, 0 > \to f = 0$ at $X \to f \in I(X) \to \tilde{f}/\tilde{g} = 0$

(全射) $< U, f > \in \mathcal{O}_{Y,X}$ とする。$\exists Q \in U \cap Y$ を取ると $(Q \in) \exists U_Q \subseteq U$ で $f = g/h, U_Q \subseteq Z(h)^c$ とできる。このとき $h \notin I(Y) = \mathfrak{p} \to \tilde{h} \notin \tilde{p} \to \tilde{g}/\tilde{h} \in A(X)_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ より $\psi(\tilde{g}/\tilde{h}) =< Z(h)^c, g/h > \sim < U_Q, f > \sim < U, f >$ となる。準同型性は明らかである。

Theorem1.8A(b) から

$$\mathrm{height}\tilde{\mathfrak{p}} + \dim A(X)/\tilde{\mathfrak{p}} = \dim A(X)$$

が成立する。ここで、Proposition2.1, i), [1] より $A(X)/\tilde{\mathfrak{p}} = (k[\boldsymbol{x}]/I(X))/(\mathfrak{p}/I(X)) = k[\boldsymbol{x}]/I(Y) = A(Y)$ であり、また $\dim A(X)_{\tilde{\mathfrak{p}}} = \mathrm{height}\tilde{\mathfrak{p}}$ から、

$$\dim \mathcal{O}_{Y,X} = \dim A(X)_{\tilde{\mathfrak{p}}} = \dim A(X) - \dim A(Y) = \dim X - \dim Y$$

となる。

1.3.14

$\mathbf{P}^n$ を $Z(x_{n+1})(\subseteq \mathbf{P}^{n+1})$ とみなす。$P = (a_0, a_1, \cdots, a_{n+1}) \in \mathbf{P}^{n+1} - \mathbf{P}^n$ のとき $a_{n+1} \neq 0$ である。

P, $Q = (x_0, x_1, \cdots, x_{n+1})$ を通る直線は $\ell_{P,Q} = (ua_0+vx_0, ua_1+vx_1, \cdots, ua_{n+1}+vx_{n+1}), (u,v) \in \mathbf{P}^1$ で与えられる (以下、$(ua_0 + vx_0, ua_1 + vx_1, \cdots, ua_{n+1} + vx_{n+1}) = ua + vx$ とも記す)。この直線と $\mathbf{P}^n \approx Z(x_{n+1})$ との交点は $(a_{n+1}x_0 - a_0x_{n+1}, a_{n+1}x_1 - a_1x_{n+1}, \cdots, a_{n+1}x_n - a_nx_{n+1}, 0)$ となる:

$$\varphi(x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = (a_{n+1}x_0 - a_0x_{n+1}, a_{n+1}x_1 - a_1x_{n+1}, \cdots, a_{n+1}x_n - a_nx_{n+1})$$

(a) φ は明らかに morphism である。

(b) $Y = \{(t^3, t^2u, tu^2, u^3)\} \subseteq \mathbf{P}^3 = \{(x,y,z,w)\}, \mathbf{P}^2 = H_2 = Z(z), P = (0,0,1,0)$ とする。このとき $\varphi(Y) = \{(t^3, t^2u, u^3)\}$ であるが、$x = t^3, y = t^2, w = u^3$ として t, u を消去すると $y^3 = x^2w$ となる。

逆に $y^3 = x^2w$ のとき、$(x,y,w) = (x^3, x^2y, x^2w) = (x^3, yx^2, y^3) \in \varphi(Y)$ となる。よって、$y^3 = x^2w$ が解で、これは cuspidal cubic curve である。

1.3.15

(a) 任意の $x_0 \in X$ に対して $\pi_{x_0} : x_0 \times Y \to Y,\ (x_0, y) \mapsto y$ は全単射である。さらに、

$x_0 \times V$: 閉集合 $\Leftrightarrow$ V: 閉集合

も成り立つ。なぜなら、 $x_0 \times V$ が閉集合で $Z(\mathfrak{a})$ に等しいとき

$$y \in V \Leftrightarrow f(x_0, y) = 0, \forall f \in \mathfrak{a} \Leftrightarrow y \in Z(\mathfrak{b}), \mathfrak{b} := (f(x_0, y))_{f \in \mathfrak{a}}$$

から V は閉集合となり、逆に $V = Z(\mathfrak{b})$ とすると、$x_0 \times V = Z((x - x_0) + \mathfrak{b})$ から $x_0 \times V$ は閉集合となる。従って $\pi_{x_0}, \pi_{x_0}^{-1}$ は閉写像であり、π_{x_0} は位相同型である。

$X \times Y$ が 2 つの閉集合の和集合で $X \times Y = Z_1 \cup Z_2$ と表されたとして、$X_i = \{x \in X | x \times y \subseteq Z_i\}$ とおく。このとき、$X = X_1 \cup X_2$ が成立する。実際、

$$((x \times Y) \cap Z_1) \cup ((x \times Y) \cap Z_2) = (x \times Y) \cap (Z_1 \cup Z_2) = (x \times Y) \cap (X \cap Y) = x \times Y$$

において、Y は既約閉なので位相同型な $x \times Y$ も既約閉ゆえに $(x \times Y) \cap Z_i$ は閉集合となり、従って $x \times Y$ の既約性から $x \times Y = (x \times Y) \cap Z_1$ or $(x \times Y) \cap Z_2$ となる。前者が成立したとすると、$x \times Y \subseteq Z_1$ で、これは X_1 の定義から $x \in X_1$ を意味する。後者が成立すれば $x \in X_2$ となるので、$X = X_1 \cup X_2$ が得られる。

次に X_i が閉集合であることを示す。そのためには、任意の $y_0 \in Y$ に対し $I_{y_0} = (f(x, y_0))_{f \in I(Z_1)}$ として $X_1 = \bigcap_{y_0 \in Y} Z(I_{y_0})$ が成り立つことを言えばよいが、それは次式による。

$$x \in X_1 \Leftrightarrow x \times Y \subseteq Z_1 \Leftrightarrow f(x, y_0) = 0, \forall f \in I(Z_1), \forall y_0 \in Y \Leftrightarrow x \in Z(I_{y_0}), \forall y_0 \in Y$$

よって X は閉集合の和集合で表された: $X = X_1 \cup X2$

X は既約だから $X = X_1$ or X_2 である。$X = X_1 = \{x \in X | x \times y \subseteq Z_1\}$ とすると、$X \times Y \subseteq Z_1$ となるので、$X \times Y$ は既約である。

(補足) X, Y が閉集合なら $X \times Y$ も閉集合である。なぜなら $X = Z(\mathfrak{a}), Y = (\mathfrak{b})$ とすると、$X \times Y = Z(\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}')$ だからである。ここで、$\mathfrak{a}'$ は $\mathfrak{a}$ の元 $f(x)$ を形式的に x, y の関数 $f'(x, y) := f(x)$ とみなしたものであり、$\mathfrak{b}'$ 同様である。従って、X, Y が affine variety ならば $X \times Y$ も affine variety である。

(b) $A(X) \times A(Y) \to A(X \times Y),\ (\widetilde{f(x)}, \widetilde{g(y)}) \mapsto \widetilde{f(x)g(y)}$ で定義される写像は well-define で、双線形写像である。よって、

$$\varphi : A(X) \otimes_k A(Y) \to A(X \times Y),\ \widetilde{f(x)} \otimes \widetilde{g(y)} \mapsto \widetilde{f(x)g(y)}$$

が存在する。

$A(Y)$ は k 上の線型空間であるから、基底 $\{\widetilde{f_i(y)}\}$ が存在する ([3], 第 6 章定理 2)。このとき $A(X) \otimes_k A(Y)$ の元は $\sum_i \widetilde{a_i(x)} \otimes \widetilde{f_i(y)}$ とかける。

φ は単射であることを示す。一般に $f(x, y) \in I(X \times Y) \Rightarrow f(P, y) \in I(Y), P \in X \Rightarrow f(P, \tilde{y}) = 0$ in $A(Y)$ である。よって

$$\varphi(\sum_i \widetilde{a_i(x)} \otimes \widetilde{f_i(y)}) = \sum_i \widetilde{a_i(x)} \widetilde{f_i(y)} = 0$$

とすると、$P \in X$ のとき $\sum_i a_i(P) f_i(\tilde{y}) = 0$ in $S(Y)_d$ となるが、$\{\widetilde{f_i(y)}\}$ は基底なので $a_i(P) = 0 \Rightarrow a_i(x) \in I(X) \Rightarrow \widetilde{a_i(x)} = 0$ となり、$\sum_i \widetilde{a_i(x)} \otimes \widetilde{f_i(y)} = 0$ が成立する。

φ が全射であるのは $A(X \times Y)$ の元が $f(x, y) = \sum_i g_i(x) h_i(y)$ とかけることから明らかである。

(c) (i) 射影 $p_X : X \times Y \to X$ は $(x_i \circ p_X)(x, y) = x_i, (y_j \circ p_X)(x, y) = 0$ を満たすので morphism である (Propostion3.6, p.20)。p_Y も同様に morphism である。

(ii) morphism $f : Z \to X,\ g : Z \to Y$ に対して $h : Z \to X \times Y,\ z \mapsto (f(z).g(z))$ とすると、$p_X \circ h = f,\ p_Y \circ h = g$ が成立する。

$x_i \circ h = x_i \circ f, y_j \circ h = y_j \circ g$ は regular 関数なので h は morphism である。また可換性 $p_X \circ h = f,\ p_Y \circ h = g$ を満たす h は一意的である。

(d) $r = \dim X, s = \dim Y$ とすると、

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_r = X \subsetneq X_{r+1} \subsetneq \cdots \subsetneq X_n = \mathbf{A^n}$$

$$Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_s = Y \subsetneq Y_{r+1} \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n = \mathbf{A^m}$$

となる既約閉集合系列が存在する。ここで、途中で X や Y を通過するように取れるのは、Theorem1.8A(ii) による。このとき、$\mathbf{A^{n+m}}$ に至る次の既約閉集合系列が存在する。

$X_0 \times Y_0 \subsetneq X_0 \times Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_0 \times Y_s$
$\subsetneq X_1 \times Y_s \subsetneq X_2 \times Y_s \subsetneq \cdots \subsetneq X_r \times Y_s$

$\subsetneq X_r \times Y_{s+1} \subsetneq X_r \times Y_{s+2} \subsetneq \cdots \subsetneq X_r \times Y_m$
$\subsetneq X_{r+1} \times Y_m \subsetneq X_{r+2} \times Y_m \subsetneq \cdots \subsetneq X_n \times Y_m = \mathbf{A^{n+m}}$

この長さは次元 $n+m$ を与える系列になっているので、最大長系列であり、従って $X_r \times Y_s$ に至る前半の系列も最大長系列のはずである。よって、

$$\dim X \times Y = \dim X_r \times Y_s = r + s = \dim X + \dim Y$$

が得られる。

1.3.16

最初に

$$(\mathbf{P}^n - Z(x_i)) \times (\mathbf{P}^m - Z(x_j)) \approx \mathbf{P}^{n+m} - Z(x_k),\ 0 \leq \exists k \leq n+m$$

を示す。ここで、左辺には Segre Embedding による位相が入っている。

一般性を失うことなく $i = j = 0$ としてよい。$U^{(n)} := \mathbf{P}^n - Z(x_0)$ とおいて $\psi(U^{(n)} \times U^{(m)}) \approx U^{(n+m)}$ を証明しよう。ここで ψ が Segre Embedding である。

$\rho_\psi : \psi(U^{(n)} \times U^{(m)}) \to U^{(n+m)}$
$(\cdots, z_{i,j}, \cdots) \mapsto (z_{0,0}, z_{0,1}, z_{0,2}, \cdots, z_{0,m}, z_{1,0}, \cdots, z_{n,0})$

とし

$\rho = \rho_\psi \circ \psi : U^{(n)} \times U^{(m)} \to U^{(n+m)}$

とすると

$\rho : (x_0, x_1, \cdots, x_n) \times (y_0, y_1, \cdots, y_n) \mapsto (x_0y_0, x_0y_1, \cdots, x_0y_m, x_1y_0, x_2y_0, \cdots, x_2y_0)$

となる。このとき、ρ は全単射となる。実際、単射性は明らかだし、全射性についても、$\boldsymbol{z} := (z_{0,0}, z_{0,1}, \cdots, z_{0,m}, z_{1,0}, z_{2,0}, \cdots, z_{n,0}) \in U^{(n+m)},\ z_{0,0} \neq 0$ としたとき $\boldsymbol{x} := (z_{0,0}, z_{1,0}, \cdots, z_{n,0})$、$\boldsymbol{y} := (z_{0,0}, z_{0,1}, z_{0,2}, \cdots, z_{0,m})$ とおけば $\rho(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = z_{0,0}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$ より、成り立つ。よって ρ は全単射である。ψ は全単射なので、ρ_ψ も全単射である。

次に ρ_ψ, ρ_ψ^{-1} が morphism であることを示す。$U^{(n+m)}$ は affine とみなせるので、$(z_{0,i} \circ \rho_\psi)(\cdots, z_{i,j}, \cdots) = z_{0,i}$, $(z_{j,0} \circ \rho_\psi)(\cdots, z_{i,j}, \cdots) = z_{j,0}$ から ρ_ψ は morphism となる (Proposition 3.6)。

g を $\psi(U^{(n)} \times U^{(m)})$ における r 次斉次多項式とすると、$\rho_\psi^{-1} = \psi \circ \rho^{-1}$ なので、

$$(g \circ \rho_\psi^{-1})(\boldsymbol{z}) = (g \circ \psi \circ \rho^{-1})(\boldsymbol{z}) = (g \circ \psi)(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = g(\cdots, z_{i,0}z_{0,j}, \cdots)$$

は $\boldsymbol{z}$ の $2r$ 次斉次多項式となる。よって ρ_ψ^{-1} は連続であり、$f : V \to k$ を $\psi(U^{(n)} \times U^{(m)})$ における regular 関数とすると、$f \circ \rho_\psi^{-1}$ は $U^{(n+m)}$ において regular 関数となる。すなわち、ρ_ψ^{-1} も morphism である。

従って、

$$(\mathbf{P}^n - Z(x_i)) \times (\mathbf{P}^m - Z(x_j)) \approx \mathbf{P}^{n+m} - Z(x_k),\ 0 \leq \exists k \leq n+m$$

が示された。

以上のことから、Y を projective variety とすると $Y_i = Y \cap U_i$ のとき ($Y_i \neq \varnothing$ としてよい)、$Y_i \times Y_j$ は $\mathbf{A}^{2n}$ の affine variety とみなせる。

(a) いくつかに分けて証明する。

X が閉集合のとき、$X = Z(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a}$: 斉次 ideal、$\mathfrak{a} = (f_\lambda)$, f_λ: 斉次多項式とする。このとき $f_\lambda^{(i)}$ を $f_\lambda(\boldsymbol{x})y_j^{degf_\lambda}$ において $z_{i,j} \Leftarrow x_i y_j$ とした $z_{i,j}$ の多項式とすると

$$\psi(X \times \mathbf{P}^n) = Z((f_\lambda^{(j)})_{\lambda,j}) \cap \psi(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m)$$

から $X \times \mathbf{P}^n$ は閉集合となる。実際、$Z((f_\lambda^{(j)})_{\lambda,j}) \cap \psi(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m)$ の元は $\psi(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m)$ に属するから $(\cdots, x_i y_j, \cdots) = \psi(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})$ の形をしており、$f_\lambda(\boldsymbol{x})y_j^{degf_\lambda} = 0$ を満たす。ある y_j は 0 でないので、任意の λ に対して $f_\lambda(\boldsymbol{x}) = 0$、よって $\boldsymbol{x} \in X$ となる。従って、$\psi(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \in \psi(X \times \mathbf{P}^n)$ である。$\subseteq$ は自明。

X が開集合のときは、$\psi(X \times \mathbf{P}^n) = \psi((X^c)^c \times \mathbf{P}^n) = \psi((X^c \times \mathbf{P}^n)^c) = (\psi(X^c \times \mathbf{P}^n))^c$ だから、$\psi(X \times \mathbf{P}^n)$ は開集合となる。

X, Y が閉集合なら $\psi(X \times Y) = \psi((X \times \mathbf{P}^m) \cap (\mathbf{P}^n \times Y)) = \psi((X \times \mathbf{P}^m)) \cap \psi((\mathbf{P}^n \times Y))$ から $\psi(X \times Y)$ も閉集合である。同様に、X, Y が開集合なら $\psi(X \times Y)$ も開集合である。

X, Y が locally closed とする。$X = V_x \cap C_x$, $Y = V_y \cap C_Y$ とかけるので、$X \times Y = (V_x \cap C_x) \times (V_y \cap C_Y) = (V_x \times V_y) \cap (C_x \times C_y)$ から

$$\psi(X \times Y) = \psi(V_x \times V_y) \cap \psi(C_x \times C_y)$$

より、$\psi(X \times Y)$ は locally closed となる。

X, Y が既約とすると、$\overline{X}$, $\overline{Y}$ も既約なので (Exercise 1.6)、$\overline{X}$, $\overline{Y}$ は projective variety となる。$X_i := \overline{X} \cap U_i$ は $\overline{X}$ の開集合なので既約である (Example1.1.3, p.3)。ここで $U_i = \mathbf{P}^n - Z(x_i)$ である。X_i は $\mathbf{A}^n$ で affine variety と見られるので、Exercise 3.15(a) より $X_i \times Y_j$ は既約である。一方、X_i, Y_j は各々 $\overline{X}$, $\overline{Y}$ の開集合なので、すでに示したことから $U_{i,j} := X_i \times Y_j$ も開集合であり、$U = \bigcap_{i,j} U_{i,j}$ は開集合である。

$U \subseteq U_{i,j}$ で $U_{i,j}$ は既約だったので、U は既約でありかつ $\overline{U} = U_{i,j}$ であり (Example1.1.3, p.3)、従って $\overline{U}$ も既約である。$\overline{X} \times \overline{Y} = \bigcap_{i,j} U_{i,j} = \overline{U}$ より $\overline{X} \times \overline{Y}$ は既約である。X, Y は locally closed なので $X = V_x \cap \overline{X}$, $Y = V_y \cap \overline{Y}$ とかける (Exercise 3.10 の問題説明部分, p.21)。よって、$X \times Y = (V_x \times V_y) \cap (\overline{X} \times \overline{Y})$ から $X \times Y$ は $\overline{X} \times \overline{Y}$ の開集合であり、既約となる。

以上により $X \times Y$ は既約で locally closed なので、quasi projective variety である。

(b) X, Y が projective variety ならば $X \times Y$ も variety になることは (a) の最後の部分で示した ($\overline{X}$, $\overline{Y}$ で示したが、同じである)。

(c) Exercise 3.15 (c) の 2 条件が成立することを示せばよい。

(i) 一般に morphism は局所的に定義されているので、$Y = \cup_i Y_i$ で各 Y_i が variety のとき $\varphi : X \to Y$ が morphism となる必要十分条件は $\varphi|_{\varphi^{-1}(Y_i)} : \varphi^{-1}(Y_i) \to Y_i$ が各 i に対して morphism になることである。

従って、射影 $p_X : X \times Y \to X$ が morphism であることの証明は $X_i = X \cap U_i$ において示せばよく、それは affine variety と見られるので、既に Exercise 3.15 (c) にて示されている。射影 $p_Y : X \times Y \to Y$ についても同様である。

なお、X, Y が quasi-projective variety の場合には、その閉包において射影 $p_{\overline{X}} : \overline{X} \times \overline{Y} \to \overline{X}$ が morphism となるので、その quaisi-projective variety $X \times Y$ への制限としての射影 p_X も morphism となる。

(ii) Exercise 3.15 (c) と同じように $\varphi = f \times g : Z \to X \times Y$ が定義できる。$X = \cup_i X_i, Y = \cup_j Y_j$ で各 X_i, Y_j は affine variety と見なす。f を $f^{-1}(X_i)$ に制限したものを f_i、同様に g_j を定義する。$Z_{i,j} := f^{-1}(X_i) \cap g^{-1}(Y_j)$ とすると、$Z = \cap_{i,j} Z_{i,j}$ である。

このとき、X_i, Y_j は affine variety なので、Exercise 3.15 (c) から morphism $\varphi_{i,j} : Z_{i,j} \to X_i \times Y_j$ が存在し、その作り方からこれは φ を $Z_{i,j}$ に制限したものに等しい。また、$\varphi_{i,j}, f_i, g_j, p_{X_i}, p_{Y_j}$ 間の可換性も示される。よって $\varphi : Z \to X \times Y$ は morphism であり φ, f, g, 射影との可換性も成り立つので、φ は一意的である。

X, Y がquasi-projective variety とする。この時、f, g を $f : Z \to \overline{X}, g : Z \to \overline{Y}$ とみなしても morphism となる。既に述べたことから morphism $\overline{\varphi} = f \times g : Z \to \overline{X} \times \overline{Y}$ が一意的に存在する。$f \times g$ の作り方から、$\mathrm{Im}\overline{\varphi} \subseteq X \times Y \subseteq \overline{X} \times \overline{Y}$ なので、morphism $f \times g : Z \to X \times Y$ が得られ、これは一意的である。

1.3.17

多様体は affine とは限らないが、normal 性の証明に際しては affine と仮定してよい。実際、Y が projective のとき、$Y_i = Y \cap U_i$ とすると $\varphi_i(Y_i)$ は $\mathbf{A}^n$ の variety とみなせる (Proposition 2.2)。Y の任意の点を P とし、$P \in Y_i$ とする。このとき、φ_i は isomorphim だから (Proposition 3.3)、$\mathcal{O}_P^{proj} \approx \mathcal{O}_{\varphi_i(P)}^{affine}$ が得られる。従って $Y = \cup_i Y_i$ となる i に関して $\varphi_i(Y_i)$ が normal であることを示せば、$\mathcal{O}_{\varphi_i(P)}^{affine}$ が整閉となり、同型な $\mathcal{O}_P^{proj}$ も整閉となって、Y は normal となる。

(d) affine variety では $\mathcal{O}_P = A(Y)_{m_P}$ なので、Y:normal$\Leftrightarrow$ $A(Y)_{m_P}$:整閉 for any $P \in Y$ である。一般に、B:整閉 $\Leftrightarrow$ B_m:整閉 for any maximal ideal m なので (Proposition 5.13 [1])、整域 $A(Y)$ に適用すれば、Y:normal$\Leftrightarrow$ $A(Y)$:整閉となる。

(a) Exercise 3.1(c), p. 20 より $\mathbf{P}^2$ における 2 次元多様体は $\mathbf{P}^1$ に同型である。$\mathbf{P}^1 \cap U_i \approx \mathbf{A}^1$ より、$A(\mathbf{A}^1) = k[x]$ は整閉なので、すでに示した (d) より $\mathbf{P}^2$ における 2 次元多様体は normal である。

(b) $Q_1 = Z(xy - zw)$ のとき。$Q_{1,w} := Q_1 \cap U_w$ に対して $Y_w := \varphi_w(Q_{1,w})$ は $\mathbf{A}^3$ の variety である。ただし、$U_w = \mathbf{P}^3 - Z(w)$ で、φ_w はそれに付随する isomorphism である。このとき $Y_w = Z(xy - z)$ より $A(Y_w) = k[x, y, z]/(xy - z) = k[x, y]$ であり、これは整閉だから Y_w は normal となる。他の変数についても同様であるから Q_1 は normal となる。

$Q_2 = Z(z^2 - xy)$ のとき。$Y_x := \varphi_x(Q_2 \cap U_x)$ は $\mathbf{A}^3$ の affine variety である。すると、$Y_x = Z(z^2 - y)$ より $A(Y_x) = k[y, z, w]/(z^2 - y) = k[y, w]$ となり、これは整閉だから Y_x は normal である。

$Y_y := \varphi_y(Q_2 \cap U_y)$ も同様に normal である。

$Y_z := \varphi_z(Q_2 \cap U_z)$ では、$Y_z = Z(xy - 1) \approx \mathbf{A}^2 - Z(x)$ となる。ここでの対応は $(x, y, w) \mapsto (x, w)$ で、これは isomorphism である。一般に normal な variety

の開部分集合は normal である。実際、Y が normal variety、U がその開部分集合で、$P \in U$ のとき、$\mathcal{O}_{P,U} = \mathcal{O}_{P,Y}$ であり、$\mathcal{O}_{P,Y}$ は整閉だから $\mathcal{O}_{P,U}$ も整閉となる。よって、normal な $\mathbf{A}^2$ の開部分集合 $Y_z = Z(xy-1) \approx \mathbf{A}^2 - Z(x)$ は normal である。

$Y_w := \varphi_w(Q_2 \cap U_w)$ では $Y_w = Z(z^2 - xy)$: normal $\Leftrightarrow A(Y_w) = k[x,y,z]/(z^2 - xy)$: 整閉、なので $A(Y_w)$ の整閉性を示せばよい。

$R := A(Y_w)$ とおく。$z^2 - xy$ は $k[x,y,z]$ において既約なので R は整域である。$\mathrm{Frac}(R)$ の元は、$k[x,y]$ の元 f_i, g_j を用いて、

$$\frac{f_1 + g_1 z}{f_2 + g_2 z} = \frac{f_1 f_2 - g_1 g_2 xy}{f_2^2 - g_2^2 xy} + \frac{(f_2 g_1 - f_1 g_2)}{f_2^2 - g_2^2 xy} z$$

と表されるので、$\mathrm{Frac}(R) = K[z]$ となる。ただし、$K := k(x,y) = \mathrm{Frac}(k[x,y])$ である。

さて α を R 上整の $\mathrm{Frac}(R)$ の元とする。$z^2 - xy = 0$ より z は $k[x,y]$ 上整なので、$R = k[x,y][z]$ は $k[x,y]$ 上整である。α は R 上整だから、整従属の推移律 (Corollary 5.4, p.60, [1]) より α は $k[x,y]$ 上整である。そこでその α の整従属式を

$$\alpha^n + \sum_{i=1}^{n} h_{n-i} \alpha^{n-i} = 0, h_i \in k[x,y]$$

とし、対応する多項式を

$$F(X) := X^n + \sum_{i=1}^{n} h_{n-i} X^{n-i} \in k[x,y][X]$$

とおく。

一方 $\alpha = f + gz, f, g \in K$ とかけるから $\alpha^2 - 2f\alpha + f^2 - g^2 xy = 0$ より、α を根とする多項式

$$G(X) := X^2 - 2fX + f^2 - g^2 xy \in K[X]$$

が得られる。$G(X)$ は α の $K[X]$ における最小多項式 (既約多項式) と仮定してよい。もし、1 次式の最小多項式が存在したとすると、α は K に属し、かつ $k[x,y]$ 上整であったから $k[x,y]$ の整閉性より $\alpha \in k[x,y] \subseteq R$ となるからである。

$K[X]$ は UFD なので $F(X)$ は $G(X)$ で割り切れる。

$$F(X) = H(X)G(X), H(X) \in K[X]$$

ここで $F(X) \in k[x,y][X]$ は primitive だから $k[x,y][X]$ でも

$$F(X) = H'(X)G'(X)$$

と因数分解でき、$H'(X) = aH(X), G'(X) = bG(X), a, b \in K$ とかける (定理 16, p.160, [2])。$G(X)$ は monic で $G'(X) \in k[x,y][X]$ なので $b \in k[x,y]$ である。同様に $H(X)$ も monic なので $a \in k[x,y]$ である。$F(X) = H(X)G(X) = H'(X)G'(X) = abH(X)G(X)$ から $ab = 1$ なので a, b は単元であり、$G(X) = aG'(X) \in k[x,y][X]$ となる。

$G(X) = X^2 - 2fX + f^2 - g^2xy \in k[x,y][X]$ だから、$2f, f^2 - g^2xy \in k[x,y]$ となり、さらに $f, g^2xy \in k[x,y]$ となる。$k[x,y]$ は UFD なので、$\mathrm{Frac}(k[x,y])$ の元 g は $g \in k[x,y]$ でない限り $g^2xy \in k[x,y]$ とはならない。よって、$\alpha = f + gz \in k[x,y][z] = R$ となる。

(c) $Y = Z(y^2 = x^3) \subseteq \mathbf{A}^2, P := (0,0)$ のとき、$\mathcal{O}_{P,Y}$ が整閉でないことを示す。

$$\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{P,Y}) = \mathrm{Frac}(A(Y)_{m_P}) = \mathrm{Frac}(A(Y))$$

だから、$f = y/x$ とすると f は $\mathrm{Frac}\mathcal{O}_{P,Y}$ に属すが、$\mathcal{O}_{P,Y}$ には属さない。しかるに K において $f^2 - x = 0$ より f は $\mathcal{O}_{P,Y}$ 上整である。従って $\mathcal{O}_{P,Y}$ は整閉ではない。

(e) Y が variety なので $A(Y)$ は有限生成 k 代数整域であり、Theorem 3.9A から $\mathrm{Frac}(A(Y))$ におけるその整閉包 $\widetilde{A(Y)}$ も有限生成 k 代数整域である。また、整従属の推移律から $\widetilde{A(Y)}$ は整閉である (Corollary 5.5, p.61, [1])。Exercise 1.5, p.8 より $A(\tilde{Y}) = \widetilde{A(Y)}$ となる algebraic set $\tilde{Y}$ が存在する。$\widetilde{A(Y)}$ が整閉整域なので $\tilde{Y}$ は normal affine variety となる (すでに示した (d) による)。

埋込 $\iota : A(Y) \to A(\tilde{Y})$ に対応する morphism を

$$\pi : \tilde{Y} \to Y$$

と定義する (Proposition 3.5)。

Z を normal variety, $\varphi : Z \to Y$ を dominant morphism とする。対応する homomorphism を $\varphi^* : A(Y) \to A(Z)$ とおく。φ^* は $\mathrm{Frac}(A(Y)) \to \mathrm{Frac}(A(Z))$ に拡張できるので、それを $\widetilde{\varphi^*}$ と記す。

Exercise 3.3 (c) より、任意の $P \in Z$ に対して

$$\varphi_P^* : \mathcal{O}_{\varphi(P),Y} \to \mathcal{O}_{P,Z}, f \mapsto \varphi \circ f$$

は単射である。ここで、$f \in \mathcal{O}_{\varphi(P),Y}$ である限り、$f \mapsto \varphi \circ f$ は P に依存しないので、単射系列 $\mathcal{O}(Y) \subseteq \mathcal{O}_{\varphi(P),Y} \xrightarrow{\varphi_P^*} \mathcal{O}_{P,Z}$ から単射系列

$$\mathcal{O}(Y) \subseteq \bigcap_P \mathcal{O}_{\varphi(P),Y} \hookrightarrow \bigcap_P \mathcal{O}_{P,Z} = \mathcal{O}(Z)$$

が得られる。最後の等号は Theorem 3.2 の証明の中に示されている (p.17)。$f \in \mathcal{O}(Y)$ のとき、$\varphi^*(f) = \varphi_P^*(f)$ なので、上記単射系列の合成は φ^* に等しい:

$$\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(Z)$$

$Z = \cup Z_i, Z_i = Z \cap U_i$ とすると、Z_i は normal variety$Z$ の開部分集合なので normal である (本問 (b) において Q_2 の中の Y_z の normal 性の証明中に示した)。従って、$A(Z_i)$ は整閉であり、$A(Y) = \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}(Z) \subseteq \mathcal{O}(Z_i) = A(Z_i)$ から $\widetilde{\varphi^*}(\widetilde{A(Y)}) \subseteq A(Z_i)$ である。φ^* は単射なので $\widetilde{\varphi^*}$ も単射であり、

$$\widetilde{\varphi^*} : A(\tilde{Y}) \hookrightarrow A(Z_i), for \forall i$$

となる。一方、$\mathcal{O}(Z) = \mathcal{O}(\bigcup_i Z_i) = \bigcap_i \mathcal{O}(Z_i) = \bigcap_i A(Z_i)$ なので

$$A(Y) \xrightarrow{\iota} A(\tilde{Y}) \xrightarrow{\widetilde{\varphi^*}} \bigcap_i A(Z_i) = \mathcal{O}(Z)$$

であるが、$\widetilde{\varphi^*}$ は φ^* の拡張だったから

$$\varphi^* = \widetilde{\varphi^*} \circ \iota$$

である。$\widetilde{\varphi^*}$ に対応する morphism を θ とおくと

$$\varphi = \pi \circ \theta$$

が得られる (Proposition 3.5)。

$\varphi = \pi \circ \theta_1 = \pi \circ \theta_2$ とする。このとき、$\varphi^* = \theta_1^* \circ \iota = \theta_2^* \circ \iota$ となるので、$A(Y)$ においては $\theta_1^* = \theta_2^*$ である。よって、$\mathrm{Frac}(A(Y))$ においても等しく、$\theta_1 = \theta_2$ となる。

1.3.18

(a) $S(Y)$ が整閉とする。$\mathrm{Frac}S(Y)_{(m_P)} = S(Y)_{((0))}$ における $S(Y)_{(m_P)}$ 上整な f は

$$f^n + \sum_{i=1}^{n} g_{(m_P)}^{(i)} f^{n-i} = 0$$

を満たす。但し $\deg f = 0, g_{(m_P)}^{(i)} \in S(Y)_{(m_P)}$ である。$g_{(m_P)}^{(i)}$ の共通分母を $a \notin m_P$ として a^n をかけると、

$$h^n + \sum_{i=1}^{n} g^{(i)} h^{n-i} = 0$$

が得られる。ここで $g^{(i)} \in S(Y), h = af \in \mathrm{Frac}S(Y)$ である。仮定から $S(Y)$ は整閉なので $h = af \in S(Y)$、よって $f \in S(Y)_{m_P}$ となる。$\deg f = 0$ なので $f \in S(Y)_{(m_P)}$ となるから、$\mathcal{O}_P = S(Y)_{(m_P)}$ は整閉である。

(b) Y を $(x,y,z,w) = (t^4, t^3u, tu^3, u^4), t,u \in k$ で与えると、$I(Y) = (y^4 - x^3w, xw - yz)$ である。

Y において t,u のいずれかは非零なので $u \neq 0$ とする。このとき $Y_4 = Y \cap U_4 = \{(t^4, t^3, t); t \in k\}$ は affine である。Proposition 3.17(d) から Y_4 の normal 性をいうには $A(Y_4)$ の整閉性を言えばよい。$I(Y_4) = (x - z^4, y - z^3)$ なので、$A(Y_4) = k[x,y,z]/I(Y_4) = k[z]$ となる。$k[z]$ は整閉なので Y_4 は normal である。同様に Y_1 も normal になるので、Y は normal である。

一方 $S(Y)$ は整閉ではない。実際、$f := z^2/w \in \mathrm{Frac}S(Y)$ は $f^2 - xw = 0$ を満たすので、f は $S(Y)$ 上整だが、$f :\notin z^2/w \in S(Y)$ である。

(c) ρ を次のように定義する。

$$\rho : \mathbf{P}^1 \to Y,\ (t,u) \mapsto (t^4, t^3u, tu^3, u^4)$$

容易にわかるように ρ は全単射である。

$Y_4 = Y \cap U_4 = \{(t^4, t^3, t); t \in k\}$ は affine とみなせるので、

$$(x \circ \rho)(t,u) = t^4,\ (y \circ \rho)(t,u) = t^3,\ (z \circ \rho)(t,u) = t$$

はいずれも $\mathbf{P}^1$ の regular 関数となる。$Y_1 = Y \cap U_1$ についても同様なので、ρ は morphism である。

一方 $\rho^{-1} : (x,y,z,w) \mapsto (x,y)$ は明らかに morphism なので、ρ は isomorphism である。

1.3.19

(a) まず、$\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ が morphism である条件は $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ と書けて各 φ_i が多項式となることに注意する。実際、$\Leftarrow$ は明らかだし、$\Rightarrow$ は Proposition 3.6 から $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ と書けて各 φ_i は $A(\mathbf{A}^n) = k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ に属す。

さて、$\rho : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ を別な morphism とし、$\rho = (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n),\ \rho_i \in k[y_1, y_2, \cdots, y_n]$ とする。このとき、合成関数

$$\rho \circ \varphi = (\rho_1(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n), \rho_2(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n), \cdots, \rho_n(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n))$$

の偏微分を取ると

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial x_i} = \sum_j \left.\frac{\partial \rho_k}{\partial y_j}\right|_{\boldsymbol{y}=\varphi(\boldsymbol{x})} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$$

となる。これを行列の形に書いて行列式を取ると

$$J(\rho \circ \varphi) = \left. J(\rho)\right|_{\boldsymbol{y}=\varphi(\boldsymbol{x})} J(\varphi)$$

を得る。

いま φ が isomorphim なので、$\rho = \varphi^{-1}$ とすると $\rho \circ \varphi = id$ となる。$J(id) = 1$ なので、上式から $\left. J(\rho)\right|_{\boldsymbol{y}=\varphi(\boldsymbol{x})} J(\varphi) = 1$ を得る。$J(\varphi)$ は多項式であるが、k は代数閉体なので、もし $J(\varphi)$ が非零定数でなければ $J(\varphi) = 0$ を満たす解が存在する。この解を $\left. J(\rho)\right|_{\boldsymbol{y}=\varphi(\boldsymbol{x})} J(\varphi) = 1$ に代入すると矛盾する。よって、$J(\varphi)$ は非零定数である。

(b) $n = 1$ のときは逆も成り立つ。φ, φ^{-1} とも一次関数になるからである。

1.3.20

(a) P 付近の議論なので Y は (quasi-) affine variety としてよい。

高さ 1 の任意の prime ideal を $\mathfrak{q}$ とすると、$\mathrm{ht}(\mathfrak{m}_P) \geq 2$ より $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{m}_P$ なので、$Z(\mathfrak{q}) - P \neq \varnothing$ である。$Q \in Z(\mathfrak{q}) - P$ とすると、$Q \in Z(\mathfrak{q})$ から $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}_Q$、ゆえに $A(Y)_{\mathfrak{q}} \supseteq A(Y)_{\mathfrak{m}_Q}$ となる。

f は Q で regular だから $f \in \mathcal{O}_Q \approx A(Y)_{m_Q} \subseteq A(Y)_{\mathfrak{q}}$ となり、

$$f \in \bigcap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{q})=1} A(Y)_{\mathfrak{q}} \subseteq \bigcap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{q})=1, \mathfrak{q}\subseteq \mathfrak{m}_P} A(Y)_{\mathfrak{q}} = \bigcap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{q})=1, \mathfrak{q}\subseteq \mathfrak{m}_P} (A(Y)_{\mathfrak{m}_P})_{\mathfrak{q}^e} = \bigcap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{q}')=1} (A(Y)_{\mathfrak{m}_P})_{\mathfrak{q}'}$$

が得られる。ここで、最初の等号は $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}_P$ から $(A(Y)_{\mathfrak{m}_P})_{\mathfrak{q}} = A(Y)_{\mathfrak{q}}$ より成立し、2 番目の等号は次の理由による: $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}_P$ のときに拡大 ideal $\mathfrak{q}^e$ が $A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$ で prime ideal になり、逆に $A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$ の prime ideal は $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}_P$ を満たす $A(Y)$ の prime ideal $\mathfrak{q}$ の拡大 ideal $\mathfrak{q}^e$ に限る ([1] Proposition 3.11, i), iv))。さらにこの場合 $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}^e) = \mathrm{ht}(\mathfrak{q})$ が成立する。

仮定から $\mathcal{O}_P \approx A(Y)_{m_P}$ は整閉であり、$A = k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ はネーターなので $A(Y)_{m_P}$ もネーターであるから、II.6.3A(p.132) を用いれば上式は $A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$ に等しくなり

$$f \in A(Y)_{\mathfrak{m}_P} = \mathcal{O}_P$$

が得られる。従って f は P でも regular となり、結局 Y 全体で regular となる。

(b) $Y = \mathbf{A}^1 = k, P = 0$ とおく。Exercise 3.17(d) より Y は normal なので、P は normal point である。$f = 1/x$ は P 以外で regular だが P で regular ではない。

1.3.21

(a) $\mathbf{A}^1$ は体 k における加算 μ に関して群をなしている。t を $Y := \mathbf{A}^1$ の座標関数とすると、$t \circ \mu$ は $(t \circ \mu)(x, y) = x + y$ を満たすので $\mathbf{A}^2$ 上で regular 関数である。よって、Proposition 3.6 より μ は morphism である。逆元演算も同様に morphism である。従って $\mathbf{G}_a$ は additve group variety となる。

(b) $Y = \mathbf{A}^1 - (0)$ は体 k における積 μ に関して群をなしている。t を Y の座標関数とすると、$(t \circ \mu)(x, y) = xy$ から $t \circ \mu$ は Y^2 上で regular 関数となり、μ は morphism である。逆元演算も同様に morphism である。従って $\mathbf{G}_m$ は multiplicative group variety となる。

(c) $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}(X, G)$ のとき、次の $\mu^*(\alpha \times \beta)$ は

$$\mu^*(\alpha \times \beta) : X \xrightarrow{(\alpha\times\beta)} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y,\ x \mapsto \mu(\alpha(x), \beta(x))$$

morphism である。なぜなら、仮定から μ は morphim であり、Exercise3.15(c), 同 3.16(c) から $(\alpha \times \beta)$ も morphism だからである。なお、quasi-affine Y はある quasi-projective と同型なので、やはり証明できている。

$\alpha^{-1}(\boldsymbol{x}) := \alpha(\boldsymbol{x})^{-1}$ とすると、逆元操作が morphism なので、α^{-1} も morphism であり、定数関数 1 は単位元だから、$\mathrm{Hom}(X, G)$ は群をなす。

(d) $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, G_a)$ とすると Proposition 3.6 から $y \circ \varphi = \varphi \in \mathcal{O}(X)$ である (y は座標関数)。

逆に $f \in \mathcal{O}(X)$ とする。$f : X \to k$ だが、$f : X \to G_a$ と見られる。$y \circ f = f \in \mathcal{O}(X)$ より f は morphism であり、$f \in \mathrm{Hom}(X, G_a)$ となる。

(e) $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, G_m)$ とすると $y \circ \varphi = \varphi \in \mathcal{O}(X)$ である。また、$\mathrm{Hom}(X, G_m)$ は群なので、φ の逆元が存在し、同様に $\mathcal{O}(X)$ に属すので、φ は unit である。

逆に f を $\mathcal{O}(X)$ の unit とする。(d) と同様に $y \circ f = f \in \mathcal{O}(X)$ となるから f は morphism である。f は $\mathcal{O}(X)$ の unit なので f^{-1} が存在し、$(f \circ f^{-1})(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{x})^{-1} = 1$ を満たすので、$f(X) \not\ni 0$ である。よって、$f \in \mathrm{Hom}(X, G_m)$ である。

References

[1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1963

[2] 松坂和夫: 代数系入門, 岩波, 1976

[3] 彌永昌吉, 小平邦彦: 代数系入門, 岩波, 1961