1 Varieties

1.2 Projective Varieties

1.2.1

斉次 ideal を $\mathfrak{a}$ とし、斉次多項式 $f \in IZ(\mathfrak{a})$ とする。これは $f(P) = 0, \forall P \in Z(\mathfrak{a})$ を意味するが、$\mathbf{A}^{n+1}$ に置き換えると、$f(P') = 0, \forall P'(\neq 0) \in Z'(\mathfrak{a})$ となる。ここで Z', I' は affine における Z, I のことである。
$\mathfrak{a}$ は斉次 ideal なので $Z'(\mathfrak{a}) \ni 0$ であるが、f も斉次多項式なので、$f(P') = 0, \forall P' \in Z'(\mathfrak{a})$、すなわち $f \in I'Z'(\mathfrak{a})$ となる。
すると零点定理から $f \in I'Z'(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ であり、ある整数 $q > 0$ に対して $f^q \in \mathfrak{a}$ となる。

1.2.2

(i)→(ii) $\mathbf{A}^{n+1}$ においては Z', I' のように「'」をつけて記す。
$Z(\mathfrak{a}) = \varnothing \Leftrightarrow Z'(\mathfrak{a}) = \varnothing$ or $\mathbf{0}$
・$Z'(\mathfrak{a}) = \varnothing \Leftrightarrow \mathfrak{a} = S \Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} = S$
・$Z'(\mathfrak{a}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} = I'Z'(\mathfrak{a}) = I'(\mathbf{0}) = (x_0, x_1, \cdots, x_n) = S_+$

(ii)→(iii) $\sqrt{\mathfrak{a}}$ は S か S_+ である。
・$\sqrt{\mathfrak{a}} \ni 1 \Rightarrow \mathfrak{a} = S \Rightarrow \mathfrak{a} \supseteq S_d, \forall d > 0$
・$\sqrt{\mathfrak{a}} = S_+ \Rightarrow \sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq S_1 \Rightarrow x_i \in \sqrt{\mathfrak{a}}, \forall i \Rightarrow x_i^{k_i} \in \mathfrak{a}, \exists k_i > 0 \Rightarrow x_i^k \in \mathfrak{a}, \exists k > 0$　このとき $(k-1)n + k$ 次の単項式においては、ある x_i の次数は k 以上となるので、$\mathfrak{a} \supseteq S_{(k-1)n+k}$ である。

(iii)→(i) $\mathfrak{a} \supseteq S_d, \exists d > 0$ とすると、$Z(\mathfrak{a}) \subseteq Z(S_d) \subseteq Z((x_i^d)_{0 \leq i \leq n}) = \varnothing$

1.2.3

(a), (b), (c) は明らかである。

(d)　$f \in IZ(\mathfrak{a})$ とする。$Z(\mathfrak{a}) \neq \varnothing$ より $f \in k - \{0\}$ ではあり得ないが、$f = 0$ なら $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ である。$\deg f > 0$ なら Exercise2.1 より $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ である。
逆に $f \in \sqrt{\mathfrak{a}} \Rightarrow f^{\exists q} \in \mathfrak{a} \Rightarrow f^q(Z(\mathfrak{a})) = 0 \Rightarrow f(Z(\mathfrak{a})) = 0 \Rightarrow f \in IZ(\mathfrak{a})$

(e)　まず、$Y \subseteq ZI(Y)$ なので $\overline{Y} \subseteq ZI(Y)$ である。
次に $\overline{Y} = Z(\exists \mathfrak{a})$ とすると $Z(\mathfrak{a}) = \overline{Y} \supseteq Y$ より $IZ(\mathfrak{a}) \subseteq I(Y)$ となるが、$\mathfrak{a} \subseteq IZ(\mathfrak{a})$ なので、$\mathfrak{a} \subseteq I(Y)$ から $\overline{Y} = Z(\mathfrak{a}) \supseteq ZI(Y)$ を得る。

1.2.4

(a)　$Y \neq \varnothing$ を閉集合とすると $Y = Z(\mathfrak{a})$ となる S の斉次 ideal $\mathfrak{a}$ が存在し、$\sqrt{\mathfrak{a}} \neq S, S_+$ を満たす (Exercise2.2)。すると Exercise2.3(d) より $I(Y) = IZ(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}(\neq S, S_+)$ となり、これは斉次根基 ideal である。$Y = \varnothing$ とすると $I(Y) = I(\varnothing) = S = \sqrt{S}$ も斉次根基 ideal である。逆に $Z(\mathfrak{a})$ は閉集合である。

従って、$\mathfrak{A}$ を $\mathbf{P}^n$ の閉集合の集合、$\mathfrak{B}$ を S の S_+ 以外の斉次根基 ideal の集合とすると、$I:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}, Z:\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$ とみなせる。このとき $IZ(\mathfrak{a})=\sqrt{\mathfrak{a}}=\mathfrak{a}$ より $IZ=id_{\mathfrak{B}}$、$ZI(Y)=\overline{Y}=Y$ より $ZI=id_{\mathfrak{A}}$ であり、I あるいは Z は $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ 間の 1 対 1 対応を与える。また Exercise2.3(a), (b) からこれらの対応は inclusion reversing である。

(b) $Y=Z(\mathfrak{a})$ が既約閉集合、$\mathfrak{a}=I(Y)\neq S_+$ を斉次根基 ideal とする。すると

$$fg\in I(Y)\Leftrightarrow Y\subseteq Z(fg)=Z(f)\cup Z(g)\Rightarrow Y\subseteq Z(f) \text{ or } Z(g)\Leftrightarrow f \text{ or } g\in I(Y)$$

より $I(Y)$ は prime ideal である。

逆に $\mathfrak{a}=I(Y)$ が primel ideal のとき、$Y=Y_1\cup Y_2, Y_i=Z(\mathfrak{a}_i)$ とすると、

$$\mathfrak{a}=I(Y)=I(Y_1\cup Y_2)=I(Y_1)\cap I(Y_2)\Rightarrow\mathfrak{a}=I(Y_1) \text{ or } I(Y_2)\Rightarrow Y=Z(\mathfrak{a})=Y_1 \text{ or } Y_2$$

より、Y は既約である。なお、ここで最初の $\Rightarrow$ は Proposition1.11(ii)[1] による。

(c) $\mathbf{P}^n=Z(0)$ から $(0)\neq S_+$ は prime ideal なので、(b) より $\mathbf{P}^n$ は既約である。

1.2.5

(a) $Y_1\supseteq Y_2\supseteq\cdots$ を $\mathbf{P}^n$ の閉集合降鎖列とすると、これに対応して S の ideal 昇鎖列 $I(Y_1)\subseteq I(Y_2)\subseteq\cdots$ が得られる。S はネーター環なので昇鎖律が成立するため、ある n が存在して $I(Y_n)=I(Y_{n+1})=\cdots$ となる。すると $ZI(Y_i)=Y_i$ より $Y_n=Y_{n+1}=\cdots$ が得られるので、$\mathbf{P}^n$ はネーター空間である。

(b) Proposition1.5 による。

1.2.6

$Y=\bigcup_{Y_i\neq\varnothing}Y_i,\ Y_i=Y\cap U_i$ において、Y_i は、Y が既約だから既約であり、$Y_i^a=\varphi_i(Y_i)$ は $\mathbf{A}^n$ における affine variety とみなせる。さて、

$\rho:A=k[y_1,y_2,\cdots,y_n]\to S_{(x_i)}$

$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mapsto f(x_0/x_i,x_1/x_i,\cdots,x_{i-1}/x_i,1,x_{i+1}/x_i,\cdots,x_n/x_i)$

とすると ρ は環の同型写像である。

このとき

$$f\in I(Y_i^a)\Leftrightarrow 0=f(Y_i^a)=(f\circ\varphi_i)(Y_i)=(\rho\circ f)(Y_i)\Leftrightarrow\rho\circ f\in I_{S_{(x_i)}}(Y_i)=I_S(Y_i)_{(x_i)}$$

から、$\rho(I_A(Y_i^a))=I_S(Y_i)_{(x_i)}$ が成立する。さらに、既約 Y における開集合 Y_i は稠密だから $f\in I_S(Y_i)\Leftrightarrow Z(f)\supseteq Y_i\Leftrightarrow Z(f)\supseteq\overline{Y}_i=Y\Leftrightarrow f\in I_S(Y)$ なので、$I_S(Y_i)\approx I_S(Y)$ となる。よって、$\rho(I_A(Y_i^a))=I_S(Y)_{(x_i)}$ が得られる。

以上により、

$$A(Y_i)\approx S(Y)_{(x_i)}$$

となる (この結果は p.18 の Theorem3.4 の証明中にも示されている)。

さて、この結果を用いると

$$\mathrm{Frac}S(Y) = \mathrm{Frac}S(Y)_{x_i} = (\mathrm{Frac}S(Y)_{(x_i)})(x_i) \approx (\mathrm{Frac}A(Y_i))(x_i)$$

となるが、超越次元を取ることにより $\dim S(Y) = \dim A(Y_i)+1$ が得られる。この式は、Proposition1.7 から $\dim Y_i = \dim A(Y_i)$ なので、$\dim S(Y) = \dim Y_i + 1$ となる。一方 Y_i は Y の開集合なので、Exercise1.10(b) より $\dim Y = \sup \dim Y_i = \sup \dim S(Y) - 1 = \dim S(Y) - 1$ が得られる。

1.2.7

(a) 前問 2.6 を用いると

$$\dim \mathbf{P}^n = \dim S(\mathbf{P}^n) - 1 = \dim S/(0) - 1 = \dim k[x_0, x_1, \cdots, x_n] - 1 = n$$

となる。

(b) $Y = \bigcup_i Y_i,\ Y_i = Y \cap U_i$ において Y_i は quasi-affine とみられるので、Proposition 1.10 より $\dim Y_i = \dim \overline{Y}_i$ である。

$Y_i,\ \overline{Y}_i$ はそれぞれ $Y,\ \overline{Y}$ の開集合なので、Exercise1.10(b) より

$$\dim Y = \sup \dim Y_i = \sup \dim \overline{Y}_i = \dim \overline{Y}$$

が得られる。

1.2.8

$f(\deg f > 0)$ を S の斉次既約多項式とし、$Y = Z((f))$ とする。S が UFD なので (f) は斉次 prime ideal である。このとき Theorem1.11A より $\mathrm{height} f = 1$ となる。Exercise2.6 より $\dim Y = \dim S(Y) - 1$ であるが、Theorem1.8A(b) から得られる $\mathrm{height} f + \dim S/(f) = \dim S$ を用いると

$$\dim Y = \dim S(Y) - 1 = \dim S/(f) - 1 = \dim S - \mathrm{height} f - 1 = n - 1$$

となる。

逆に $\dim Y = n - 1$ とする。Y は projective variety なので Exercise2.4(b) より $I(Y)$ は斉次 prime ideal である。すると Theorem1.8A(b) が使えて

$$\mathrm{height} f = \dim S - \dim S(Y) = \dim S - (\dim Y + 1) = 1$$

となる。このとき Proposition1.12A から、$I(Y)$ は単項 ideal なので $I(Y) = (f)$ とかける。$I(Y)$ が斉次 ideal だから f は既約斉次多項式である。

1.2.9

(a) $\mathbf{P}^n$ における I, Z などを I', Z' 等と記す。

$I'(\overline{Y}') = (\beta I(Y))$ を示す。ここで $\varphi_0^{-1}(Y) = Y' = \overline{Y}' \cap U_0$ である。また、Y: 既約 $\Leftrightarrow$ Y': 既約、であり、$I'(Y') = I'(\overline{Y}')$ が成立する。なぜなら $I'(Y') \supseteq I'(\overline{Y}')$

は自明であり、$Y' \neq \varnothing$ なので $\mathfrak{a} := I'(Y') \neq S$ or $S_+ \Rightarrow Z'(\mathfrak{a}) = Z'I'(Y') = \overline{Y}' \Rightarrow I'Z'(\mathfrak{a}) = I'(\overline{Y}') \Rightarrow I'(Y') = \mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq I'(\overline{Y}')$ だからである。よって $I'(Y') = (\beta I(Y))$ を示せばよい。

$f \in I(Y)$ とすると $\beta(f) \in I'(\varphi_0^{-1}(Y))$ より $\beta I(Y) \subseteq I'(Y')$ である。

逆に斉次多項式 $f' \in I'(Y')$ とする。$\forall x \in Y$ に対して $x' = \varphi_0^{-1}(x) \in Y'$ とおくと $f'(x') = 0$ なので、$f = \alpha(f'),\ x = \varphi_0(x') \in Y$ に対して $f(x) = 0$ となり $f \in I(Y)$ が得られる。$f' = x_0^r g',\ x_0 \not| g'$ の形をしているとき、$\beta\alpha(f') = f'/x_0^r$ だから $f' = x_0^r \beta(f) \in (\beta(I(Y))$ であり、$I'(Y') \subseteq (\beta I(Y))$ が成立する。

(b) Exercise1.2 より $I(Y) = (y - x^2, z - x^3),\ Y = \{(t, t^2, t^3) | t \in k\}$ である。

次に $I'(Y') = (x^2 - yw, xy - zw, xz - y^2)$ を示す。ここでは $U_w = \mathbf{P}^3 - Z(w)$ に写すこととする。$I' = (x^2 - yw, xy - zw, xz - y^2)$ とおく。まず $x^2 - yw, xy - zw, xz - y^2$ において $x = t, y = t^2, z = t^3, w = 1$ 代入すると 0 となるので、$I' \subseteq I(Y))$ である。

$f \in S$ とすると $f = f_0(y, z, w) + f_1(w)x \mod I'$ の形にできる。これは $x^2 = yw, xy = zw, xz = y^2$ を用いて x の次数を下げ、x を含む項にある y と z を消去すればよい。さらに $y^3 = z^2 w$ を適用していけば f_0 の y の次数を 2 以下にできるので、結局次の形になる。

$$f(x, y, z, w) = a_0(z, w) + a_1(z, w)y + a_2(z, w)y^2 + f_1(w)x \mod I'$$

斉次多項式 $f \in I'(Y') = (\beta I(Y))$ がこの形に表されたとすると、$f(t, t^2, t^3, 1) = 0$ だから

$$a_0(t^3, 1) + a_1(t^3, 1)t^2 + a_2(t^3, 1)t^4 + f_1(1)t = 0$$

となる。これは t を変数とする多項式の恒等式なので t の 1 次式部分、2 次式部分から $f_1(1) = 0,\ a_1(t^3, 1) = 0$ が得られ、次に $f = a_0(t^3, 1) + a_2(t^3, 1)t^4 = 0$ から $a_0(t^3, 1) = 0,\ a_2(t^3, 1) = 0$ となる。結局 $a_0(t^3, 1) = 0,\ a_1(t^3, 1) = 0,\ a_2(t^3, 1) = 0,\ f_1(1) = 0$ となるが、f は斉次多項式なので、これらは $a_0(z, w) = 0,\ a_1(z, w) = 0,\ a_2(z, w) = 0,\ f_1(w) = 0$ を意味する。従って、$f = 0 \mod I'$ すなわち $f \in I'(Y') = I'(\overline{Y}')$ である。

以上から $I(Y) = (y - x^2, z - x^3),\ I'(\overline{Y}') = (x^2 - yw, xy - zw, xz - y^2)$ である。

さて、$\beta(y - x^2) = yw - x^2, \beta(z - x^3) = zw^2 - x^3$ であるが、$(yw - x^2, zw^2 - x^3) \subsetneq (x^2 - yw, xy - zw, xz - y^2)$ である。なぜなら $xz - y^2 \notin (x^2 - yw, xy - zw, xz - y^2)$ であることが、次のように示されるからである。もし $xz - y^2 = (yw - x^2)h_1 + (zw^2 - x^3)h_2$ とすると、$P = (0, 1, 0, 0)$ において左辺 $\neq 0$ だが右辺 $= 0$ である。

1.2.10

(a) まず $C(Y) = Z_A(I(Y))$ を示す。$f \in I(Y)$ は斉次多項式だが、$Y \neq \varnothing$ なので f が非零定数となることはない。従って、$f(\mathbf{0}) = 0$ より $\mathbf{0} \in Z_A(I(Y))$ である。

$$\mathbf{0} \neq x \in \theta^{-1}(Y) \Leftrightarrow \theta(x) \in Y \Leftrightarrow g(\theta(x)) = 0, \forall g \in I(Y) \Leftrightarrow \mathbf{0} \neq x \in Z_A(I(Y))$$

よって $C(Y) = Z_A(I(Y))$ となり、$C(Y)$ は algebraic set である。

次に $I_A(C(Y)) = I(Y)$ を示す。$C(Y) = Z_A(I(Y))$ から

$$I_A(C(Y)) = I_A(Z_A(I(Y)) = \sqrt{I(Y)} \supseteq I(Y)$$

である。逆の包含関係を導くために、$f \in I_A(C(Y))$ を次数ごとに分解して $f = \sum_i f_i, \deg f_i = i$ とする。$x(\neq 0) \in C(Y)$ に対して $\lambda x \in C(Y)$ だから

$$f(\lambda x) = \sum_i \lambda^i f_i(x) = 0$$

となる。$\forall \lambda \in k$ に対して成立するので、$f_i(x) = 0$ でなければならない。f_i は斉次多項式なので $\mathbf{P}^n$ で考えると $f_i(y) = 0, y = \theta(x)$ となる。x が $\theta^{-1}(Y)$ 全体を渡れば y も Y 全体を渡るので $f_i \in I(Y)$、従って $f \in I(Y)$ となる。

以上により $I_A(C(Y)) = I(Y)$ が得られる。

(b) Y: 既約 $\Leftrightarrow I(Y)$: prime ideal $\Leftrightarrow I_A(C(Y))$: prime ideal $\Leftrightarrow C(Y)$: 既約

(c) まず、Y、従って $C(Y)$ が既約閉集合のときは次の通り成立する。(a) より

$$\dim C(Y) = \dim A(C(Y)) = \dim A - \mathrm{height} I_A(C(Y))$$

$$= \dim S - \mathrm{height} I(Y) = \dim S(Y) = \dim Y + 1$$

既約閉集合でない場合の証明のために、まず $Y \subseteq Y' \Leftrightarrow C(Y) \subseteq C(Y')$ を示す。($\Rightarrow$) は明らかである。$C(Y) \subseteq C(Y')(\Leftrightarrow \theta^{-1}(Y) \subseteq \theta^{-1}(Y'))$ とする。もし $y \in Y - Y'$ なら $y \in Y$ から $\theta^{-1}(y) \subseteq \theta^{-1}(Y) \subseteq \theta^{-1}(Y')$ となる。ここで $\exists x \in \theta^{-1}(y)$ とすると、$x \in \theta^{-1}(Y')$ より $y = \theta(x) \in Y'$ となり矛盾する。よって ($\Leftarrow$) も成立する。このとき $Y \subsetneq Y' \Leftrightarrow C(Y) \subsetneq C(Y')$ も成り立つ。

さて $Y = \bigcup_i Y_i$ とすると

$$C(Y) = \theta^{-1}(\bigcup_i Y_i) \cup \mathbf{0} = \bigcup_i \theta^{-1}(Y_i) \cup \mathbf{0} = \bigcup_i (\theta^{-1}(Y_i) \cup \mathbf{0}) = \bigcup_i C(Y_i)$$

となる。(b) から Y_i が既約なら $C(Y_i)$ も既約である。すでに示したことから、Y_i が極大な既約集合とすると、$C(Y_i)$ も極大な既約集合である。

次元の定義から $\dim Y = \max_i \dim Y_i$ なので、最大を与える i を r とおく。$\dim C(Y_i) = \dim Y_i + 1$ から最大の $\dim C(Y_i)$ を与える i も r である。よって

$$\dim C(Y) = \dim C(Y_r) = \dim Y_r + 1 = \dim Y + 1$$

が得られる。

1.2.11

(a) (i)→(ii) I を生成する線形多項式の中で、線形独立な最大数 t は n 以下なので、それら線形独立な t 個をとって、$I = (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_t)$ とおく。よって、

$$Y = Z(I) = \bigcap_i Z(\ell_i) = \bigcap_i H_i$$

となる。ただし $H_i = Z(\ell_i)$ は hyperplane である。

(ii)→(i) $Y = \bigcap_i H_i = \bigcap_i Z(\ell_i) = Z(I)$ とする。ここで H_i に対応する線形多項式を ℓ_i とすると、(a) で示したようにそれらは線形独立としてよい。$I = (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_t)$ とおく。このとき、ガウスの消去法を施しても ideal I は変化しないので、$\ell_i : x_i + f_i(x_{t+1}, x_{t+2}, \cdots, x_n)$ としてよい。ここで f_i は線形多項式である。すると、$k[x_0, x_1, \cdots, x_n]/I \approx k[x_{t+1}, x_{t+2}, \cdots, x_n)]$ は整域なので、I は prime ideal、Y は projective variety である。

これを利用すると $I(Y) = IZ(I) = \sqrt{I} = I = (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_t)$ となる。

(b) (a) より Y は projective variety である。Theorem1.8A(b) から height$I(Y)+ \dim S/I(Y) = \dim S$ が得られるので、

$$\text{height}I(Y) = \dim S - \dim S(Y) = n + 1 - (r + 1) = n - r$$

となる。$I(Y) = (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_t)$ としよう。(a) で示したように、それ自身が prime ideal なので、$I(Y)$ は $(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_t)$ を含む極小 prime ideal である。よって [1] Corollary11.11 から height$I(Y) \leq t$、すなわち $t \geq n - r$ となる。

(c) (a) で示したように、$I(Y) = (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_t)$ において $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_t$ は線形独立とできる。このとき height$I(Y) = t$ となる。なぜなら $(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_{i-1}) \subsetneq (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_i)$ より height$(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_i) \geq$ height$(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_{i-1}) + 1$ なので、height$(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_t) =$ height$I(Y) \geq t$ となるからである。(b) で示した height$I(Y) \leq t$ と合わせると height$I(Y) = n - r = t$ となる。

従って、$Y = Z(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_{n-r}), Z = Z(\ell'_1, \ell'_2, \cdots, \ell'_{n-s})$ とできる。一般に $Z(I) \cap Z(J) = Z(I \cup J)$ なので、$Y \cap Z = Z(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_{n-r}, \ell'_1, \ell'_2, \cdots, \ell'_{n-s})$ である。よって $Y \cap Z \neq \varnothing$ なら $Y \cap Z$ は linear variety であり、(b) で示したように $(n-r)+(n-s) \geq n - \dim Y \cap Z$ なので、$\dim Y \cap Z \geq r + s - n$ が得られる。

もし、$r + s - n \geq 0$ なら $\dim Y \cap Z \geq 0$ なので、$Y \cap Z \neq \varnothing$ である。(注: $\dim \varnothing = -1$ である。)

1.2.12

(a) $\theta : k[y_0, y_1, \cdots, y_N] \to k[x_0, x_1, \cdots, x_n], f(y_0, y_1, \cdots, y_)) \mapsto f(M_0, M_1, \cdots, M_N)$ は明らかに環準同型である。$\mathfrak{a} = \ker\theta$ とおく。

$f \in \mathfrak{a} \subseteq k[y_0, y_1, \cdots, y_N]$ を次数ごとにまとめて $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_l$ とすると、$f(M_0, M_1, \cdots, M_N) = 0$ より $f_i(M_0, M_1, \cdots, M_N) = 0$ が得られる。よって $f_i \in S_i \cap \mathfrak{a}$ となり、$\mathfrak{a}$ は斉次 ideal である。環準同型定理から $k[y_0, y_1, \cdots, y_N]/\mathfrak{a} = \text{Im}\theta$ であり、これは整域 $k[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ の部分環で整域だから、$\mathfrak{a}$ は prime ideal である。

(b) $y = \rho_d(x), \exists x \in \mathbf{P}^n$ とすると $\forall f \in \mathfrak{a} = \ker\theta$ に対して $f(y) = f\rho_d(x) = (\theta f)(x) = 0$ より、$\text{Im}\rho_d \subseteq Z(\mathfrak{a})$ である。

$b = (b_0, b_1, \cdots, b_N) \in Z(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbf{P}^N$ とすると、$b_j \neq 0, \exists j$ である。
$M_j = \prod_i x_i^{k_i}, \sum_i k_i = d$ とおくと $k_i \neq 0, \exists i$ なので、それを k_0 とする。ここで $j = k_0 k_1 \cdots k_n$ とかくことにする。すると、$(\prod_i x_i^{k_i})^d = \prod_i (x_i^d)^{k_i}$ より $y^d_{k_0 \cdots k_n} -$

$\prod_i y^{k_i}_{0\cdots0\overset{i}{d}0\cdots0} \in \mathfrak{a}$ から $b^d_{k_0\cdots k_n} = \prod_i b^{k_i}_{0\cdots0\overset{i}{d}0\cdots0}$ を得る。$b_{k_0\cdots k_n} = b_j \neq 0$ だから右辺は非零であり、$k_0 \neq 0$ より $b_{d0\cdots0}$ は右辺に実際に現れているから $b_{d0\cdots0} \neq 0$ となる。

各変数の次数を比較することにより次式が成立する。

$$(x_0^d)^{d-1}(x_0^{k_0}\cdots x_n^{k_n}) - (x_0^d)^{k_0}(x_0^{d-1}x_1)^{k_1}\cdots(x_0^{d-1}x_n)^{k_n} = 0$$

よって、$y^{d-1}_{d0\cdots0}y_{k_0\cdots k_n} - y^{k_0}_{d0\cdots0}y^{k_1}_{(d-1)10\cdots0}\cdots y^{k_n}_{(d-1)0\cdots01} \in \mathfrak{a}$ から

$$b^{d-1}_{d0\cdots0}b_{k_0\cdots k_n} - b^{k_0}_{d0\cdots0}b^{k_1}_{(d-1)10\cdots0}\cdots b^{k_n}_{(d-1)0\cdots01} = 0$$

が得られる。

さて $a = (b_{d0\cdots0}, b_{(d-1)10\cdots0}, \cdots, b_{(d-1)0\cdots01}) \in \mathbf{P}^n$ とすると、$b_{d0\cdots0} \neq 0$ より

$\rho_d(a) = (\cdots, M_{k_0\cdots k_n}, \cdots)(a) = (\cdots, b^{k_0}_{d0\cdots0}b^{k_1}_{(d-1)10\cdots0}\cdots b^{k_n}_{(d-1)0\cdots01}, \cdots)$

$= (\cdots, b^{d-1}_{d0\cdots0}b_{k_0\cdots k_n}, \cdots) = b^{d-1}_{d0\cdots0}(\cdots, b_{k_0\cdots k_n}, \cdots) \sim (\cdots, b_{k_0\cdots k_n}, \cdots) = b$

が成り立つので、$b \in \mathrm{Im}\rho_d$ となる。

以上により、$\mathrm{Im}\rho_d = Z(\mathfrak{a})$ が得られる。

(c) 全射は既に示されている。$\rho_d(a) = \rho_d(b)$ とすると、$\prod_i a_i^{k_i} = \lambda \prod_i b_i^{k_i}$ が $\sum_i k_i = d$ を満たす全ての $\{k_i\}_{0\le i\le n}$ に対して成立する。$\exists b_i \neq 0$ なので、一般性を失うことなく $b_0 \neq 0$ とする。すると、$a_0^d = \lambda b_0^d, a_0^{d-1}a_i = \lambda b_0^{d-1}b_i$ より $a_i = (a_0/b_0)b_i$ となるので、$a = b$ である。よって、単射でもある。

次に示すように、$k[y_0, y_1, \cdots, y_N]$ の任意の斉次 ideal J に対して、$\rho_d^{-1}(Z(J)) = Z(\theta(J))$ が成り立つ。

$$a \in \rho_d^{-1}(Z(J)) \Leftrightarrow \rho_d(a) \in Z(J) \Leftrightarrow f(\rho_d(a)) = 0, \forall f \in J \Leftrightarrow \theta(f)(a) = 0, \forall f \in J \Leftrightarrow a \in Z(\theta(J))$$

従って、ρ_d は連続である。

最後に ρ_d が閉写像であることを示すために、$k[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ の任意の斉次 ideal I に対して、$\rho_d(Z(I)) = Z(\theta^{-1}(I))$ を証明する。

$b \in \rho_d(Z(I)) \Leftrightarrow b = \rho_d(a), \exists a \in Z(I)$ とすると、$\forall f \in \theta^{-1}(I) \Leftrightarrow \theta(f) \in I$ に対して $f(b) = f\rho_d(a) = \theta(f)(a) = 0$ から $b \in Z(\theta^{-1}(I))$ となり $\rho_d(Z(I)) \subseteq Z(\theta^{-1}(I))$ が得られる。

逆に $b \in Z(\theta^{-1}(I)) \subseteq Z(\mathfrak{a}) = \mathrm{Im}\rho_d$ とする。ここで、不等号は $\theta^{-1}(I) \supseteq \theta^{-1}(0) = \mathfrak{a}$ から成立する。よって $b = \rho_d(a) \in Z(\theta^{-1}(I))$ とかける。

$\forall g \in I \subseteq k[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ に対して、g^d は $\{M_j\}_{0\le j\le N}$ の多項式になっているので $g^d = \theta(f), \exists f \in k[y_0, y_1, \cdots, y_N]$ とかける。このとき $g^d \in I$ なので $f \in \theta^{-1}(I)$ であり、$\rho_d(a) \in Z(\theta^{-1}(I))$ より $g(a)^d = \theta(f)(a) = f\rho_d(a) = 0$ となる。従って、$g(a) = 0, \forall g \in I \Leftrightarrow a \in Z(I) \Leftrightarrow b \in \rho_d(Z(I))$、すなわち $Z(\theta^{-1}(I)) \subseteq \rho_d(Z(I))$ が得られる。よって $\rho_d(Z(I)) = Z(\theta^{-1}(I))$ が成り立ち ρ_d は開写像となる。

以上により、ρ_d が位相同型写像であることが示された。

(d) Exercise2.9(b) より twisted cubic curve は $I(\overline{Y}) = (x^2 - yw, y^2 - xz, xy - zw)$ で与えられる。ここで $\theta(w) = x_0^3, \theta(x) = x_0^2x_1, \theta(y) = x_0x_1^2, \theta(z) = x_1^3$ としたとき

$$I(\overline{Y}) = \mathfrak{a}\ (= \ker\theta)$$

となることを示す。

まず、$\theta(x^2-yw)=(x_0^2x_1)^2-(x_0x_1^2)x_0^3=0,\ \theta(y^2-xz)=(x_0x_1^2)^2-(x_0^2x_1)x_1^3=0,\ \theta(xy-zw)=(x_0^2x_1)(x_0x_1^2)-x_0^3x_1^3=0$ から $I(\overline{Y})\subseteq\mathfrak{a}$ である。

$f\in\mathfrak{a}$ とする。これに $x^2=yw,y^2=xz,xy=zw$ を繰り返し適用すると、$f=a(w,z)+b(w,z)x+c(w,z)y \mod I(\overline{Y})$ とできる。すると、$\theta(I(\overline{Y}))=0$ と $\theta(f)=0$ から

$$\theta(f)=a(x_0^3,x_1^3)+b(x_0^3,x_1^3)x_0^2x_1+c(x_0^3,x_1^3)x_0x_1^2=0$$

となる。ここで、x_0 の次数比較から $a(x_0^3,x_1^3)=0,b(x_0^3,x_1^3)=0,c(x_0^3,x_1^3)=0$ が成り立つが、これは $a(w,z)=0,b(w,z)=0,c(w,z)=0$ を意味する。よって、$f\in I(\overline{Y})$ となり、$\mathfrak{a}\subseteq I(\overline{Y})$ が得られる。

以上から $I(\overline{Y})=\mathfrak{a}$、すなわち $\overline{Y}=\mathrm{Im}\rho_3$ となる。従って、twisted cubic curve は 3-uple embedding である。

1.2.13

$Y=\rho_2(\mathrm{P}^2)\subseteq\mathrm{P}^5$ における 1 次元閉集合 Z に対して $Z_A=\rho_2^{-1}(Z)$ とおくと、Exercise2.12(c) から Z_A も 1 次元閉集合である。よって Exercise2.8 から、ある斉次既約多項式を用いて $Z_A=Z(f)$ となるので、$Z(f)$ は既約閉集合である。ここで f^2 は $\{M_j\}_{0\le j\le 5}$ の多項式になっているので $f^2=\theta(g),\exists g\in k[y_0,y_1,\cdots,y_5]$ とかける。g の素因数分解を $g=\prod_i g_i$ とすると f は既約多項式なので $\theta(g)=\prod_i\theta(g_i)$ より $f=\theta(g_i)$ or $f^2=\theta(g_j)$ のはずである。そこで改めて $\theta(g)=f^e,e=1$ or 2 とし、f,g は既約とする。

このとき次式から $Z=\rho_2(Z(f))=Z(g)\cap Y$ が成立する。

$b\in\rho_2(Z(f))\Leftrightarrow b=\rho_2(a)\&f(a)=0\Leftrightarrow g(b)=g\rho_2(a)=\theta(g)(a)=f^e(a)=0$
$\Leftrightarrow g(b)=0\&\ b=\rho_2(a)\Leftrightarrow b\in Z(g)\cap Y$

ここで、g は既約なので $Z(g)$ は hypersurface である。

1.2.14

well-define なのは明らかなので、単射性を示す。$\psi(a\times b)=\psi(a'\times b')$ とする。このとき $a'_0\neq 0,b'_0\neq 0$ としてよいので、$\lambda=(a_0b_0)/(a'_0b'_0)$ とおく。すると任意の i,j に対して $a_ib_j=\lambda a'_ib'_j$ が成立する。ここで、$j=0$ とすると $a\sim a'$ が得られ、$i=0$ とすると $b\sim b'$ が得られるので、ψ は単射である。

$\mathrm{Im}\psi$ が subvariety であることを示すには、prime ideal $\mathfrak{a}$ に対して $\mathrm{Im}\psi=Z(\mathfrak{a})$ となれば十分である。

$$\eta:k[\{z_{ij}\}_{0\le i\le r,0\le j\le s}\to k[x_0,x_1,\cdots,x_r,y_0,y_1,\cdots,y_s],z_{ij}\mapsto x_iy_j$$

とおく。ここで、η は環準同型で $\mathrm{Im}\eta$ は整域の部分環なので $\mathfrak{a}:=\ker\eta$ は prime ideal である。このとき $\eta(f)=f\psi,\forall f\in k[\{z_{ij}\}]$ が成り立つ。

$$c\in\mathrm{Im}\psi\Rightarrow c=\psi(\exists a\times\exists b)\Rightarrow f(c)=f\psi(a\times b)=\eta(f)(a\times b)=0,\forall f\in\mathfrak{a}\Rightarrow c\in Z(\mathfrak{a})$$

より $\mathrm{Im}\psi\subseteq Z(\mathfrak{a})$ である。

逆に $c \in Z(\mathfrak{a})$ とする。ここで $c_{00} \neq 0$ としてよい。$\{z_{ij}z_{kl}-z_{il}z_{kj}\}_{ijkl} \subseteq \mathfrak{a}$ より $c_{ij}c_{kl} = c_{il}c_{kj}$ なので、特に $c_{ij}c_{00} = c_{i0}c_{0j}$ である。ここで、$a = (c_{00}, c_{10}, \cdots, c_{r0}), b = (c_{00}, c_{01}, \cdots, c_{0s})$ とおくと

$$\psi(a \times b) = (\{a_i b_j\}_{ij}) = (\{c_{i0}c_{0j}\}_{ij}) = (\{c_{00}c_{ij}\}_{ij}) = c_{00}c \sim c$$

となる。よって $Z(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Im}\psi$ であり、先の結果と合わせて $\mathrm{Im}\psi = Z(\mathfrak{a})$ を得る。

(補) 実は $\mathfrak{a} = (\{z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj}\}_{ijkl})$ である。

1.2.15

(a) $(w, x, y, z) \in \psi(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ とすると $(w, x, y, z) = \psi((a, b) \times (c, d)) = (ac, ad, bc, bd)$ とかける。このとき $ad \cdot bc - ca \cdot bd = 0$ だから $\psi(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) \subseteq Z(xy - zw)$ となる。

逆に $xy - zw = 0$ とする。ここで $w \neq 0$ としてよい。$(a, b) = (w, y), (c, d) = (w, x)$ とおくと $\psi((a, b) \times (c, d)) = (w^2, wx, wy, xy) = (w^2, wx, wy, zw) = (w, x, y, z)$ なので、$Z(xy - zw) \subseteq \psi(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ となる。

従って $\psi(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) = Z(xy - zw)$ である。

(b) $t = (t_0, t_1)$ をパラメータとする二つの直線族を $L_t : \psi(t \times r), M_t : \psi(s \times t)$ で与える (r, s は変数である)。実際、これらは直線である。なぜなら $(w, x, y, z) = \psi(t \times r)$ は 2 平面 $t_0 y = t_1 w, t_0 z = t_1 x$ の交線として表されるからである。$\psi(s \times t)$ も同様である。

$L_t \cap L_u \neq \varnothing$ とする。このとき、ある t, u, r, s で $\psi(t \times r) = \psi(u \times s)$ となるから、$(t_0r_0, t_0r_1, t_1r_0, t_1r_1) = (u_0b_0, u_0b_1, u_1b_0, u_1b_1)$ となる。すると、$(t_0, t_1) = (u_0, u_1)$ が得られるので、$t = u$、すなわち $L_t = L_u$ となる。

M_t についても同様である。

$L_t \cap M_u$ においては、$L_t \cap M_u \ni \psi(t \times u)$ なので $L_t \cap M_u$ は空ではない。$L_t \cap M_u$ の任意の元を取ると、それは $\psi(t \times r) = \psi(s \times u)$ であるが、

$$(t_0r_0, t_0r_1, t_1r_0, t_1r_1) = (s_0u_0, s_0u_1, s_1u_0, s_1u_1) \Leftrightarrow r = u, s = t$$

より $\psi(t \times u)$ となってしまうので、$L_t \cap M_u$ は 1 点から成る。

(c) Q 上の曲線には他に平面 $x = y$ との交線があり、それは放物線で閉集合である。

(a) における記法を用いると $x = y$ は $ad = bc \Leftrightarrow (a, b) = (c, d)$ を意味する。つまり $\mathrm{P}^1 \times \mathrm{P}^1$ における $C := \{(r, r) | r \in \mathrm{P}^1\}$ が ψ によって対応している。ところが、P^1 はハウスドルフ空間ではないので、対角線集合は積位相では閉集合にならない ([2], 例題 1, p. 77)。従って、この意味では ψ は連続とはならない。

1.2.16

(a) $Q_1 = Z(x^2 - yw), Q_2 = Z(xy - zw)$ に対して $Q := Q_1 \cap Q_2$ を求める。

$w \neq 0$ のときは $Q = \{(w^3, w^2x, wx^2, x^3)\} \approx \{(t, t^2, t^3)\}$ となる。これは Twisted Cubic Curve である (Exercise 1.2)。

$w = 0$ のときは $x = 0$ となり、$Q = \{(0, 0, y, z) | x, y \in k\}$ は直線である。

従って $Q_1 \cap Q_2$ は共通部分を持たない Twisted Cubic Curve と直線の和集合からなり、既約でないので variety にはならない。

(b) $C = Z(x^2 - yz), L = Z(y)$ とすると、$C \cap L = Z(x, y)$ は 1 点 $P = (0, 0, 1)$ からなり、$I(P) = (x, y)$ となる。

一方 $I(C)+I(L) = (x^2-yz)+(y) = (x^2-yz, y) = (x^2, y)$ であるが $x \notin (x^2, y)$ なので、$I(C) + I(L) \neq I(P)$ である。

1.2.17

(a) $Y = Z(\mathfrak{a}), \mathfrak{a} = (f_1, f_2, \cdots, f_q)$: 斉次 prime ideal、$f_i$: nonconstant とする。$S$ はネーター環であり、$\mathfrak{a}$ は $(f_1, f_2, \cdots, f_q)$ に属する極小 prime ideal なので、[1], Corollary 11.16 より height$\mathfrak{a} \leq q$ である。すると、Exercise 2.6 から

$$\dim Y = \dim S(Y)-1 = \dim S/\mathfrak{a}-1 = \dim S-\mathrm{height}\mathfrak{a}-1 \geq n+1-q-1 = n-q$$

が得られる。

(b) $I(Y) = (f_1, f_2, \cdots, f_q), q = n-r$ とする。Y は variety なので $I(Y)$ は prime ideal である。

まず f_i は既約多項式としてよい。なぜなら $f_i = g_{i1}g_{i2}\cdots$ と既約因数分解したとき、$Z(f_1, f_2, \cdots, f_q) = Z(f_1)\cap Z(f_2)\cap\cdots\cap Z(f_q)$ に $Z(f_i) = Z(g_{i1})\cup Z(g_{i2})\cup\cdots$ を代入して整理すると、$\bigcup\bigcap_i Z(g_{ij_i})$ の形となり、$Z(f_1, f_2, \cdots, f_q)$ が既約なのでそれはある $\bigcap_i Z(g_{ij_i})$ に等しくなるからである。

このとき、斉次 prime ideal $I(Y) = (f_1, f_2, \cdots, f_q)$ において、各 f_i を斉次多項式とできることを示す。帰納法で証明する。

$I(Y) = (f_1, f_2, \cdots, f_q)$ において既に $f_1, \cdots, f_{s-1}$ が斉次多項式とする。それ以外の多項式の中で最低次項の次数が一番低い次数を d とし、その次数の項を含む $I(Y)$ の生成元を f_j として、次数 d の部分を $\overline{f_j}$ とする。このとき、$\overline{f_j}$ は他の f_i から生成した多項式の d 次部分となる場合には、f_j から、他の f_i から生成した多項式を引くと f_j から $\overline{f_j}$ が消える。このようにしても $I(Y)$ は変わらない。

これを繰り返せばある次数 d、ある j で $\overline{f_j}$ は他の f_i から生成した多項式の d 次部分にならないように取れる。なぜなら、$(f_1, f_2, \cdots, f_q)$ は線形独立とできるので、$D = \max_i \deg f_i, I_D = \bigcup_{m\leq D} I(Y)_m$ として $\dim_k I_D \geq q$ なるが、もし $d \to \infty$ となってしまうとすると、$\dim_k I_D \leq s$ となってしまうからである。

このときの j を s とし、$f = \overline{f_s}$ とする。$I(Y)$ は斉次 ideal なので $f \in I(Y)$ とかける。よって、 $f = \sum_{i\neq s} h_i f_i$ であるが、以上示したことから、h_s の定数項 a_s は非零である。$h_s = a_s + h'_s$ とする。

ここで、一般論として、$f'_1 = (1+g)f_1$ のとき $(f_1, f_2, \cdots, f_m) = (f'_1, f_2, \cdots, f_m)$ を証明しておく。$(\supseteq)$ は明らかである。

逆向きを示すために、斉次 ideal $I = (h_1, h_2, \cdots, h_m)$ のとき $\hat{S}I \cap S \subseteq I$ を示す。ここで $S = k[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ であり、$\hat{S}$ はその完備化である。

$h \in \hat{S}I \cap S$ とすると、$h = \sum_i g_i h_i, g_i \in \hat{S}$ とかけるが、h_i は斉次多項式としてよいから $h = \sum_i g'_i h_i, \deg g'_i = \deg h - \deg h_i$ とかけるので $g'_i \in S$ となる。よって $h \in I$ である。

以上のことから、$\hat{S}$ において $I := (f_1, f_2, \cdots, f_m) = ((1+g)^{-1}f'_1, f_2, \cdots, f_m) = ((1 - g + g^2\cdots)f'_1, f_2, \cdots, f_m) \subseteq (f'_1, f_2, \cdots, f_m) \subseteq \hat{S}I \cap S \subseteq I$ が成立する。

このとき、$I(Y) = (f_1, f_2, \cdots, f_s, \cdots, f_q) = (f_1, f_2, \cdots, (a_s+h'_s)f_s, \cdots, f_q) = (f_1, f_2, \cdots, h_s f_s, \cdots, f_q) = (f_1, f_2, \cdots, \sum_i h_i f_i, \cdots, f_q) = (f_1, f_2, \cdots, f, \cdots, f_q)$ が得られる。

以上により、$I(Y) = (f_1, f_2, \cdots, f_q)$ において、各 f_i は既約斉次多項式とできることが示された。

従って $Y = ZI(Y) = \bigcap_i Z(f_i)$ となり、$Z(f_i)$ が hypersurface なので、Y は set-theoretic complete intersection である。(Y は既約、すなわち projective variety とした。)

(c) $\mathbf{P}^3$ における twisted cubic curve Y の座標環は Exercise 2.9(b) で示したように

$$I(Y) = (x^2 - yw, xy - zw, xz - y^2)$$

で与えられる。これは既約である。なぜなら、この Y は Exercise 2.9(b) における $\overline{Y}$ であり、Y は $\mathbf{A}^3$ において既約なので (Exercise 1.2)、Exercise 2.9(a) によってこの $\overline{Y}$ も既約となるからである。

$x^2 - yw, xy - zw, xz - y^2$ は $I(Y)_2$ において線形独立なので、$I(Y)$ は 2 元では生成できない。

$J := (x^2 - yw, y^3 - 2xyz + wz^2)$ に対して $J \subseteq I(Y) \subseteq \sqrt{J}$ が成立する。実際、$y^3 - 2xyz + wz^2 = y(y^2 - xz) - z(xy - zw)$ より $J \subseteq I(Y)$ であり、$(xy - zw)^2 = y^2(x^2 - wy) + w(y^3 - 2xyz + wz^2), (xz - y^2)^2 = z^2(x^2 - wy) + y(y^3 - 2xyz + wz^2)$ より $I(Y) \subseteq \sqrt{J}$ ある。よって、$J \subseteq I(Y) \subseteq \sqrt{J} = IZ(J)$ となる。最後の等号は Exercise 2.2 と Exercise 2.3(d) による。

このとき $Z(J) \supseteq ZI(Y) = Y \supseteq ZIZ(J) = Z(J)$ なので $Y = Z(J) = Z(x^2 - yw) \cap Z(y^3 - 2xyz + wz^2)$ である。ここで、$H_1 = Z(x^2 - yw), H_2 = Z(y^3 - 2xyz + wz^2)$ とすれば、それぞれ次数 2, 3 の hypersurface であり、$Y = H_1 \cap H_2$ となる。$n - r = 2$ なので、Y は set-theoretic complete intersection である。しかし、strict complete intersection ではない。

References

[1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1963

[2] 志賀浩二: 精解演習 集合 · 位相 · 測度, 廣川書店, 1972