流体とゆらぎ

村瀬功一
京都大学基礎物理学研究所

研究会「QCD相転移やQGP生成のモデル化による重イオン衝突の時空発展の理解に向けた理論・実験共同研究会」; 協賛: Heavy Ion Café, Heavy Ion Pub; Online, 2021/9/24

目次

導入: 流体とゆらぎ

- 重イオン衝突とゆらぎ
- 流体力学的ゆらぎ

流体力学的揺らぎのモデリング

- 確率方程式 vs Hydro+
- 2次粘性流体
- 正則化 (cutoff)
- ノイズの入れ方

流体力学的ゆらぎと測定量

- 流体ゆらぎだけが効く測定量はないのか?
- そもそも流体ゆらぎは物理的に分離できる?
- 縦ゆらぎに着目する理由
- Legendre 係数

重イオン衝突反応とゆらぎ

ゆらぎとは?

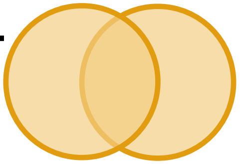
同じ条件で実験してもイベント毎に結果が異なる。
"ゆらぎ" ～ イベント毎の違い・平均からのずれ

"事象毎のゆらぎ (event-by-event fluctuations)"

測定量に現れるゆらぎ (集団運動由来)

粒子多重度(multiplicity)、
2粒子相関、p_T相関、
方位角異方性(フロー)、高次相関$v_n\{2\}$, $v_n\{4\}$, ... (flow fluct)
フロー相関 r_n, $(n)sc_n$, $(n)ac_\mathrm{n}$, ...

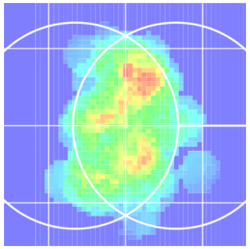
重イオン衝突反応とゆらぎ



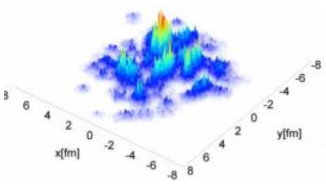
モデル上のゆらぎ (乱数を使うところ)

時間発展

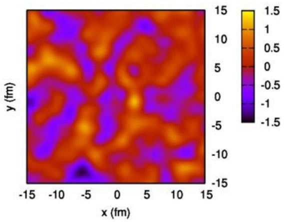
初期　衝突径数(～中心度)、
核子分布、核子内構造、
初期模型に特有のゆらぎ、etc.



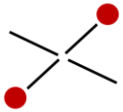
Schenke, et al.,
IPGlasma



流体　流体力学的ゆらぎ(熱揺らぎ)、
high-p_T成分との相互作用



ハドロンガス
粒子化(Cooper-Frye公式によるサンプリング)、
崩壊・再散乱



→ ゆらぎの”物理的”理解 (～ モデルありき)

流体力学的ゆらぎ

Landau & Lifshitz, Fluid Mechanics, §133-136

流体方程式 = 保存則 + 状態方程式・構成方程式

局所平衡の仮定の下、熱力学(V→∞)の性質を使う

✗ 実際は良い仮定とは限らない
→ ランダムな”ずれ”が生じる (熱揺らぎ)

“流体力学的ゆらぎ”

構成方程式

$$\pi^{\mu\nu} + \tau_\pi \Delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \mathrm{D}\pi^{\alpha\beta} = 2\eta\partial^{\langle\mu}u^{\rangle\nu} + \cdots + \xi_\pi^{\mu\nu},$$

$$[1 + \tau_\Pi \mathrm{D}]\Pi = -\zeta\partial_\mu u^\mu + \cdots + \xi_\Pi.$$

揺動散逸関係 (FDR)

$$\langle \xi^{\mu\nu}(x)\xi^{\alpha\beta}(x')\rangle = 4T\eta\Delta^{\mu\nu\alpha\beta}\delta^{(4)}(x-x'),$$

$$\langle \xi(x)\xi(x')\rangle = 2T\zeta\delta^{(4)}(x-x'),$$

流体力学的ゆらぎのモデリング

モデリング: 確率微分方程式 vs Hydro+的方針

確率偏微分方程式 (Stochastic partial differential eqs)

Langevin 方程式 (white noise 項を含む) を直接数値計算

Cutoff 依存性が時間発展に顕に現れる。非自明

Hydro+ などモーメントの発展を追う方針 (決定論的)

Hydro+: 遅い変数のゆらぎの2点相関の時間発展を追う

M. Stephanov and Y. Yin, PRD98 036006 (2018),
L. Du, et al., PRC102, 054911 (2020)

$$\phi_{\boldsymbol{Q}}(x) \sim \int_{\Delta \boldsymbol{x}} \left\langle \delta \frac{s}{n}\left(t, \boldsymbol{x}+\tfrac{1}{2}\Delta \boldsymbol{x}\right) \delta \frac{s}{n}\left(t, \boldsymbol{x}-\tfrac{1}{2}\Delta \boldsymbol{x}\right) \right\rangle e^{i\boldsymbol{Q}\cdot\Delta \boldsymbol{x}}$$

個人的疑問: 揺らぎの小さい安定配位の周りの発展は良さそうだが、
高次相関が成長するような不安定な状況で有効なのか?

モデリング: 2次粘性流体の上でのゆらぎ

1次粘性流体 (Navier-Stokes)

←多くの理想化した流体力学的ゆらぎの議論

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad T^{\mu\nu} = T_{\rm id}^{\mu\nu} + \underbrace{\Pi^{\mu\nu}}_{\text{散逸流}(\pi,\Pi)} + \mathcal{S}^{\mu\nu}.$$

ゆらぎ

✗ <u>動的模型</u>の上では因果律･不安定性が問題になる

Hiscock and Lindblom

✗ 物理的にも緩和時間など2次係数 ～fm は無視できない

モデリング: 2次粘性流体の上でのゆらぎ

2次粘性流体 (Israel-Stewart、散逸流=動的自由度)

✔因果律を満たす・線形安定　Mueller, Israel & Stewart

揺らぎは構成方程式に入れて考えると見通しが良い

$$\pi^{\mu\nu} + \tau_\pi \Delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \mathrm{D}\pi^{\alpha\beta} = 2\eta\partial^{\langle\mu}u^{\rangle\nu} + \cdots + \xi_\pi^{\mu\nu},$$
$$[1 + \tau_\Pi \mathrm{D}]\Pi = -\zeta\partial_\mu u^\mu + \cdots + \xi_\Pi.$$

バリオン数カレントも同様に動的模型上では2次で解く必要

✔ゆらぎの定理が一見して破れる　Hirano, Kurita, KM, NPA984 44 (2019)

✔揺動散逸関係に対する2次の補正　KM, Annals Phys 411, 167969 (2019)

モデリング: ノイズの入れ方と正則化の必要性

- ノイズ項の自己相関～ $\delta^{(4)}(x-x')$ ← 揺動散逸関係
- 流体力学は非線形方程式

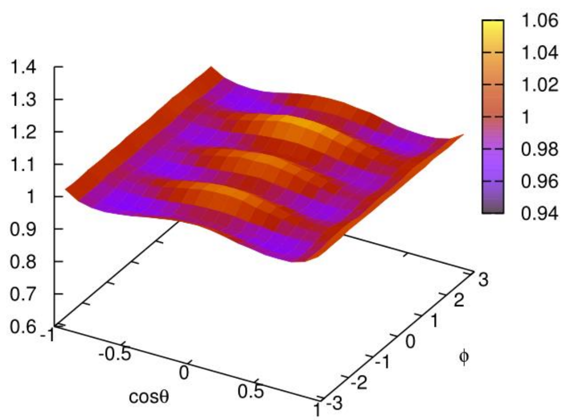
※本当は何処かで流体記述が破綻

→ 連続極限は非自明

各セルに独立に入れる (有限セルサイズにより自然に正則化)

$$\langle \xi(x_i)\xi(x_j)\rangle \sim \delta_{ij}/\Delta V$$

✗ グリッド構造から等方性が破れる。特に v_4 に影響



流速分布: 平衡状態でも一様にならない

セルサイズより長いスケールで
等方的に正則化する必要

モデリング: ノイズの入れ方と正則化の必要性

ノイズ項の自己相関～ $\delta^{(4)}(x-x')$ ← 揺動散逸関係

流体力学は非線形方程式

※本当は何処かで流体記述が破綻

→ 連続極限は非自明

各セルに独立に入れる (有限セルサイズにより自然に正則化)

$$\langle \xi(x_i)\xi(x_j)\rangle \sim \delta_{ij}/\Delta V$$

✗ グリッド構造から等方性が破れる。特に v_4 に影響

波数空間で cutoff

実空間では球Bessel関数を核とした畳み込み。
非正定値。くりこみと親和性が高い

Gaussian smearing

正定値カーネル。初期模型の"粗視化"と親和性が高い

モデリング: ノイズの入れ方と正則化の必要性

Gaussian smearing

① $\langle w(\boldsymbol{x}) w(\boldsymbol{x}')\rangle = \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')/\Delta t.$ (white noise)

② $w(\boldsymbol{x})^{\sigma} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \int d^3x' \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')^2}{2\sigma^2}\right) w(\boldsymbol{x}').$ (smear)

"拡散方程式"を Δs = σ/D だけ解く or FFTで畳み込み

③ $\bar{\xi}_{\Pi} = \sqrt{2T\zeta}\,\bar{w}_{\Pi}.$ (x FDR)

※散逸流の各成分の相関

$$\langle \bar{\xi}_{\pi}^{IJ} \bar{\xi}_{\pi}^{KL}\rangle = \alpha \Delta^{IJKL}$$
$$= \alpha\left[\frac{1}{2}\delta^{IK}\delta^{JL} + \frac{1}{2}\delta^{IL}\delta^{JK} - \frac{1}{d}\delta^{IJ}\delta^{KL}\right]$$

→ 線形結合を取り直して対角化

流体力学的ゆらぎと測定量

流体力学的ゆらぎと測定量

Q 流体ゆらぎだけに sensitive な測定量は?

A (今のところ) 見つけるのは難しい

時間発展

初期　衝突径数(～中心度)、
核子分布、核子内構造、
初期模型に特有のゆらぎ、…

流体　流体力学的ゆらぎ(熱揺らぎ)、
high-p_T成分との相互作用

ハドロンガス
粒子化(Cooper-Frye公式)、
崩壊・再散乱

様々なゆらぎが
全て積分されて
終状態ハドロン分布
になる。

流体力学的ゆらぎと測定量

Q 流体ゆらぎだけに sensitive な測定量は?

A (今のところ) 見つけるのは難しい

時間発展

初期 衝突径数(～中心度)、
核子分布、核子内構造、
初期模型に特有のゆらぎ、 …

流体 流体力学的ゆらぎ(熱揺らぎ)、
high-p_T成分との相互作用

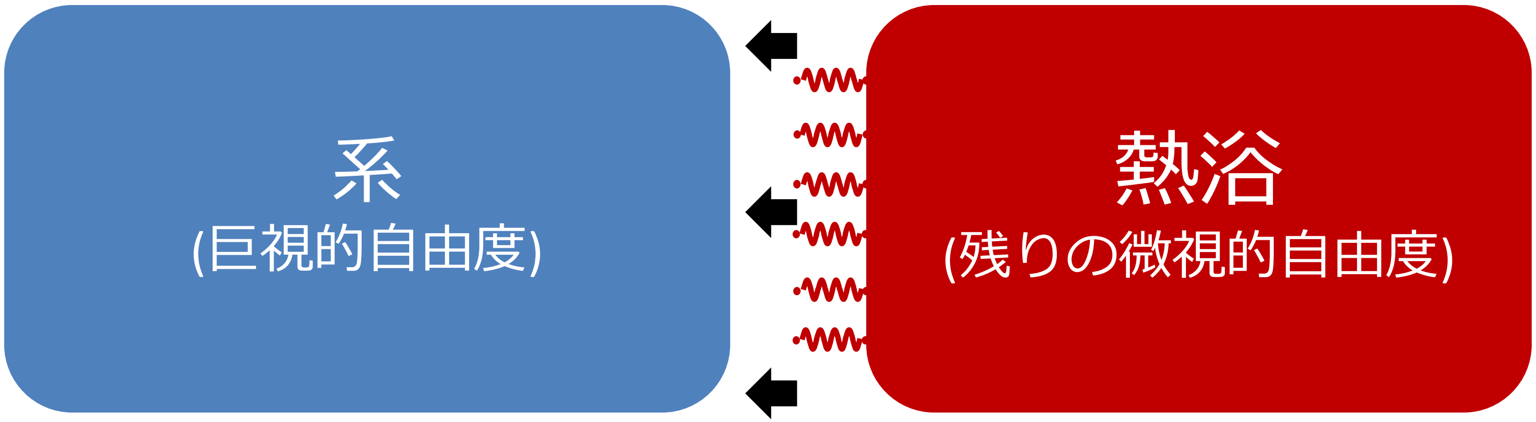
ハドロンガス
粒子化(Cooper-Frye公式)、
崩壊・再散乱

様々なゆらぎが
全て**積分**されて
終状態ハドロン分布
になる。

□ ～ 熱揺らぎ。振る舞い的にも似ている。
そもそも、物理的に分離可能なのか?

そもそも熱揺らぎとは?

= モデル化(変数消去)に伴う不定性



興味のある自由度・遅い変数・長波長　　消去する成分・速い変数・短波長成分

熱揺らぎ = 全系の内どの部分をモデルで記述するかの
“cutoff” に依存

流体力学的ゆらぎは “流体という記述” に付随する “エラー”

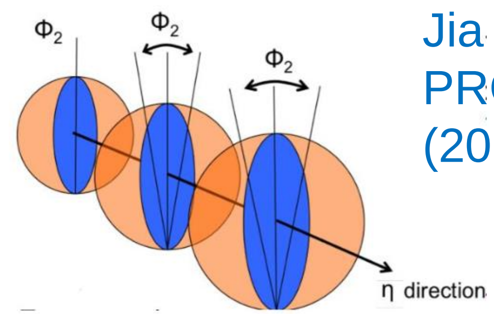
“平衡”からのずれとしての熱揺らぎ
→ モデルとは独立にこれ以上物理的に分解できるのか?

何故縦揺らぎに着目するのか

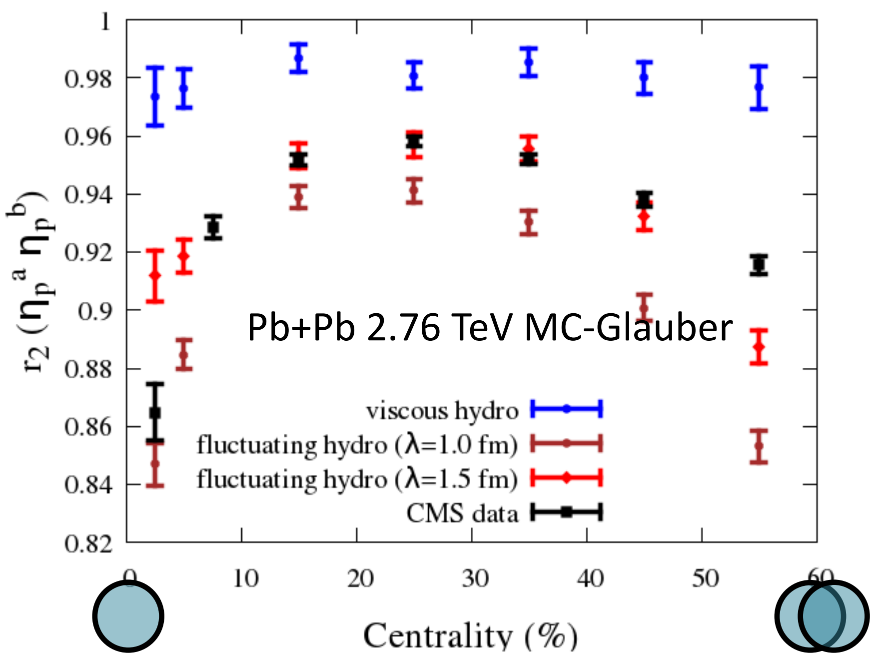
Sakai, KM, Hirano, PRC102, 064903 (2020), NPA1005, 121969 (2021)

縦方向(ビーム軸方向)のフローの相関

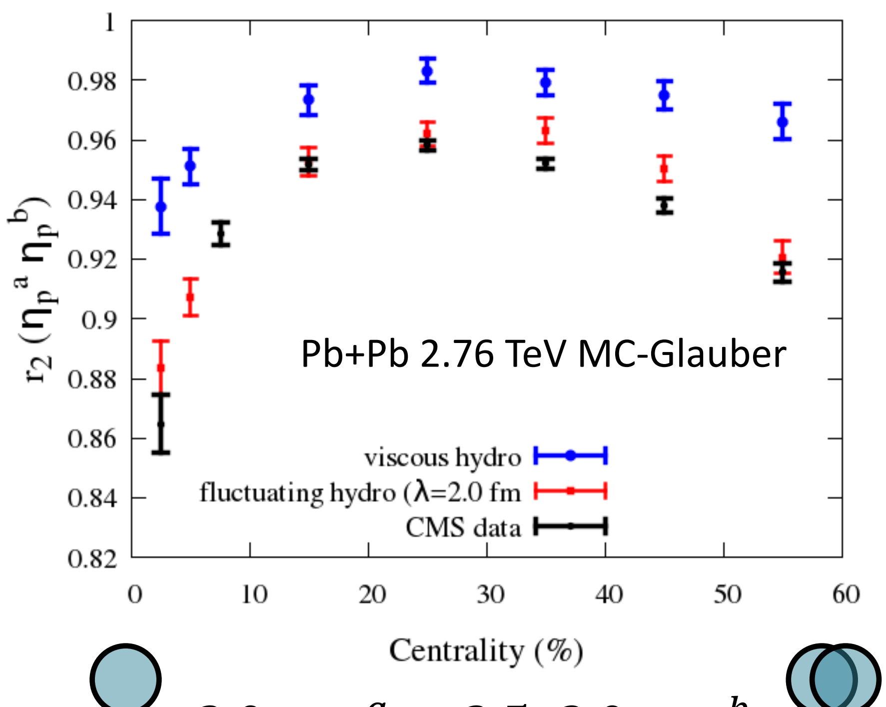
$$r_n(\eta_p^a, \eta_p^b) = \frac{V_{n\Delta}(-\eta_p^a, \eta_p^b)}{V_{n\Delta}(\eta_p^a, \eta_p^b)}$$



Jia and Huo, PRC90 034905 (2014)



$2.0 < \eta_p^a < 2.5, 3.0 < \eta_p^b < 4.0$



$2.0 < \eta_p^a < 2.5, 3.0 < \eta_p^b < 4.0$

何故縦揺らぎに着目するのか

ゆらぎの性質の違い

時間発展

初期 衝突径数(～中心度)、
核子分布、核子内構造、
初期模型に特有のゆらぎ、 …

ラピディティ不変
縦方向に同じ構造が続く。主に横方向の物理(v_n)に効く

流体 流体力学的ゆらぎ(熱揺らぎ)、
high-p_T成分との相互作用

ハドロンガス
粒子化(Cooper-Frye公式)、
崩壊・再散乱

縦にもゆらぐ
縦方向を見れば
核子分布などの幾
何的要因を除ける

より細かく縦方向の物理を調べる必要性?

フローのLegendre係数

方位角φ依存性の展開　→フロー係数

$$\frac{1}{N'}\frac{\mathrm{d}N'}{\mathrm{d}\phi} = \frac{1}{2\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \underline{v_n} \cos n(\phi - \underline{\Psi_n})\right].$$

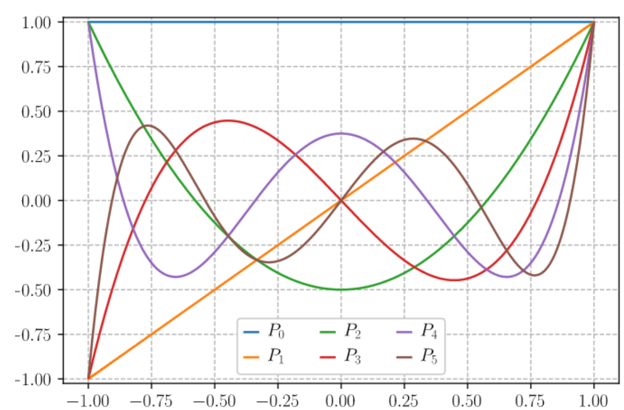
ラピディティη_p方向にも展開　Sakai, KM, Hirano, PRC102, 064903 (2020)

$$v_n(\eta_p) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n^k P_k\left(\frac{\eta_p}{\eta_p^{\max}}\right)$$

$$\Psi_n(\eta_p) = \sum_{k=0}^{\infty} b_n^k P_k\left(\frac{\eta_p}{\eta_p^{\max}}\right)$$

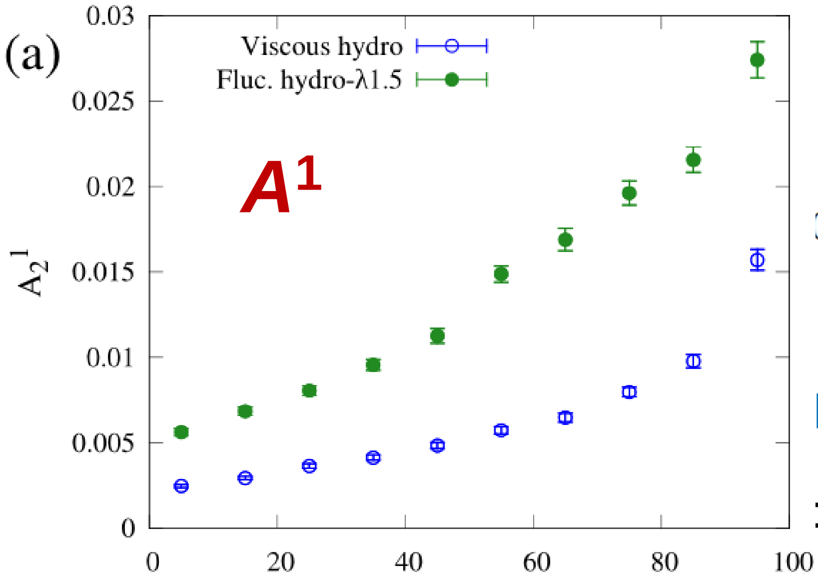
$$A_n^k = \sqrt{\langle (a_n^k)^2 \rangle_{\mathrm{ev}}}, \qquad B_n^k = \sqrt{\langle (b_n^k)^2 \rangle_{\mathrm{ev}}}.$$

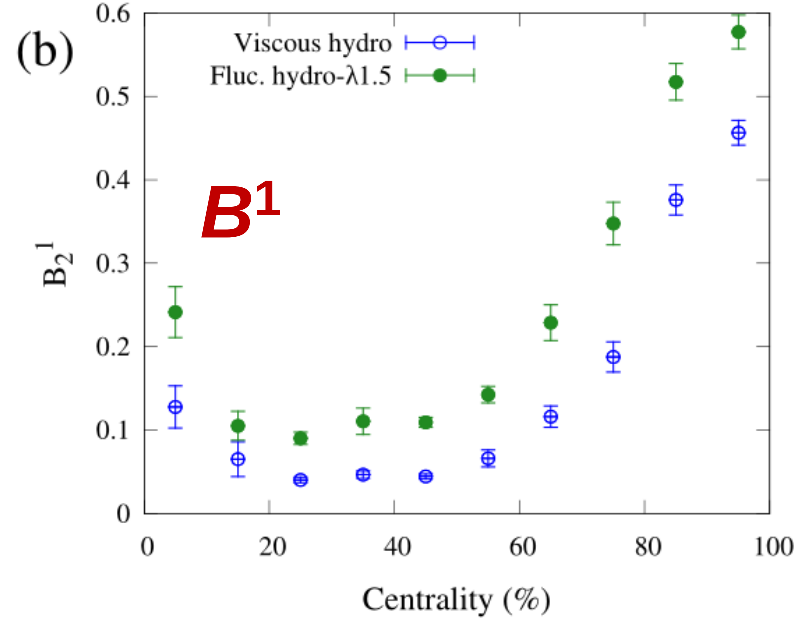
P_k: ルジャンドル多項式

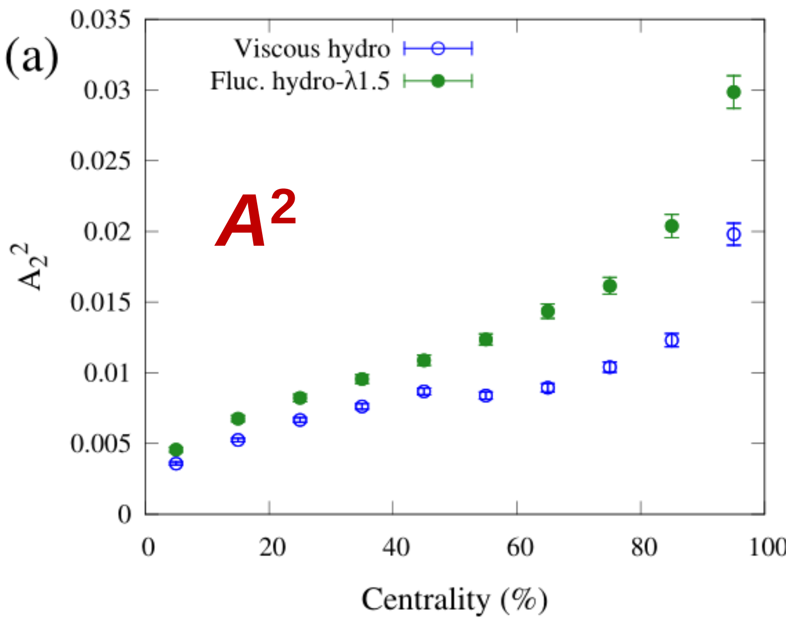


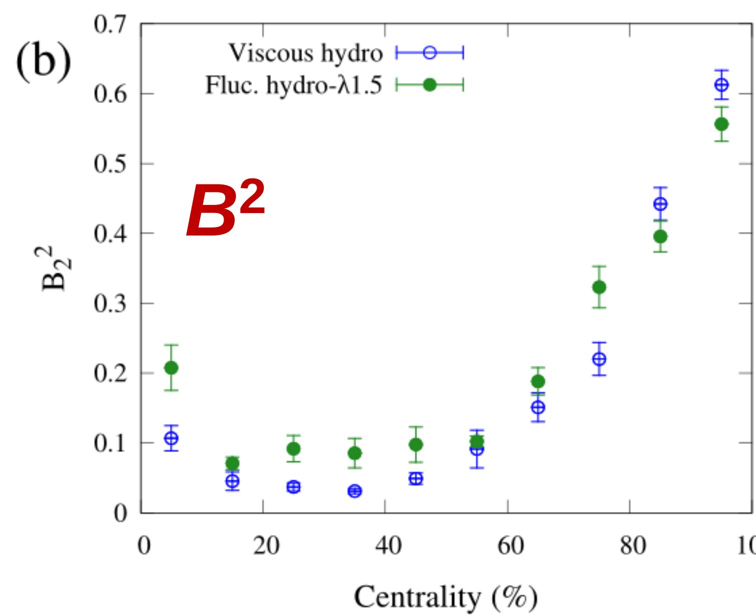
ラピディティ方向の多粒子相関や mixed correlation?

フローのLegendre係数









まとめ

導入: 流体とゆらぎ

- 重イオン衝突とゆらぎ →初期揺らぎをはじめとして色々
- 流体力学的ゆらぎ →熱揺らぎ。局所平衡の破れ

流体力学的揺らぎのモデリング

直接計算 vs モーメント (有効領域に注意)

- 確率方程式 vs Hydro+
- 2次粘性流体 安定性・重イオンのスケール
- 正則化 (cutoff) 等方性に注意
- ノイズの入れ方

具体的にしていること

流体力学的ゆらぎと測定量

- 流体ゆらぎだけが効く測定量はないのか? ???
- そもそも流体ゆらぎは物理的に分離できる? ???
- 縦ゆらぎに着目する理由 幾何効果を除くため
- Legendre 係数

より細かい物理