

# 1 Varieties

## 1.1 Affine Varieties

### 1.1.1

(a)  $Y = Z(y - x^2)$  のとき、 $A(Y) = k[x, y]/(y - x^2) = k[x]$

(b)  $A(Z) = k[x, y]/(xy - 1) = k[x, x^{-1}]$  の中には 1 以外の単元があるが、 $k[x]$  には 1 しかないので、同型ではない。

(c) 既約な 2 変数 2 次関数は 1 次変換の差異を除いて  $y - x^2, xy - 1$  に限られる。よって  $A(W)$  は  $A(Y)$  または  $A(Z)$  である。

### 1.1.2

$Y = \{(t, t^2, t^3) | t \in k\} = Z(y - x^2, z - x^3)$  から  $Y$  は閉集合である。また、 $k[x, y, z]/(y - x^2, z - x^3) = k[x]$  より  $(y - x^2, z - x^3)$  は prime ideal であり、 $Y$  は affine variety となる。

イデアル  $(y - x^2, z - x^3)$  は prime なので、

$$I(Y) = I(Z(y - x^2, z - x^3)) = (y - x^2, z - x^3)$$

である。さらに

$$A(Y) = k[x, y, z]/I(Y) = k[x, y, z]/(y - x^2, z - x^3) = k[x]$$

から

$$\dim Y = \dim A(Y) = 1$$

となる。

### 1.1.3

$Y$  は 3 つの部分からなる。

$$\begin{aligned} Y &= Z(x^2 - yz, xz - x) = Z(x^2 - yz, x(z - 1)) = Z(x^2 - yz, x) \cup Z(x^2 - yz, z - 1) \\ &= Z(yz, x) \cup Z(x^2 - y, z - 1) = Z(y, x) \cup Z(z, x) \cup Z(x^2 - y, z - 1) \end{aligned}$$

ここで  $k[x, y, z]/(y, x) = k[z]$  は整域なので  $(y, x)$  は prime ideal であり、 $Z(y, x)$  は既約である。同様に  $(z, x)$  は prime ideal であり、 $Z(z, x)$  も既約である。

$f(x, y, z)g(x, y, z) \in (x^2 - y, z - 1)$  とすると、 $f(x, x^2, 1)g(x, x^2, 1) = 0$  から  $f(x, x^2, 1)$  か  $g(x, x^2, 1)$  のいずれかが 0 である。例えば前者だとすると、 $f(x, y, z) \in I(t, t^2, 1) = (x^2 - y, z - 1)$  である。よって  $(x^2 - y, z - 1)$  は prime ideal であり、 $Z(x^2 - y, z - 1)$  は既約である。

#### 1.1.4

$U := A^2 - Z(x - y)$  は zariski 位相で開集合である。もし、これが積位相でも開集合だとすると、ある非空な  $V \times W$  を含む。ここで、 $V, W$  は  $A^1$  の開集合である。 $A^2$  は既約だから  $V \cap W \neq \emptyset$  であり、 $t \in V \cap W$  とすると、 $(t, t) \in V \times W - U$  となる。しかし、これは  $U \supseteq V \times W$  に反する。

#### 1.1.5

一般に、環  $B$  の ideal  $\mathfrak{a}$  が根基イデアルであることと  $B/\mathfrak{a}$  に 0 以外の冪零元が存在しないことは同値である。

アファイン座標環  $A(Y) = k[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(Y)$  は有限生成  $k$  代数であり、 $I(Y)$  は根基イデアルだから、 $A(Y)$  に非零な冪零元は存在しない。

逆に  $B$  を非零な冪零元を持たない有限生成  $k$  代数とする。このとき全射

$$\varphi : k[x_1, x_2, \dots, x_m] \rightarrow B$$

が存在する。 $\mathfrak{a} = \ker \varphi$  は根基イデアルなので、 $Y = Z(\mathfrak{a})$  とおくと  $I(Y) = I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$  より

$$B = k[x_1, x_2, \dots, x_m]/I(Y) = A(Y)$$

となる。

#### 1.1.6

$X$  を既約位相空間とし、 $Y$  をその非空な開集合とする。 $X = \bar{Y} \cup Y^c$  となるから、 $X$  の既約性より、 $X = \bar{Y}$  または  $X = Y^c$  となるが、 $Y$  は非空なので  $X = \bar{Y}$  が成立し、 $Y$  は稠密となる。

$Y \subseteq C_1 \cup C_2$  とする。このとき、 $X = C_1 \cup C_2 \cup Y^c$  となるが、 $X$  の既約性から  $X = C_1$  か  $X = C_2$  である ( $Y \neq \emptyset$  なので  $X = Y^c$  はあり得ない)。よって、 $Y$  は  $C_1, C_2$  のいずれかであり、 $Y$  は既約である。

$Y$ :既約  $\Leftrightarrow \bar{Y}$ :既約 は、 $Y \subseteq C_1 \cup C_2 \Leftrightarrow \bar{Y} \subseteq C_1 \cup C_2$  と  $Y \subseteq C_i \Leftrightarrow \bar{Y} \subseteq C_i$  から成立する。

#### 1.1.7

- (a) (i) $\Rightarrow$ (ii): 閉集合の集まりに極小元がなければ降鎖条件を満たさない。  
(ii) $\Rightarrow$ (iv): 開集合は閉集合の補集合だから開集合の集まりには極大元が存在する。  
(iv) $\Rightarrow$ (iii): 昇鎖列をなす開集合の全体には極大元が存在し、昇鎖条件を満たす。  
(iii) $\Rightarrow$ (i): 閉集合は開集合の補集合なので閉集合は降鎖条件を満たす。

(b)  $X = \bigcup_{\lambda} O_{\lambda}$  とし、 $\Sigma$  を有限個の  $O_{\lambda}$  の和集合の全ての集まりとする。 $X$  はネーター空間なので  $\Sigma$  には極大元が  $V$  が存在する。もし、 $V \neq X$  でなければ、 $x \in X - V$  がとれる。 $x \in O_{\lambda}$  とすると、 $O_{\lambda} \cup V$  は真に  $V$  を含み、かつ  $\Sigma$  に属す。しかし、これは  $V$  の極大性に反する。よって  $V = X$  である。

(c) ネーター空間  $X$  の部分集合  $Y$  における閉集合は  $Y \cap C$  とかける。ここで、 $C$  は  $X$  のある閉集合である。そこで  $Y$  の閉集合降鎖列を  $Y \cap C_1 \supseteq Y \cap C_2 \supseteq \dots$  とおく。このとき、 $Y \cap C_i = Y \cap C_1 \cap C_2 \cdots \cap C_i$  だから、 $C_1 \supseteq C_1 \cap C_2 \supseteq \dots$  は  $X$  の閉集合降鎖列となり、降鎖条件を満たす。よって、 $Y \cap C_1 \supseteq Y \cap C_2 \supseteq \dots$  も降鎖条件を満たす。

(d) 既約集合では二つの開集合の共通部分は空ではない。従って、ハウスドルフ空間では既約成分は1点のみからなる。また、ハウスドルフ空間は  $T_1$  だから1点集合は閉集合である。命題 1.5 より、ネーター空間では閉集合は有限個の既約成分からなるので、閉集合は有限個の点からなる。 $X$  も閉集合なので有限集合である。よって全ての部分集合は閉集合となり、 $X$  は離散位相空間となる。

### 1.1.8

既約多項式  $f$  に対して  $H = Z(f)$  とし、 $C$  を  $Y \cap H$  の任意の既約成分とする。このとき、 $C$  は既約であり、 $I(C) = I(\overline{C})$  は prime ideal である。。

$\mathfrak{p} := I(C) \supseteq I(Y \cap H) \ni f$  とすると、 $C$  の定義から  $\mathfrak{p}$  は  $I(Y \cap H)$  を含む極小 prime ideal である。 $Y \not\subseteq H$  なので  $f \notin I(Y)$  だから、 $A(Y)$  に移すと  $\tilde{\mathfrak{p}}$  は  $\tilde{f}$  を含む極小 prime ideal となる。なぜなら、 $\tilde{\mathfrak{q}} \ni f \Leftrightarrow \mathfrak{q} \supseteq (f) + I(Y) = I(Y \cap H)$  であり、 $A(Y)$  の prime ideal と  $I(Y)$  を含む  $A$  の prime ideal は一対一対応しているからである。

Theorem 1.11A から  $\text{height } \tilde{\mathfrak{p}} = 1$  なので、Theorem 1.8A(b) より  $\dim A(Y)/\tilde{\mathfrak{p}} = r - 1$  が得られる。 $A(Y)/\tilde{\mathfrak{p}} = (A/I(Y))/(\mathfrak{p}/I(Y)) = A/\mathfrak{p} = A(C)$  なので、

$$\dim C = \dim A(C) = \dim A(Y)/\tilde{\mathfrak{p}} = r - 1$$

となる。

### 1.1.9

$\mathfrak{a} := (y_1, y_2, \dots, y_r)$  に対して  $Z(\mathfrak{a})$  の任意の既約成分を  $C$  とおく。このとき  $\mathfrak{p} := I(C)$  は  $\mathfrak{a}$  を含む極小 prime ideal であるから、

$$\text{height } \mathfrak{p} \leq r$$

となる (Corollary 11.16, p.121, [1])。よって、Theorem 1.8A(b) より

$$\dim C = \dim A(C) = n - \text{height } \mathfrak{p} \geq n - r$$

が得られる。

### 1.1.10

(a)  $n = \dim Y$  とすると  $Y$  の中に

$$Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n$$

となる既約閉集合列が存在する。 $\overline{Z_i}$  は  $X$  で既約であるから

$$\overline{Z_0} \subseteq \overline{Z_1} \subseteq \dots \subseteq \overline{Z_n}$$

は  $X$  の既約閉集合列である。 $Z_i = \overline{Z_i} \cap Y$  から  $\overline{Z_i} = \overline{Z_{i+1}}$  となることはないので、

$$\dim X \geq \dim Y$$

である。

- (b)  $X \supseteq U_i$  だから上記 (a) より  $\dim X \geq \sup \dim U_i$  となる。  
逆向きの不等式を示す。 $n = \dim X$  とすると  $X$  に既約閉集合列

$$Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n$$

が存在する。 $X = \bigcup_i U_i$  から、ある  $i$  に対して  $Z_0 \cap U_i \neq \emptyset$  となる。

このとき  $Z_j \cap U_i \neq \emptyset$  は既約である。なぜなら、もし  $Z_j \cap U_i \subseteq C_1 \cup C_2$  とすると  $Z_j = (Z_j \cap U_i) \cup (Z_j \cap U_i^c) \subseteq C_1 \cup C_2 \cup (Z_j \cap U_i^c)$  となるが、 $Z_j \not\subseteq Z_j \cap U_i^c$  なので、 $Z_j$  の既約性から  $Z_j \subseteq C_1$  か  $Z_j \subseteq C_2$  となるからである。また、 $Z_j \cap U_i$  は  $Z_j$  の開集合ゆえ  $\overline{Z_j \cap U_i} = Z_j$  なので、 $Z_j \cap U_i = Z_{j+1} \cap U_i$  とはならない。よって、

$$Z_0 \cap U_i \subsetneq Z_1 \cap U_i \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n \cap U_i$$

は  $U_i$  の既約閉集合列であり  $\dim X \leq \dim U_i \leq \sup \dim U_i$  となる。  
両方合わせて

$$\dim X = \sup \dim U_i$$

が得られる。

- (c) 集合  $X = \{0, 1\}$  のすべての閉集合を  $X, \{0\}, \emptyset$  とする。このとき  $U := \{1\}$  は開集合で稠密である。 $U$  に真に含まれる既約閉集合はないので (空集合は既約ではない)、 $\dim U = 0$  である。一方、 $X$  については  $\{0\} \subsetneq X$  が最長の既約閉集合列だから  $\dim X = 1$  となる。従って、

$$\dim U < \dim X$$

である。

- (d)  $r = \dim Y$  とすると  $Y$  の既約閉集合列

$$Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_r$$

が存在する。このとき  $Z_i$  は  $X$  でも既約閉集合列である。

もし  $Y \subsetneq X$  とすると、 $X$  も既約閉集合なので

$$Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_r \subsetneq X$$

という  $X$  の既約閉集合列が存在する。すると  $\dim X \geq r + 1$  となってしまう。よって  $X = Y$  である。

(e)  $X := \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  とし、閉集合を  $C_i = \{0, 1, 2, \dots, i\}$  の形の全てとすると、 $X$  は位相空間となり、 $C_i$  は既約となる。閉集合の下降列は降鎖条件を満たすので、 $X$  はネーター空間である。このとき、

$$C_0 \subsetneq C_1 \subsetneq C_2 \subsetneq \dots$$

は無限長の既約閉集合列なので、 $\dim X = \infty$  である。

### 1.1.11

$Y = \{(t^3, t^4, t^5) | t \in k\}$  とする。

$$\varphi : k[x, y, z] \rightarrow k[t], f(x, y, z) \mapsto f(t^3, t^4, t^5)$$

とおくと  $\ker \varphi = \{f(x, y, z) \in k[x, y, z] | f(t^3, t^4, t^5) = 0, t \in k\} = I(Y)$  だから

$$\operatorname{Im} \varphi = k[t^3, t^4, t^5] \approx k[x, y, z]/I(Y) = A(Y)$$

となる。これは整域だから、 $I(Y)$  は prime ideal であり、Theorem 1.8A(b) より

$$\operatorname{height} I(Y) + \dim A(Y) = \dim k[x, y, z] = 3$$

が成立する。ここで

$$\dim A(Y) = \deg_{tr} \operatorname{Frac}(A(Y)) = \deg_{tr} \operatorname{Frac}(k[t^3, t^4, t^5]) = \deg_{tr} k(t) = 1$$

なので

$$\operatorname{height} I(Y) = 2$$

となる。

次に  $I(Y)$  が 2 要素では生成できないことを示す。 $x = t^3, y = t^4, z = t^5$  とおけばわかるように、 $I(Y) \supseteq (xz - y^2, x^3 - yz, x^2 - z^2)$  である。このとき、 $(xz - y^2, x^3 - yz, x^2 - z^2)$  は  $k$  上線形空間である。

$$a(xz - y^2) + b(x^3 - yz) + c(x^2 - z^2) = 0, \quad a, b, c \in k$$

とする。 $x = t^3, y = t^4, z = t^5$  とおけば、 $a, b, c$  は各々  $t$  の 8 次、9 次、10 次の係数なので、それぞれ 0 である。よって  $\dim_k(xz - y^2, x^3 - yz, x^2 - z^2) = 3$  である。これは 2 要素では生成できない。

### 1.1.12

$f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$  は  $\mathbf{R}[x, y]$  で既約である。しかるに  $Z(f) = \emptyset$  は既約ではない (p.3 上の定義による)。

## References

- [1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonal: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1963